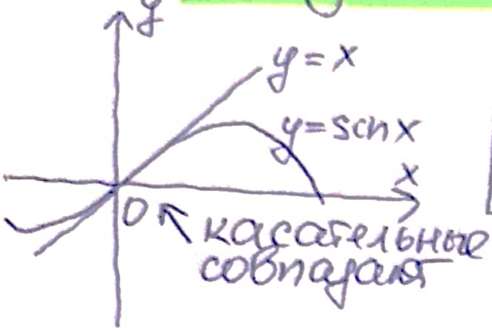
Занятие 7

I замечательный предел



$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

Это неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$.

<u>Теорема</u>. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$,

если $u(x)\to 0$ при $x\to a$.

Примеры

① $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin kx}{kx}\cdot k\right)=k\lim_{x\to 0}\frac{\sin \overset{u(x)}{kx}}{\underset{\substack{u(x)\to 0\\ \text{при } x\to 0}}{kx}}=$$
$$=k\cdot 1=k$$

$\boxed{\text{Д/З I № 1.303}}$

② $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin \ell x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin kx}{kx}\cdot k}{\frac{\sin \ell x}{\ell x}\cdot \ell}=\frac{k}{\ell}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin kx}{kx}}{\frac{\sin \ell x}{\ell x}}=$$
$$=\frac{k}{\ell}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin \ell x}{\ell x}}=\frac{k\cdot 1}{\ell\cdot 1}=\frac{k}{\ell}$$

③ $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\cos kx\cdot x}=\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}}^{\exists\text{ конечн. предел}}\;\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}}^{\exists\text{ конечн. предел}}=$$
$$=\frac{1}{\cos\left(\lim\limits_{x\to 0}kx\right)}\cdot k=\frac{1}{\cos 0}\cdot k=1\cdot k=k$$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{\operatorname{tg} lx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{tg} kx}{kx}\cdot k}{\frac{\operatorname{tg} lx}{lx}\cdot l}=$ как №② $=\frac{k}{l}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 nx}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin nx}{x}\cdot\frac{\sin nx}{x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{x}=n\cdot n=n^2$

⑥ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}}{x^2}=$

$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\ \boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

$\boxed{\text{Д/З II № 1.307}}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}=\cancel{2}\cdot\frac{m}{\cancel{2}}\cdot\frac{m}{2}=\frac{m^2}{2}$

⑦ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos kx-\cos lx}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{kx+lx}{2}\sin\frac{kx-lx}{2}}{x^2}=$

$=-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{k+l}{2}x\cdot\sin\frac{k-l}{2}x}{x^2}=-\cancel{2}\,\frac{k+l}{\cancel{2}}\cdot\frac{k-l}{2}=\frac{l^2-k^2}{2}$

$\boxed{\text{Д/З III № 1.308}}$

⑧ $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{tg} x}{x}}=$

$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}}=\frac{1}{1}=1$

$\boxed{\text{Д/З IV № 1.305}}$

Выписать $\boxed{\sin\alpha\pm\sin\beta \text{ и } \cos\alpha\pm\cos\beta}$.

№1.304.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\right)\overset{\text{см. №2}}{=}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}}_{\exists\text{ конечн. предел}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\cos 3x}_{\exists\text{ конечн. предел}}=\frac{7}{3}\cos 0=\frac{7}{3}\cdot 1=0$$

уже делали, см №3 в конце

№1.312.

Замена переменных

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x=[0\cdot\infty]=\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow\\ \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-t;\\ x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow t\to 0\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}t\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\lim_{t\to 0}t\operatorname{ctg}t=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}t}\overset{\text{см №8}}{=}1$$

$$\boxed{\text{Д/З V}\quad №*\ \lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$$

⑨ $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\overset{\text{см №6}}{\frac{1}{2}}\frac{1}{\lim_{x\to 0}\cos x}=$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Д/З VI}\quad №1.314}$

$\boxed{\text{Д/З VII}\quad №1.311,\ 1.313}$

№1.310

$$\lim_{x\to\alpha}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2\alpha}\cdot\sin\frac{x-\alpha}{2}\right)=[\infty\cdot 0]=$$

Замена переменных:

$$=\left[\begin{array}{l} x-\alpha=t \Rightarrow x=t+\alpha \\ x\to\alpha \Rightarrow t\to 0 \\ \sin\frac{x-\alpha}{2}=\sin\frac{t}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\pi(t+\alpha)}{2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2\alpha}+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2\alpha}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(-\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2\alpha}\right)\sin\frac{t}{2}=[\infty\cdot 0]=$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\alpha}t}\overset{\text{см №1.304}}{=}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2\alpha}}=-\frac{\alpha}{\pi}$$

II замечательный предел

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \\ \hline \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \end{array}}$$

Это неопределённость $[1^{\infty}]$

Теорема $\lim\limits_{x\to a}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e$, если $u(x)\to 0$ при $x\to a$.

Примеры

① $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=[1^{\infty}]=\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{kx}\cdot k}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right)^{k}=\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right)^{k}=e^{k}$

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=[1^{\infty}]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}\cdot k}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^{k}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^{k}=e^{k}$

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=[1^{\infty}]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\left(\frac{-1}{x}\right)\right)^{x}\overset{\text{см.②}}{=}$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}$

Утверждение о предельном переходе для показательно-степенной ф-ции.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)},$$ если пределы существуют.

№1.320.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+5}{x-2}\right)^{2x+1} =$$

представили как $1+u(x)$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\Big(1+\underbrace{\frac{5}{x-2}}_{u(x)}\Big)^{\underbrace{\frac{x-2}{5}}_{\frac{1}{u(x)}}\cdot\frac{5}{x-2}(2x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right)^{\frac{10x+5}{x-2}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x+5}{x-2}} = e^{10}$$

$$\boxed{\text{Д/З VIII №1.321}}$$

№1.322.

представили как $1+u(x)$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\Big(1\underbrace{-2\sin^2\frac{x}{2}}_{u(x)}\Big)^{\underbrace{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}_{\frac{1}{u(x)}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}} = e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}\cdot 4}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = e^{-\frac{1}{2}\cdot 1^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\text{ДЗ IX №1.323}}$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1$$

№1.324.

$$\lim_{x\to\infty}x(\ln(2+x)-\ln x)=[\infty(\infty-\infty)]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{2+x}{x}=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2+x}{x}\right)^{x}=$$

$$=\ln\Big(\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{2+x}{x}\right)^{x}}_{[1^\infty]}\Big)=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}\right)=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2}=\ln e^{2}=2\ln e=2$$

$$\boxed{\text{ДЗ } \underline{X} \quad №1.325}$$

№ 1.318 замена перем.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{l} t=a^x-1\Rightarrow a^x=t+1 \\ \qquad x=\log_a(1+t)= \\ \qquad =\dfrac{\ln(1+t)}{\ln a}; \\ x\to 0\Rightarrow t\to 0 \end{array}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}}=\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=$$

$$=\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\ln a\cdot\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}=$$

↑ уже делали (см. пример перед № 1.324)

$$=\ln a\cdot\frac{1}{1}=\ln a$$

$$\boxed{\text{Д/З XI} \quad \text{№ } 1.327,\ 1.326.}$$