Нахождение порядка роста одной б.б.ф. относит. другой б.б.ф. Выделение главной части.

№1.372

Определить порядок роста ф-ции $A(x)=x^3+150x+10$ относит. ф-ции $B(x)=x$ при $x\to\infty$. Найти главную часть $A(x)$ при $x\to\infty$

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+150x+10}{x}=\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow A(x)$ – б.б.ф. более высокого порядка роста, чем б.б.ф. $B(x)$ при $x\to\infty$

2) Найдём $r>0$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B^r(x)}=C\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+150x+10}{x^r}=[r=3]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+150x+10}{x^3}=1$

$\Rightarrow$ $r=3$ и $A(x)\sim B^3(x)$ при $x\to\infty$,

т.е. $x^3+150x+10\sim x^3$ при $x\to\infty$.

Главной частью б.б.ф. $A(x)$ явл. б.б.ф. $B^3(x)$ при $x\to\infty$.

Ответ: $r=3$; Гл. часть $=x^3$ при $x\to\infty$

№1.376.

$A(x) = \dfrac{5x^6}{3x^4+x^3+2}$, $B(x) = x$; $x \to \infty$

Задание то же.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^6}{x(3x^4+x^3+2)} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow A(x)$ – б.б.ф. более высокого пор. роста, чем б.б.ф. $B(x)$ при $x\to\infty$.

2) Найдём $r>0$: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{A(x)}{B^r(x)} = C \neq 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^6}{x^r(3x^4+x^3+2)} = [r=2] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5\cancel{x^6}^{\,4}}{\cancel{x^2}(3x^4+x^3+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4}{3x^4+x^3+2} = \dfrac{5}{3} \neq 0$

$\Rightarrow r=2$ и $A(x) \sim \dfrac{5}{3}B^2(x)$ при $x\to\infty$,

т.е. $\dfrac{5x^6}{3x^4+x^3+2} \sim \dfrac{5}{3}x^2$ при $x\to\infty$.

Главной частью б.б.ф. $A(x)$ явл. б.б.ф. $\dfrac{5}{3}B^2(x)$ при $x\to\infty$.

Ответ: $r=2$; гл. часть $= \dfrac{5}{3}x^2$ при $x\to\infty$

№ 1.374.

$A(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$; $B(x)=x$; $x\to\infty$

Задание то же.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(x)$ – б.б.ф. более низкого пор. роста, чем б.б.ф. $B(x)$ при $x\to\infty$.

2) Найдём $r>0$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B^r(x)}=C\neq 0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^r}=\left[r=\frac{1}{2}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\sqrt{1}=1$

$\Rightarrow r=\frac{1}{2}$ и $A(x)\sim B^{\frac{1}{2}}(x)$ при $x\to\infty$,

т.е. $\sqrt{x+\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}$ при $x\to\infty$

Гл. частью б.б.ф. $A(x)$ явл. б.б.ф. $B^{\frac{1}{2}}(x)$ при $x\to\infty$.

Ответ: $r=\frac{1}{2}$; гл. часть $=\sqrt{x}$ при $x\to\infty$.

$\boxed{\text{ДЗ IV. № 1.373, 1.375, 1.377.}}$

Главная часть суммы

① конечного числа б.м.ф. разного порядка
Это слагаемое самого низкого порядка малости по сравнению с каждым из слагаемых.

Пример.

$\alpha(x) = 8x^3 + 7x^2 + \boxed{3x}$ при $x \to 0$

Возьмём $\beta(x) = 3x$. Тогда $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to 0$

$\left(\text{т.к. } \lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{8x^3+7x^2+3x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{8}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1\right) = \frac{8}{3}\cdot 0^2 + \frac{7}{3}\cdot 0 + 1 = 1\right)$. След., $\beta(x) \overset{=3x}{-}$ гл. часть $\alpha(x)$ при $x \to 0$.

② конечного числа б.б.ф. разного порядка
Это слагаемое самого высокого порядка роста по сравнению с каждым из слагаемых.

Пример.

$\alpha(x) = \boxed{8x^3} + 7x^2 + 3x$ при $x \to \infty$

Возьмём $\beta(x) = 8x^3$. Тогда $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to \infty$

$\left(\text{т.к. } \lim\limits_{x\to \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{8x^3+7x^2+3x}{8x^3} = \lim\limits_{x\to \infty}\left(1 + \frac{7}{8x} + \frac{3}{8x^2}\right) = 1\right)$. След., $\underset{=8x^3}{\beta(x)}$ – гл. часть $\alpha(x)$ при $x \to \infty$.

Краткое решение №1.372.

1) $A(x)=x^3+150x+10$ – сумма слагаемых разного порядка роста при $x\to\infty$.
$A(x)\sim x^3$ при $x\to\infty$.
След., x^3 – главная часть $A(x)$ при $x\to\infty$

2) $\left.\begin{array}{l} A(x)\sim x^3 \text{ при } x\to\infty \\ B(x)=x \end{array}\right\} \Rightarrow$ $A(x)$ – б.б.ф. более высокого пор. роста, чем б.б.ф. $B(x)$ при $x\to\infty$

3) Найдём r.
$r=3$, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B^3(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+150x+10}{x^3}=$

$=[x^3+150x+10\sim x^3 \text{ при } x\to\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}=1=C\neq 0$

Другое решение № 1.376.

1) $A(x)=\dfrac{5x^6}{3x^4+x^3+2} \sim \dfrac{5}{3}x^2$ при $x\to\infty$,

т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{A(x)}{\frac{5}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{5}x^{\cancel{6}\,4}\cdot 3}{(3x^4+x^3+2)\cdot\cancel{5}\cancel{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4}{3x^4+x^3+2}=[3x^4+x^3+2\sim 3x^4$ при $x\to\infty]=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{3x^4}}{\cancel{3x^4}}=1.$

След, $\dfrac{5}{3}x^2$ – главная часть $A(x)$ при $x\to\infty$

2) $\left.\begin{array}{l} A(x)\sim\dfrac{5}{3}x^2 \text{ при } x\to\infty \\ B(x)=x \end{array}\right\} \Rightarrow$ $A(x)$ – б.б.ф. более высокого пор. роста, чем б.б.ф. $B(x)$ при $x\to\infty$

3) Найдём r.

$r=2$, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{A(x)}{B^2(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^{\cancel{6}\,4}}{(3x^4+x^3+2)\cancel{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4}{3x^4+x^3+2}=[3x^4+x^3+2\sim 3x^4$ при $x\to\infty]=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\cancel{x^4}}{3\cancel{x^4}}=\dfrac{5}{3}=C\neq 0$

Док, что $f(x)=x^5\sin\frac{1}{x}+x^3$ б.б.ф. при $x\to\infty$

Найти её пор. роста относит. $g(x)=x$ и выделите главную часть.

Решение.

1) $f(x)=x^5\sin\frac{1}{x}+x^3$ – сумма слагаемых разного порядка роста при $x\to\infty$,

т.к. 1-е слагаемое равно

$x^5\sin\frac{1}{x}\sim x^5\cdot\frac{1}{x}=x^4$ при $x\to\infty$, а 2-е равно x^3.

След., $f(x)\sim x^4$ при $x\to\infty$

(Можно пров., что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\right)=1+0=1$)

След., $\boxed{x^4 \text{ – главная часть } f(x) \text{ при } x\to\infty}$

2) $\left.\begin{array}{l} f(x)\sim x^4 \text{ при } x\to\infty \\ g(x)=x \end{array}\right\} \Rightarrow$ $f(x)$ – б.б.ф. более высокого пор. роста, чем б.б.ф. $g(x)$ при $x\to\infty$

3) Найдём r.

$\boxed{r=4}$, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g^4(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5\sin\frac{1}{x}+x^3}{x^4}=$

$=[f(x)\sim x^4 \text{ при } x\to\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}}=1=C\neq0$

<u>Обсуждение</u>. $x^5 \sin\frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ –

– это неопределённость $[\infty \cdot 0]$.

Мы доказали, что

$$x^5 \sin\frac{1}{x} \sim x^4 \text{ при } x \to \infty,$$

но бывает по-разному.

<u>Примеры</u>. Рас. при $x \to \infty$

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad \to 1$$

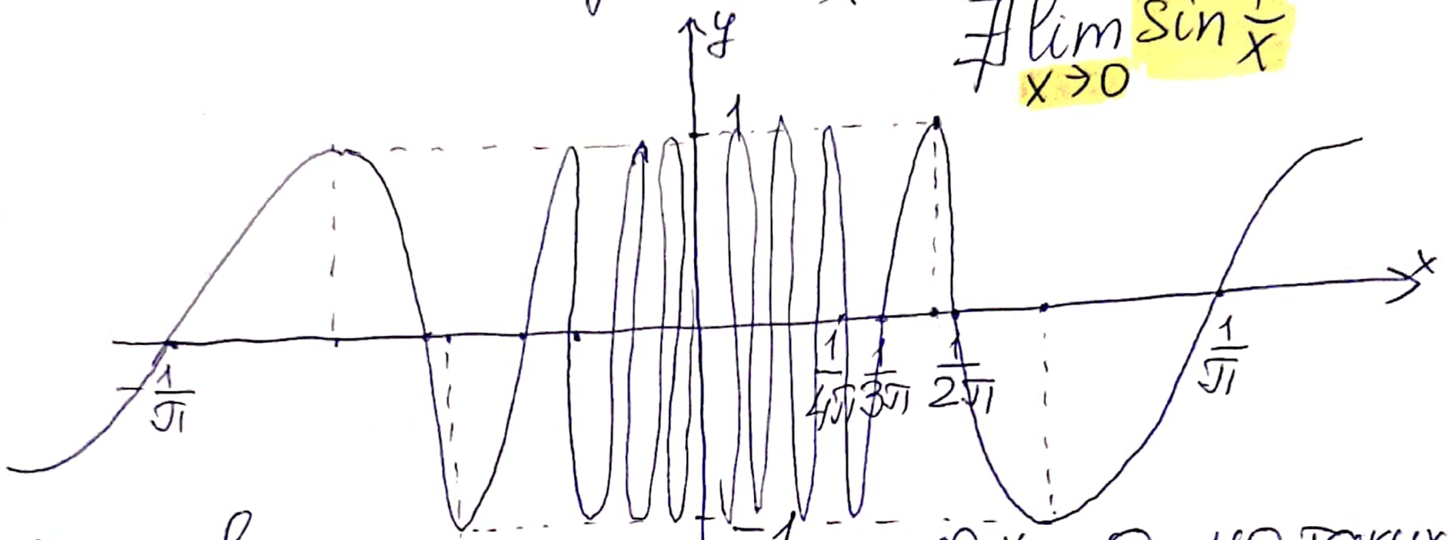
$$x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \quad \to \infty$$

$$x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \to 0$$

Пример функции, не имеющей предел

$y = \sin\frac{1}{x}$

Док, что $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$



Предъявим несколько послед-тей $x_n \to 0$, но таких, что $f(x_n) \to$ разным числам.

$\sin\frac{1}{x} = 0$

$\frac{1}{x} = \pi n \Rightarrow x = \frac{1}{\pi n}$

$\sin\frac{1}{x} = 1$

$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$

$n=0 \Rightarrow x = \frac{2}{\pi}$

$n=1 \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi} = \frac{2}{5\pi}$

$\sin\frac{1}{x} = -1$

$\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$

$n=0 \Rightarrow x = -\frac{2}{\pi}$

$n=1 \Rightarrow x = \frac{2}{5\pi}$

$n=1 \Rightarrow x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi} = \frac{2\pi}{3}$

Рас. послед. | $a_n = \frac{1}{\pi n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $a_n \neq 0$; $f(a_n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \to 0$, $b_n \neq 0$, $f(b_n) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$c_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n} \to 0$, $c_n \neq 0$, $f(c_n) = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

След., $\Leftarrow$ $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

Опр. Пусть для

б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ | б.б.ф. $A(x)$ и $B(x)$ при $x \to x_0$

$\nexists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ | $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)}$

Тогда

б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ | б.б.ф. $A(x)$ и $B(x)$

наз. несравнимыми

при $x \to x_0$

Примеры.

1) $\alpha(x) = \overset{\to 0}{x} \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{ограниченная ф-я}}$ – б.м.ф. при $x \to 0$

$\beta(x) = x$

Тогда $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \sin\frac{1}{x}$.

$\nexists \lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \Rightarrow$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимые б.м.ф. при $x \to 0$

2) $\alpha(x) = 8x^3 + 7x^2 + x\sin\frac{1}{x}$ – б.м.ф. при $x \to 0$

$\beta(x) = x$

Тогда $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \underbrace{8x^2+7x}_{\to 0} + \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\nexists \lim\limits_{x\to 0}}$

$\nexists \lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \Rightarrow$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ тоже несравнимые б.м.ф. при $x \to 0$