Занятие 6

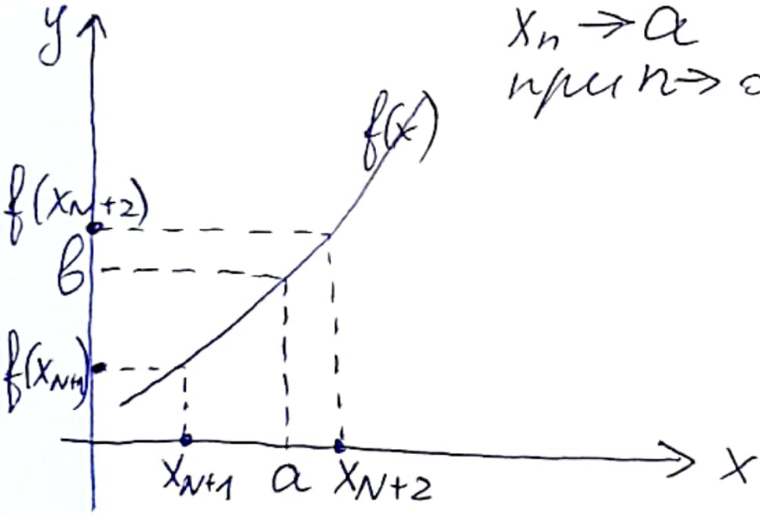
Предел функции при $x \to a$.

Опр Пусть $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, если

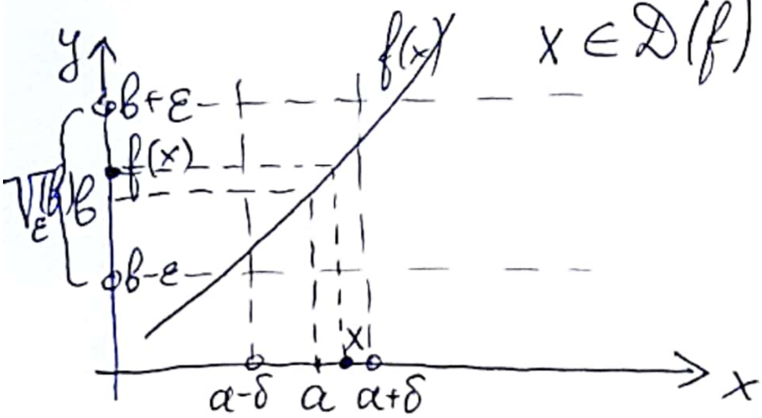
по Гейне: $\forall \{x_n\}$, $x_n \in D(f)$ и $x_n \neq a$:

$x_n \to a$ при $n \to \infty$ $\Rightarrow$ $y_n = f(x_n) \to b$ при $n \to \infty$



на языке окрестностей: $\forall V_\varepsilon(b)\ \exists U_\delta(a)$:

$x \in D(f)$ и $x \in \dot{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b)$



по Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall x \in D(f)$

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Надо уметь давать определения для

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\ (-\infty)(\infty)$$

<u>Теоремы о пределах</u> те же

<u>Следствие</u>. $\lim_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$

№ 1.272

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2}{3x^2-5x+1} = \frac{\lim_{x\to 0}(x^2-2)}{\lim_{x\to 0}(3x^2-5x+1)} = \frac{0^2-2}{3\cdot 0^2-5\cdot 0+1} = -2$$

Д/З I № 1.273, 1.275

<u>Неопределённость</u> $\left[\frac{0}{0}\right]$.

№ 1.277.   Д/З II № 1.281

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to 1}(x-1)}{\lim_{x\to 1}x(x+1)} = \frac{1-1}{1(1+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

Почему можно сократить дробь?

Потому что $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ определена в проколотой окрестности т. 1

(кроме того 0 и $1 \notin D(f)$).

Утверждение (пока без док-ва)

Для всех элементарных ф-ций $f(x)$

$\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x\to a} g(x))$, если $\lim\limits_{x\to a} g(x) \in D f$.

Следствие

1) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

2) $\lim\limits_{x\to a} (g(x))^n = (\lim\limits_{x\to a} g(x))^n$

3) $\lim\limits_{x\to a} \sin g(x) = \sin(\lim\limits_{x\to a} g(x))$

и т.д.

4) $\lim\limits_{x\to a} h^{g(x)} = h^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

5) $\lim\limits_{x\to a} \log_h g(x) = \log_h(\lim\limits_{x\to a} g(x))$

Аналог. для сумм, произв. и частного элем. ф-ций (если знам. $\neq 0$).

№1.289. $\boxed{\text{Д/З III: №1.288}}$

$$\lim_{x\to 10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 10} \frac{(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}+3)}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 10} \frac{\sqrt{x-1}^2 - 3^2}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} = \lim_{x\to 10} \frac{\cancel{x-10}}{\cancel{(x-10)}(\sqrt{x-1}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 10} \frac{1}{\sqrt{x-1}+3} = \frac{1}{\sqrt{10-1}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

№1.292

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{I сп.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}^{\,3}-1)}{\sqrt{x}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\,\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}^{\,2}+\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}}=$$

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}\,(\sqrt{x}^{\,2}+\sqrt{x}+1)=\sqrt{1}(\sqrt{1}^{\,2}+\sqrt{1}+1)=3$$

II сп.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\text{Пусть } \sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2,\ x^2=t^4\\ x\to 1 \Rightarrow t\to 1\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^4-t}{t-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{t\to 1}\frac{t(t^3-1)}{t-1}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t\cancel{(t-1)}(t^2+t+1)}{\cancel{t-1}}=\lim_{t\to 1}t(t^2+t+1)=$$

$$=1(1^2+1+1)=3.$$

№1.298 $\boxed{\text{Д/З IV № 1.297}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})(\sqrt[3]{2+x}^2+\sqrt[3]{2+x}\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{2-x}^2)}{(\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})(\sqrt[3]{2+x}^2+\sqrt[3]{2+x}\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{2-x}^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(\sqrt{2+x}^2-\sqrt{2-x}^2)}(\sqrt[3]{2+x}^2+\sqrt[3]{2+x}\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{2-x}^2)}{\cancel{(\sqrt[3]{2+x}^3-\sqrt[3]{2-x}^3)}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2+x}^2+\sqrt[3]{2+x}\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{2-x}^2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2+0}^2+\sqrt[3]{2+0}\sqrt[3]{2-0}+\sqrt[3]{2-0}^2}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}^2}{2\sqrt{2}}\ominus$$

Можно преобразовать, используя

$$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{1}{6}})^2$$
$$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{1}{6}})^3$$

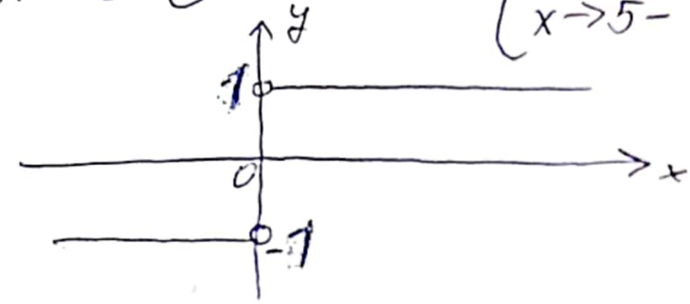
$$\ominus\ \frac{3}{2}\frac{((2^{\frac{1}{6}})^2)^2}{(2^{\frac{1}{6}})^3}=\frac{3}{2}\cdot(2^{\frac{1}{6}})^{4-3}=\frac{3}{2}\cdot 2^{\frac{1}{6}}=$$

$$=\frac{3\cdot\sqrt[6]{2}}{2}.$$

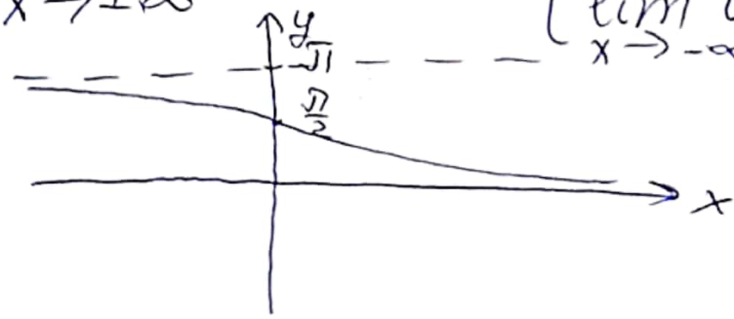
Односторонние пределы

Примеры.

1) $$\lim_{x\to 5\pm 0}\frac{|x-5|}{x-5}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 5+}\dfrac{\cancel{x-5}}{\cancel{x-5}}=\lim\limits_{x\to 5+0}1=1\\[2ex] \lim\limits_{x\to 5-}\dfrac{-\cancel{(x-5)}^{-1}}{\cancel{x-5}}=\lim\limits_{x\to 5-0}(-1)=-1\end{cases}$$



2) $$\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arcctg}x=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg}x=0\\[1ex] \lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}x=\pi\end{cases}$$



Д/З $\overline{\text{V}}$ №1.338, 1.339, 1.341
1.342, 1.345.