Занятие 8

Эквивалентные бесконечно малые функции.

<u>Опр.</u> Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$

(т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$).

и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Тогда $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ наз. <u>эквивалентными беск. малыми ф-ми при $x \to x_0$.</u>

Таблица эквив. ф-ий	Следствия
$\sin x \sim x$ при $x \to 0$	$\sin u(x) \sim u(x)$ при $x \to x_0$, если $u(x) \to 0$ при $x \to x_0$
$\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$	$\arcsin u(x) \sim u(x)$ при $x \to x_0$, если $u(x) \to 0$ при $x \to x_0$
$\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$	$\operatorname{tg} u(x) \sim u(x)$ при $x \to x_0$ если —"—
$\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$	$\operatorname{arctg} u(x) \sim u(x)$ при $x \to x_0$ если —"—

! Нарисуйте графики $y = \sin x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = x$ в окрестности т. $(0,0)$

$e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$ | $e^{u(x)} - 1 \sim u(x)$ при $x \to x_0$, если —"—

$a^x - 1 \sim x \ln a$ при $x \to 0$ | $a^{u(x)} - 1 \sim u(x) \ln a$ при $x \to x_0$, если —"—

$\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$ | $\ln(1+u(x)) \sim u(x)$ при $x \to x_0$, если —"—

$\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$ при $x \to 0$ | $\log_a(1+u(x)) \sim \dfrac{u(x)}{\ln a}$ при $x \to x_0$, если —"—

! Нарисуйте графики $y = x$ и $y = e^x - 1$, $y = \ln(1+x)$ в окр-ти т. $(0,0)$

$\cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$ | $\cos u(x) - 1 \sim -\dfrac{u^2(x)}{2}$ при $x \to x_0$, если —"—

! Нарисуйте графики $y = -\frac{1}{2}x^2$ и $y = \cos x - 1$ в окр. т. $(0,0)$

$(1+x)^a - 1 \sim ax$ при $x \to 0$ | $(1+u(x))^a - 1 \sim a \cdot u(x)$ при $x \to x_0$, если —"—

Примеры:

$(1+x)^2 - 1 \sim 2x$ при $x \to 0$

$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$ при $x \to 0$

! Нарис. графику $y = (1+x)^2$ и $y = 2x$, $y = \sqrt{1+x} - 1$ и $y = \frac{1}{2}x$ в окр. $(0,0)$.

Использование эквивалентных б. м. ф. при вычислении пределов в частных и произведениях.

Т-МА. Пусть $\alpha(x), \beta(x), \alpha_1(x), \beta_1(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$,

$\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$,

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)\alpha(x), \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)}, \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Тогда выполняются равенства

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\alpha(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)\alpha_1(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\alpha_1(x)},$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Примеры ① $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 10x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$\sin 10x \sim 10x$ при $x \to 0$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{10\cancel{x}}{\cancel{x}} = 10.$

Этот метод легче исп-я I замечат. предела

② $$\lim_{x\to 0}\frac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg}2x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\frac{9}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(-2x))}{\operatorname{arctg}2x} \;(=)$$

$\ln(1+(-2x))\sim -2x$ при $x\to 0$

$\operatorname{arctg}2x\sim 2x$ при $x\to 0$

$$(=)\;\frac{9}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{-2x}^{\,-1}}{\cancel{2x}}=\frac{9}{4}\cdot(-1)=-\frac{9}{4}$$

③ $$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\sin(2x-3)}{tg(4x-6)}=\left[\frac{0}{0}\right] (=)$$

$\sin(2x-3)\sim 2x-3$ при $x\to\frac{3}{2}$

$tg(4x-6)\sim 4x-6$ при $x\to\frac{3}{2}$

$$(=)\;\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{2x-3}{4x-6}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\cancel{2x-3}}{2\cancel{(2x-3)}}=\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

④ $$\lim_{x\to 0}\frac{5^{\arcsin(x^2)}-1}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right] (=)$$

$5^{\arcsin(x^2)}-1\sim \arcsin(x^2)\cdot\ln 5$ при $x\to 0$

$$(=)\;\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^2)\cdot\ln 5}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\cdot\ln 5}{\cancel{x^2}}=\ln 5.$$

$\arcsin(x^2)\sim x^2$ при $x\to 0$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{e^{x^2}-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$\ln(\cos x) = \ln(1+(\cos x - 1)) \sim \cos x - 1$ при $x \to 0$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{e^{x^2}-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{\cancel{x^2}}{2}}{\cancel{x^2}} = -\dfrac{1}{2}$

$\cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$

$e^{x^2} - 1 \sim x^2$ при $x \to 0$

ДЗ. $\left.\begin{array}{l} \text{№ } 1.304 \\ \text{№ } 1.306 \\ \text{№ } 1.313 \\ \text{№ } 1.315 \end{array}\right\}$ исп. экв. ф-ции

№1.318

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{matrix}a^x-1\sim x\ln a\\ \text{при } x\to 0\end{matrix}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\ln a}{\cancel{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln a=\ln a$$

№1.328.

$$\lim_{x\to a}\frac{\log_a x-1}{x-a}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{matrix}t=x-a\Rightarrow x=a+t\\ x\to a\Rightarrow t\to 0\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(a+t)-1}{t}=\left[\begin{matrix}\log_a(a+t)=\log_a a+\log_a(1+\frac{t}{a})=\\ =1+\log_a(1+\frac{t}{a})\end{matrix}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{t}{a})}{t}=\left[\log_a(1+\frac{t}{a})\sim\frac{t}{a\ln a}\text{ при } t\to 0\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{a\ln a}}{t}=\frac{1}{a\ln a}$$

Д/З II: №. 1.329, 1.331.

№1.330

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = [1^\infty] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\sin x}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}} = \left[\begin{matrix}\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2} \\ \sin x\sim x\end{matrix}\ \text{при } x\to 0\right] =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x}} = e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x} = e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} = e^0 = 1$$

II зам. предел

№1.332

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x+\sin x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x+\sin x-1}\cdot\frac{\cos x+\sin x-1}{x}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x+\sin x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x+\sin x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+\sin x-1}{x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}} = \left[\begin{matrix}\sin x\sim x \\ \cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}\end{matrix}\ \text{при } x\to 0\right] =$$

II зам. предел

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x}} = e^{1-\frac{1}{2}\cdot 0} = e^1 = e$$

$\boxed{\text{Д/З II. №1.333}}$

№1.366

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\lg x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{matrix}t=x-1\Rightarrow x=1+t\\ x\to 1\Rightarrow t\to 0\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{\log_{10}(1+t)}=\left[\begin{matrix}\log_{10}(1+t)\sim\frac{t}{\ln 10}\\ \text{при } t\to 0\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{\frac{t}{\ln 10}}=-\ln 10\lim_{t\to 0}1=-\ln 10.$$

№1.368

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left[\begin{matrix}\arcsin(1-2x)\sim 1-2x\\ \text{при } x\to\frac{1}{2}\text{, т.к. } 1-2x\to 0 \text{ при } x\to\frac{1}{2}\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cancel{(2x-1)}(2x+1)}{\underbrace{\cancel{1-2x}}_{-1}}=-\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x+1)=$$

$$=-\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}+1\right)=-2$$

$$\boxed{\text{Д/З IV № 1.367, 1.369}}$$