Занятие 9, часть 1

Сравнение беск. малых и беск. больших функций

Опр. Пусть

$\alpha(x), \beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \left(\begin{matrix}\text{или}\\ = \infty\end{matrix}\right)$

$A(x), B(x)$ – б.б.ф. при $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \infty \left(\begin{matrix}\text{или}\\ = 0\end{matrix}\right)$

Тогда

$\alpha(x)$ наз. б.м.ф. более высокого (или низкого) пор. малости, чем $\beta(x)$ при $x \to x_0$

$A(x)$ наз. б.б.ф. более высокого (или низкого) пор. роста, чем $B(x)$ при $x \to x_0$

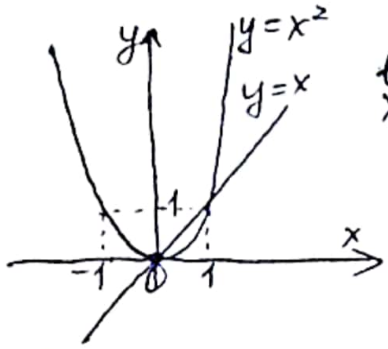
Обозн. $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to x_0$.

Пример.

$\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x$ при $x \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$

Пишут: $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$



$A(x) = x^2$, $B(x) = x$ при $x \to \infty$

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \infty$

След., x^2 явл. при $x \to 0$ более высокого пор. малости, чем x, а при $x \to \infty$ более высокого пор. роста, чем x.

Пусть $\exists\ r>0$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^r(x)}=C\neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B^r(x)}=C\neq 0$$

Тогда

$\alpha(x)$ наз. б.м.ф. порядка r относит б.м.ф. $\beta(x)$ при $x\to x_0$

$A(x)$ наз. б.б.ф. порядка r относит б.б.ф. $B(x)$ при $x\to x_0$

В этом случае

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{C\beta^r(x)}=1$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{C\cdot B^r(x)}=1$$

т.е.

$\alpha(x)\sim C\beta^r(x)$ при $x\to x_0$

$A(x)\sim C\cdot B^r(x)$ при $x\to x_0$

(хотя экв-ть б.б.ф. мы не вводили)

При $r=1$

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ наз. б.м.ф. одного пор. малости при $x\to x_0$

$A(x)$ и $B(x)$ наз. б.б.ф. одного пор. роста при $x\to x_0$

Пример.

x^2 явл. б.м.ф. порядка $r=2$ отн. б.м.ф. x при $x\to 0$

x^2 явл. б.б.ф. порядка $r=2$ отн. б.б.ф. x при $x\to\infty$

Свойство. $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$

$$\Updownarrow$$

$f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \to x_0$ и $g(x) = f(x) + o(f(x))$ при $x \to x_0$

$g(x)$ — главная часть $f(x)$ при $x \to x_0$; $f(x)$ — главная часть $g(x)$ при $x \to x_0$

Мы будем искать гл. части функций специального вида:

для беск. малых $f(x)$ при $x \to x_0$	для беск. больших $f(x)$ при $x \to x_0$
будем искать главную часть в виде	
$g(x) = C \cdot (x - x_0)^{\tau}$;	$g(x) = \dfrac{C}{(x-x_0)^{\tau}}$, т.е. $C \cdot \dfrac{1}{(x-x_0)^{\tau}}$
для беск. малых $f(x)$ при $x \to \infty$	для беск. больших $f(x)$ при $x \to \infty$
будем искать главную часть в виде	
$g(x) = \dfrac{C}{x^{\tau}}$, т.е. $C \cdot \dfrac{1}{x^{\tau}}$	Cx^{τ}.

Нахождение порядка малости одной б.м. функции относит. другой б.м.ф. Выделение главной части.

№1.349

Определить порядок малости функции $\alpha(x)=\frac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$ относит. функции $\beta(x)=x$ при $x\to 0$. Найти главную часть ф-ции $\alpha(x)$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot\cancel{\sqrt{x^3}}^{\sqrt{x}}}{(1-x)\cancel{x}}=3\cdot\frac{\sqrt{0}}{1-0}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\alpha(x)$ - б.м.ф. более высокого порядка малости, чем б.м.ф. $\beta(x)$ при $x\to 0$.

2) Найдём $r>0$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta^r(x)}=C\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3\sqrt{x^3}}{1-x}}{x^r}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{(1-x)x^r}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^r}=$

$=\left[r=\frac{3}{2}\right]=3\cdot\frac{1}{1-0}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{x^{\frac{3}{2}}}}{\cancel{x^{\frac{3}{2}}}}=3\cdot 1\cdot 1=3$

След., $r=\frac{3}{2}$ и $\alpha(x)\sim 3\beta^{\frac{3}{2}}(x)$ при $x\to 0$,

т.е. $\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{1-x}\sim 3x^{\frac{3}{2}}$ при $x\to 0$

Главной частью б.м.ф. $\alpha(x)$ явл. б.м.ф. $3\beta^{\frac{3}{2}}(x)=3x^{\frac{3}{2}}$ при $x\to 0$.

Ответ: $r=\frac{3}{2}$; гл. часть $=3x^{\frac{3}{2}}$ при $x\to 0$

№1.351.

$\alpha(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$, $\beta(x)=x$; $x\to 0$

Задание то же.

Решение

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=$

$=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left[1-\cos x\underset{\text{при } x\to 0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x^2}/2}{\cancel{x^2}}=$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}1=\dfrac{1}{2}\neq 0$

$\Rightarrow \alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. одного порядка малости при $x\to 0 \Rightarrow r=1$.

$\alpha(x)\sim\dfrac{1}{2}\beta(x)$ при $x\to 0$,

т.е. $\dfrac{1-\cos x}{x}\sim\dfrac{1}{2}x$ при $x\to 0$.

Главной частью б.м.ф. $\alpha(x)$ явл. б.м.ф. $\dfrac{1}{2}\beta(x)=\dfrac{1}{2}x$ при $x\to 0$.

Ответ: $r=1$; гл. часть $=\dfrac{1}{2}x$ при $x\to 0$.

$\boxed{\text{Д/З I №1.350, 1.352}}$

№1.353

$\alpha(x)=\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$, $\beta(x)=x$; $x\to 0$

Задание то же.

Решение

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$=\left[\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})\sim(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})\text{ при } x\to 0\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}^2-\sqrt{2}^2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\cancel{2}-\cancel{2}}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{0+2}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\neq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б.м.ф. одного порядка малости при $x\to 0$ $\Rightarrow r=1$.

$\alpha(x)\sim\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\beta(x)$ при $x\to 0$,

т.е. $\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})\sim\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x$ при $x\to 0$.

Гл. частью б.м.ф. $\alpha(x)$ явл. б.м.ф. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\beta(x)$ при $x\to 0$.

ДЗ II №1.354

Ответ: $r=1$; гл. часть $=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x$ при $x\to 0$

№ 1.355. Д13III № 1.356

$\alpha(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$, $\beta(x)=x$; $x\to 0$.

Решение

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$=\left[\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1=(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}\text{ при }x\to 0\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}}{x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\infty$

$\Rightarrow$ $\alpha(x)$ – б.м.ф. более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$ при $x\to 0$

2) Найдём $r>0$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta^r(x)}=C\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta^r(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1}{x^r}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$=\left[\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1\sim\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}\text{ при }x\to 0\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}}{x^r}=\left[r=\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{\sqrt[3]{x}}}{\cancel{x^{\frac{1}{3}}}}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}\neq 0$

След., $r=\frac{1}{3}$ и $\alpha(x)\sim\frac{1}{3}\beta^{\frac{1}{3}}(x)$ при $x\to 0$,

т.е. $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1\sim\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$ при $x\to 0$

Гл. частью б.м.ф. $\alpha(x)$ яв. б.м.ф. $\frac{1}{3}\beta^{\frac{1}{3}}(x)$ при $x\to 0$. Ответ: $r=\frac{1}{3}$; гл. часть $=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$ при $x\to 0$.