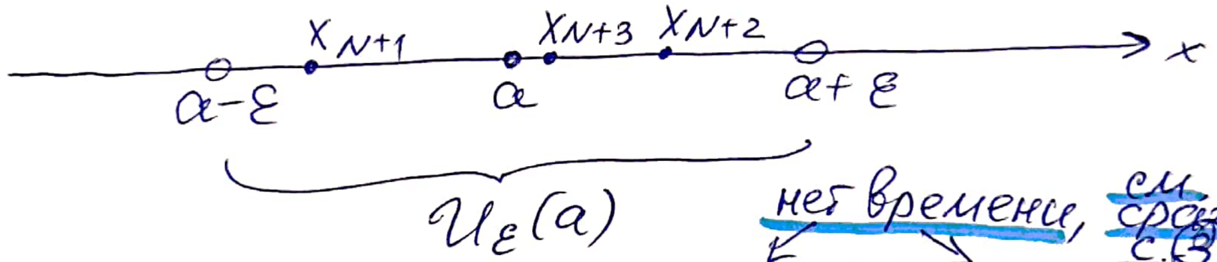
Занятие 5

Предел последовательности

Опр $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a}$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$:

$\forall n>N(\varepsilon)$ $\qquad \underbrace{|x_n-a|<\varepsilon}_{\text{расстояние между } x_n \text{ и } a}$

Геом. смысл: $\forall$ ε-окрестности точки a начиная с нек. номера $N+1$ $\boxed{\text{все}}$ члены последовательности лежат в этой окрестности.



нет времени, см. сразу с. 3

№1.230(б) $\qquad$ $\boxed{\text{Д/З О №1.230(}}$

① $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $\varepsilon = 0{,}005$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

② Найти для данного ε номер $N(\varepsilon)$ из определения предела послед-ти

Решение.

① $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{1} = 1$

пока недостат. обосновано

②

Но мы докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1$.

Возьмём $\varepsilon>0$ любое

Найдём $N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N(\varepsilon)$

$|x_n-a|<\varepsilon$, т.е.

(1) $\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|<\varepsilon$.

Преобразуем левую часть:

$$\left|\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1}_{>0}\right|<\varepsilon$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1<\varepsilon$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}<\varepsilon+1$$

$$1+\frac{1}{n^2}<(\varepsilon+1)^2$$

$0<\frac{1}{n^2}<(\varepsilon+1)^2-1 \Rightarrow$ по св-вам

неравенств $n^2>\frac{1}{(\varepsilon+1)^2-1}$

$$n^2>\frac{1}{\varepsilon^2+2\varepsilon}$$

(2) $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}}$. целая часть числа

Возьмём $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}}\right]$. Тогда $\forall n>N(\varepsilon)$ выполняется (2) $\Rightarrow$ выполняется (1).

② Для $\varepsilon=0{,}005$ найдём $\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}=\ldots=0{,}10012492$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}}\approx 9{,}987233888\approx 9{,}99$

Возьмём $\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}}\right]=9=N(\varepsilon)$.

Зам. Если в опр. предела $n\geq N(\varepsilon)$, то $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}}\right]+1=10$

Теоремы о пределах

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a+\alpha_n)=a \iff \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ (т.е. $\{\alpha_n\}$ б.м.п.) (беск. малая посл.)

Для конечных пределов:

Пусть $\exists$ и конечны $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

Тогда

2. $\exists\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$
3. $\exists\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

   Сл. $\exists\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n)=k\lim\limits_{n\to\infty}a_n$
4. $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$, если $b_n\neq0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$

Для бесконечных пределов

5. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\overset{\text{б.б.п.}}{\infty}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

   $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ и $a_n\neq0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\overset{(-\infty)}{+\infty},\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\overset{(-\infty)}{+\infty}$ (т.е. одного знака) $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\overset{(-\infty)}{+\infty}$,

   $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=+\infty$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$

Сл. из 5 и 8

1. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0,\ b_n\neq0\Rightarrow$

   $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$

Примеры:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)=3$

$\frac{1}{n}\to 0$, т.е. б.м.п.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{2}{n}\right)=5$, $\frac{2}{n}\to 0$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{\text{один из способов}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{7}{2n-3}\right)=2$, $\frac{7}{2n-3}\to 0$

неопределённость

$$\begin{array}{r|l} 4n+1 & 2n-3 \\ -\,(4n-6) & 2 \\ \hline 7 & \end{array}$$

Другие способы:

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(2-\frac{3}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}\right)}=\frac{4}{2}=2$

или

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{4n+1}{n}}{\frac{2n-3}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}}=$ ↗ как выше

$\frac{1}{n}\to 0$, $\frac{3}{n}\to 0$

↑ будем решать как в посл. способе

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n^2+n-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3n+2}{n^2}}{\frac{n^2+n-1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0}{1}=0$

$\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\to 0$, $\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\to 0$

Обрати внимание!

в 3): в числ. и знам. стоят многочлены одинак. степ.

в 4): степень мног. в числ. < степени мног. в знам.

) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n-1}{3n+2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \infty$, т.к. см. 4) и мы "перевернули" дробь.

Можно решать и так:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{3n+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^2+n-1}{n^2}}{\dfrac{3n+2}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2} \to 1 \neq 0}{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2} \to 0} = \infty$$

см. следствие ① внизу пред. стр.

Обобщение для неопределённости $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^k+\ldots+b}{cn^l+\ldots+d} = \begin{cases} \dfrac{a}{c}, & \text{если } k=l \\ 0, & \text{если } k<l \\ \infty, & \text{если } k>l \end{cases}$$

$\boxed{\text{ДЗ I № 1.232, 1.233,}}$ $\boxed{\text{придумать недостающий пример, чтобы были все три случая и решить}}$

№ 1.236.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+7} - \frac{1+2n^3}{2+5n^3}\right) \ominus$$

I сп. Привести к общ. знам. ...

II сп.

$$\ominus \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{5n+7} - \lim_{n\to\infty}\frac{1+2n^3}{2+5n^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] - \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \ldots$$

$$\ldots = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$$

$\boxed{\text{ДЗ II № 1.235}}$

Пример.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 5^n+3\cdot 2^n}{5^n+2^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\cdot 5^n+3\cdot 2^n}{5^n}}{\frac{5^n+2^n}{5^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\left(\frac{2}{5}\right)^n\to 0}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\to 0}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}=\frac{2}{1}=2$$

$\boxed{\text{Д/З } \underline{\overline{\text{III}}} \quad №1.240}$.

Неопределённость $[\infty-\infty]$.

Примеры.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{n}\right)=[\infty-\infty]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)-n}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n}}=\ldots=\infty$$

(степень числ. > степени знам.)

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}\right)=[\infty-\infty]=$ аналог. $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}=0$

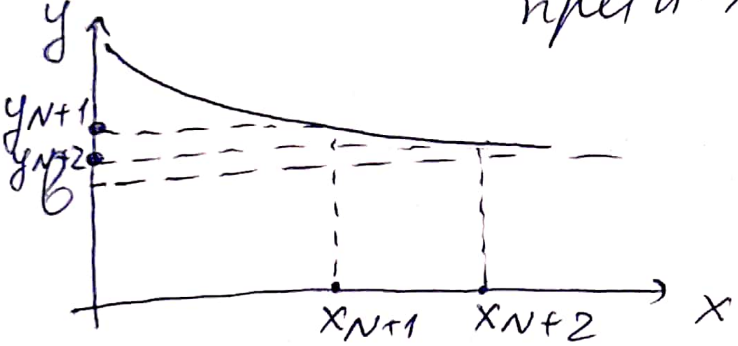
$\boxed{\text{Д/З } \underline{\text{IV}} \quad №1.238,\ 1.239 \ \text{Подробно!}}$

Предел функции

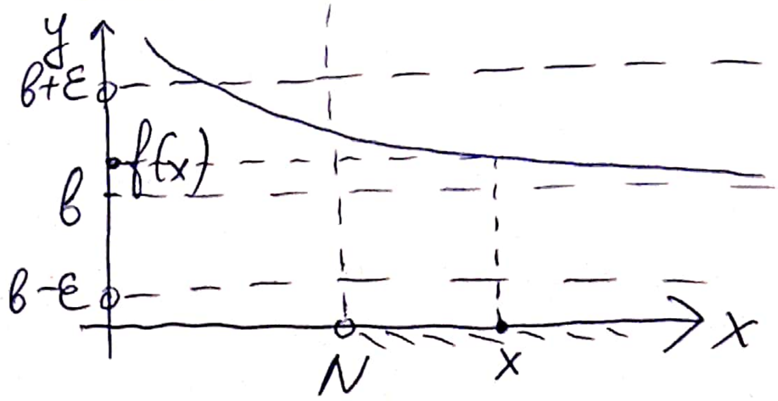
Опр Пусть ф-я определена на нек. открытом луче $(a;+\infty)$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=b},$$ если

по Гейне: $\forall\{x_n\},\ x_n\in D(f)$,
$x_n\to+\infty$ при $n\to\infty \Rightarrow y_n=f(x_n)\to b$ при $n\to\infty$



на языке окрестностей: $\forall\, U_\varepsilon(b)$
$\exists\,(N;+\infty)$:
$\forall x\in D(f)$
$x\in(N;+\infty)\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(b)$



по Коши: $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0$:
$\forall x\in D(f)$
$x>N\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$.

Неопределённость $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

№ 1.282.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^4}+x^3-\cancel{2x^4}+x}{4x^3+2x^2-2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{4x^3+2x^2-2x-1}\overset{\text{аналогично}}{=}\ldots=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Д/З } \overline{\text{V}}: & \text{№ } 1.283 \\ & 1.286 \end{array}}$$

Неопределённость $[\infty - \infty]$.

№1.301

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-7x+4}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-7x+4}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-7x+4}^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-7x+4}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{4x^2}-7x+4-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2-7x+4}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x+4}{\sqrt{4x^2-7x+4}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-7+\frac{4}{x}^{\to 0}}{\sqrt{4\underbrace{-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}}_{\to 0}}+2}=$$

$$=\frac{-7}{\sqrt{4}+2}=$$

$$=\frac{-7}{4}$$

$\boxed{\text{Д/З №1.299, 1.302}}$