Консультация к КР по МА

Условия ||-ти и ⊥-ти прямых. Угол между прямыми.

I $l_1: y = k_1 x + b_1$

$l_2: y = k_2 x + b_2$ Тогда

1) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2,\ b_1 \neq b_2$

2) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$

3) $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, где φ - острый угол между прямыми.

II $l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$

$l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ Тогда

1) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$

2) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

3) $\cos\varphi = \dfrac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$, где φ - острый угол между прямыми

Виды задач

1. Составить уравнение той касательной к графику функции $y = f(x)$, которая параллельна прямой $y = kx + b$. Чертёж.

Решение.

Ур-е касат.: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Касат. ∥ прямой $\Leftrightarrow f'(x_0) = k$

1) Решим уравнение (сначала найдём $f'(x)$):

$$f'(x) = k$$

и найдём точки x_0.

2) Напишем ур-е касательных (касательной) в точках x_0.

3) Чертёж.

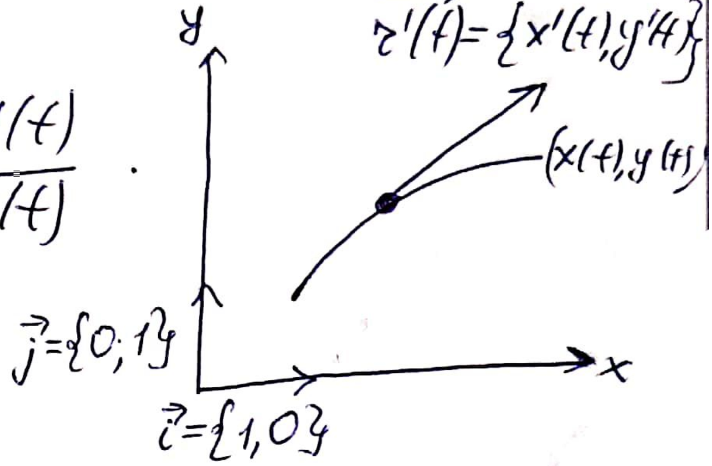
Примеры функций: $y = ax^2 + bx + c$.

Составьте сами задачу и решите её.

② Найти точки на кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, в которых касательное параллельно оси Oy (оси Ox, прямой $y = kx + b$).

Решение.

1) Найдём $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.



Касат. $\parallel Oy \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x'(t) = 0$.
Решим это ур-е, найдём t.

Касат. $\parallel Ox \Leftrightarrow y'(t) = 0$.
Решим это ур-е, найдём t.

Касат. $\parallel$ прямой $y = kx + b \Leftrightarrow \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = k$.
Решим это ур-е, найдём t.

2) Найденное t (их может быть несколько) подставим в $x(t)$ и $y(t)$ и найдём координаты $(x(t), y(t))$ таких точек.

Примеры кривой : $\begin{cases} x = a\cos t + c \\ y = b\sin t + d \end{cases}$, a, b-даны. (c, d)

3 Найти точки кривой $y=f(x)$, в которых касательная $\perp$ прямой $Ax+By+C=0$ $(y=kx+b)$.
Чертёж.

Решение.

Запишем ур-е прямой в виде $y=kx+b$.
(др. сл. не рас. пока)

1) Найдём $f'(x)$.
Обозначим $k_1=f'(x)$, $k_2=k$ из ур-я прямой
Касательная к кривой $(y=k_1x+b_1)$ $\perp$ прямой $(y=k_2x+b_2)$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

2) Решим ур-е $f'(x)\cdot k=-1$
Найдём x, для них найдём соответствующие y из $y=f(x)$.

3) Чертёж

Примеры функций:

1) $y=ax^2+bx+c$
2) $y^2=ax^3$ (неявное задание).

4. Найти угол между кривыми $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ в точках их пересечения. Чертёж.

Примеры функций:

$y=ax^3$, $y=\frac{b}{x^2}$, $y=ax^2+bx+c$;

$y=a\sin x$, $y=a\cos x$; $y=a\sin x+b$, $y=b$;

$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$, $y^2=2px$ (неявное задание).

См. N 5.243 с. 6

№ 15

Найти угол, под которым пересекаются кривые $y=(x-2)^2$ и $y=4x-x^2+4$ в т. $M(4,4)$. Сделать чертёж.

Решение.

1) Сделаем чертёж. Графики $y=(x-2)^2$ и $y=-(x-2)^2+8$ – параболы.

Точки пересечения графиков:

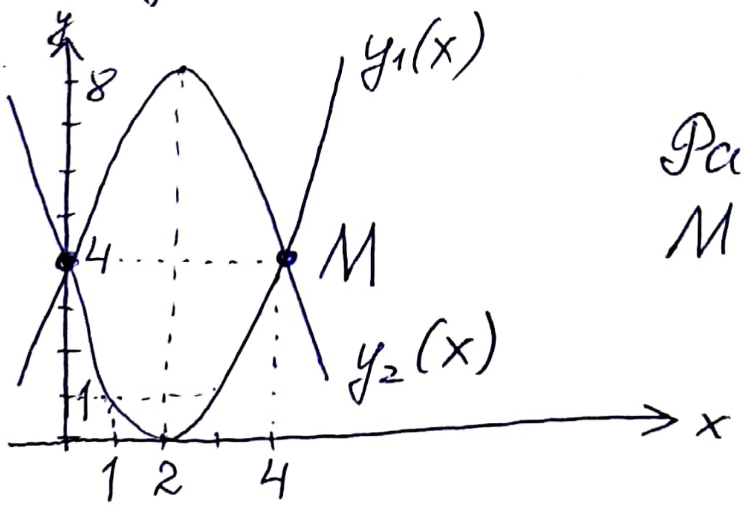
$$(x-2)^2=-(x-2)^2+8$$

$$2(x-2)^2=8$$

$$(x-2)^2=4$$

$$x-2=\pm 2$$

$$\left[\begin{array}{l} x=4 \Rightarrow y=4 \\ x=0 \Rightarrow y=4 \end{array}\right. \Rightarrow (0;4) \text{ и } (4;4)$$



Рас. точку $M(x_0,y_0)=(4,4)$.

2

Найдём $tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$,

где $k_1 = y_1'(x_0)$, $k_2 = y_2'(x_0)$.

$y_1'(x) = ((x-2)^2)' = 2(x-2)\cdot(x-2)' = 2(x-2)$

$y_2'(x) = 4 - 2x = 2(2-x)$

$y_1'(x_0) = 2(4-2) = 2\cdot 2 = 4$

$y_2'(x_0) = 2(2-4) = 2\cdot(-2) = -4$

Подставим в $tg\varphi$:

$$tg\varphi = \left|\frac{-4-4}{1+4(-4)}\right| = \left|\frac{-8}{1-16}\right| = \frac{8}{15}$$

$\varphi = arctg\frac{8}{15}$.   Ответ: $arctg\frac{8}{15}$.

⑤ Составить уравнение касательной и нормали

1) к графику функции $y=f(x)$, проходящих через точку $M(x_0,y_0)$;

2) к кривой $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ а) в точке $M(x_0,y_0)$;

б) в точке M, для которой $t=t_0$;

3) к графику функции $F(x,y)=0$ в точке $M(x_0,y_0)$.

Чертёж!

для 1): $y=ax^2+bx+c$;

Примеры ф-ций для 2):

$\begin{cases} x=at^2 \\ y=bt^3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ (циклоида)

$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ (астроида)

для 3): многочлен ст. 3 от x,y — $F(x,y)=0$

(если график трудно нарис., то нарис. только касат. и нормаль)

6 Найти точки графика функции $y = f(x)$, в которых касательная наклонена к оси абсцисс под углом $\alpha = \alpha_0$. Чертёж.

Решение.

1) Найти $f'(x)$

2) Решить ур-е $f'(x) = tg\,\alpha_0$.

Примеры функций:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

7 Найти угол, под которым график функции $y=f(x)$ пересекает ось абсцисс. Чертёж.

Решение.

1) Найти точки пересечение графика ф-ции $y=f(x)$ с осью Ox (это ось абсцисс), решив ур-е
$f(x)=0$. Пусть его решение — это точки x_1, x_2 (может быть любое кол-во точек).

2) Найти $f'(x)$.

Вычислить $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$

это $\quad \underset{tg\alpha_1}{\|} \qquad \underset{tg\alpha_2}{\|}$

Выписать углы: $\alpha_1 = arctg\, f'(x_1)$
$\alpha_2 = arctg\, f'(x_2)$

3) Чертёж.

Примеры функций:

$$y=ax^2+bx+c.$$

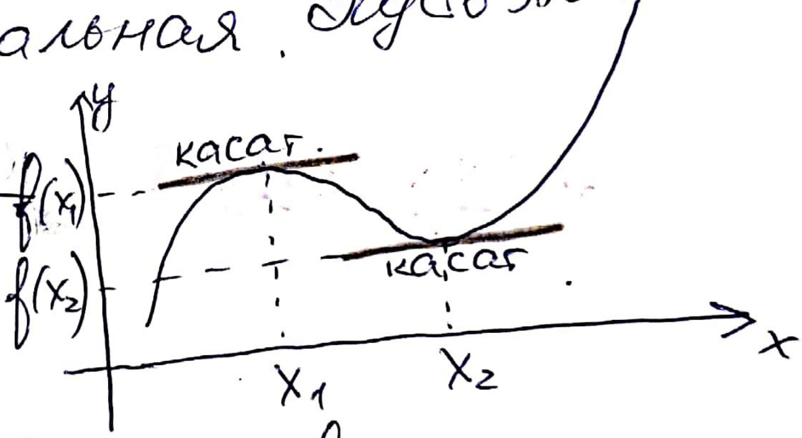
8) Найти уравнения горизонтальных касательных к графику ф-ции $y = f(x)$. Чертёж.

Решение.

1) Найти $f'(x)$.

2) Решить ур-е $f'(x)=0$. В точках с такими абсциссами касательная горизонтальная. Пусть это x_1 и x_2.

Поясн.:



3) Найти $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

4) Ур-я касательных: $y = y_1$ и $y = y_2$ (горизонт. прямые, $\parallel$-е оси Ox)

5) Чертёж

Примеры ф-ций: $y = ax^4 + bx^2 + c$