① Показать, что каждая из функций $f(x) = \sin \pi x$ и $g(x) = \log_3 \frac{x}{5}$ является б. б. или б. м. при $x \to 5$.

Решение.

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \sin \pi x = \sin(\lim_{x\to 5} \pi x) = \sin 5\pi = 0$$

$$\lim_{x\to 5} g(x) = \lim_{x\to 5} \log_3 \frac{x}{5} = \log_3(\lim_{x\to 5} \frac{x}{5}) = \log_3 \frac{5}{5} = \log_3 1 = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ и $g(x)$ яв. б. м. ф. при $x \to 5$.

② Для каждой функции $f(x)$ и $g(x)$ записать главную часть (экв. ей функцию вида $C\cdot(x-x_0)^\alpha$ при $x \to x_0$ или $C\cdot x^\alpha$ при $x \to \infty$), указать их порядки малости (или роста)

Решение.

Будем искать главную часть в виде $C(x-x_0)^\alpha$. Найдём α и C:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^{\alpha_1}} = C_1 \neq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^{\alpha_2}} = C_2 \neq 0$$

$\Rightarrow f(x) \sim C_1(x-x_0)^{\alpha_1}$ при $x \to x_0$ и $g(x) \sim C_2(x-x_0)^{\alpha_2}$ при $x \to x_0$

Сканировано с CamScanner

$$\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{(x-5)^{\alpha_1}}=\lim_{x\to5}\frac{\sin\pi x}{(x-5)^{\alpha_1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{matrix}t=x-5\Rightarrow x=t+5\\ x\to5\Rightarrow t\to0\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\pi(t+5)}{t^{\alpha_1}}=\left[\sin(\pi t+5\pi)\overset{T=2\pi}{=}\sin(\pi t+\pi)=-\sin\pi t\right]=$$

$$=-\lim_{t\to0}\frac{\sin\pi t}{t^{\alpha_1}}=\left[\sin\pi t\sim\pi t \text{ при } t\to0\right]=$$

$$=-\lim_{t\to0}\frac{\pi t}{t^{\alpha_1}}=\left[\alpha_1=1\right]=-\lim_{t\to0}\frac{\pi \cancel{t}}{\cancel{t}}=-\lim_{t\to0}\pi=-\pi\neq0$$

$\Rightarrow f(x)\sim-\pi(x-5)$ при $x\to5$; гл. часть $f(x)$ равна $-\pi(x-5)$ при $x\to5$; пор. малости $=1$ для $f(x)$ отн. $x-5$.

$$\frac{x}{5}=\frac{t+5}{5}=\frac{t}{5}+1$$

$$\lim_{x\to5}\frac{g(x)}{(x-5)^{\alpha_2}}=\lim_{x\to5}\frac{\log_3\frac{x}{5}}{(x-5)^{\alpha_2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{matrix}t=x-5\Rightarrow x=t+5\\ x\to5\Rightarrow t\to0\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\log_3(1+\frac{t}{5})}{t^{\alpha_2}}=\left[\log_3\left(1+\frac{t}{5}\right)\sim\frac{\frac{t}{5}}{\ln3}\text{ при } t\to0\right]=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{5\ln3\, t^{\alpha_2}}=\left[\alpha_2=1\right]=\frac{1}{5\ln3}\lim_{t\to0}\frac{\cancel{t}^{\,1}}{\cancel{t}_{\,1}}=\frac{1}{5\ln3}\neq0$$

$\Rightarrow g(x)\sim\frac{1}{5\ln3}\cdot(x-5)$ при $x\to5$; гл. часть $g(x)$ равна $\frac{x-5}{5\ln3}$ при $x\to5$; пор. малости $=1$. для $g(x)$ отн. $x-5$.

Сканировано с CamScanner

③ Сравните $f(x)$ и $g(x)$, если это возможно при $x \to 5$.

Решение

$$\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\begin{matrix} f(x) \sim -\pi(x-5) \\ g(x) \sim \dfrac{x-5}{5\ln 3} \end{matrix} \quad \text{при } x\to5\right] =$$

$$= \lim_{x\to5}\frac{-\pi\cancel{(x-5)}}{\frac{\cancel{x-5}}{5\ln3}} = -\lim_{x\to5} 5\pi\ln3 = -5\pi\ln3 \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \underbrace{-5\pi\ln3}_{C\neq0}\cdot g(x) \text{ при } x\to5;$$

функции $f(x)$ и $g(x)$ явл. б.м.ф. одного порядка малости при $x\to5$

Ответ: ① ...

② ...

③ ...

Сканировано с CamScanner