Опр. O-большого и o-малого.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на мн-ве M и $a \in M'$ (предельная точка мн-ва M).

$f = O(g)$ при $x \to a$	$f = o(g)$ при $x \to a$

если

$\exists C > 0$ и $U(a)$:	$\forall \varepsilon > 0$ $\exists U(a)$:

$$\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$$

$\lvert f(x)\rvert \le C\lvert g(x)\rvert$	$\lvert f(x)\rvert \le \varepsilon \lvert g(x)\rvert$

$\boxed{\text{Зам. } f = O(g) \not\Rightarrow g = O(f), \quad f = o(g) \not\Rightarrow g = o(f)}$

Примеры при $x \to 0$: $f = \sin x$, $g = 1$; $f = x^2$, $g = x$

Следствия.

1) $f = O(1)$ при $x \to a$ озн., что $f(x)$ локально ограничена в т. a

$f = O(1)$ при $x \to \infty$ озн. финальную ограниченность при $x \to \infty$

$f = o(1)$ при $x \to a$ озн., что $f(x)$ беск. мал. ф. при $x \to a$

2) $f = o(g)$ при $x \to a \Rightarrow f = O(g)$ при $x \to a$

Обратно неверно. (см. 4) и 3))

3) $f = o(g)$ при $x \to a \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

4) $f = O(g)$ при $x \to a \not\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Пример. $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1$ при $x \to 0$

Свойства символа о-малое

Пусть f – б.м.ф. при $x \to x_0$.
Рас. мн-во функций $o(f)$.

Будем обозначать ф-ции, которые явл. $o(f)$ (т.е. $\in$ мн-ву $o(f)$) тоже через $o(f)$. Тогда

1. $o(f) \pm o(f) = o(f)$
2. $o(kf) = o(f)$, $k\,o(f) = o(f)$; $\forall k \neq 0$.
3. $o(f^n) = o(f^k)$, где $k = 1, \ldots, n-1$.
4. $(o(f))^n = o(f^n)$
5. $f^n \cdot o(f) = o(f^{n+1})$; $\dfrac{o(f^n)}{f} = o(f^{n-1})$, $\forall n \geqslant$
6. $o\left(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f^k\right) = o(f)$, $\forall c_k \in \mathbb{R}$
7. $o(o(f)) = o(f)$
8. $o(f + o(f)) = o(f)$
9. Пусть g – б.м.ф. при $x \to x_0$. Тогда $fg = o(f)$ и $fg = o(g)$
10. Пусть $f \sim g$ при $x \to x_0$. Тогда $f - g = o(f)$ и $f - g = o(g)$.

Пример.

Написать разложение ф-ции $y=\cos(\ln x)$ при $x\to 1$.

Решение. 1) Используем вот что:

$\ln(1+x)=x+o(x)$ при $x\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(1+u(x))=u(x)+o(u(x))$ при $x\to x_0$, если $u(x)\to 0$ при $x\to x_0$.

Теперь рас. при $x\to 1$

$$\ln x=\ln(1+\underbrace{(x-1)}_{u(x)})=(x-1)+o(x-1) \text{ при } x\to 1$$

2) Используем:

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos u(x)=1-\frac{u^2(x)}{2}+o(u^2(x))$ при $x\to x_0$, если $u(x)\to 0$ при $x\to x_0$

Теперь рас. при $x\to 1$

$$\cos(\ln x)=\cos(\underbrace{(x-1)+o(x-1)}_{u(x)})=$$

$$=1-\frac{((x-1)+o(x-1))^2}{2}+o(((x-1)+o(x-1))^2)=$$

$$=1-\left(\frac{(x-1)^2}{2}+(x-1)\cdot o(x-1)+\frac{(o(x-1))^2}{2}\right)+$$

$$+o\left((x-1)^2+2(x-1)\cdot o(x-1)+(o(x-1))^2\right)=$$

$$= 1 - \frac{(x-1)^2}{2} - o((x-1)^2) + o((x-1)^2) +$$

$$+ o\Big((x-1)^2 + o((x-1)^2) + o((x-1)^2)\Big) =$$

$$= 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) + o\Big((x-1)^2 + o((x-1)^2)\Big) =$$

$$= 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) + o((x-1)^2) =$$

$$= 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) \quad \text{при } x \to 1.$$

См. Бугузов Мат. ан. в примерах и задачах

Примеры на с. 61–63.

Конс. к РК2.

№

Написать разложение функции $f(x)=\sin^2 x - x^2 e^{-x}$ по целым положит. степеням x до членов 4-го пор. малости отн. x.

Решение.

$$f(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2 - x^2\left(1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) =$$

$$=\left(x^2+\left(\frac{x^3}{6}\right)^2+\left(o(x^4)\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{x^3}{6}+2x\cdot o(x^4)-2\cdot\frac{x^3}{6}\,o(x^4)\right).$$

$$-\left(x^2-x^3+\frac{x^4}{2}+x^2\cdot o(x^2)\right) =$$

$$=\left(\cancel{x^2}+\frac{x^6}{36}+o(x^8)-\frac{x^4}{3}+o(x^5)-\ o(x^7)\right)-$$

$$-\left(\cancel{x^2}-x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right) =$$

$$= \left(-\frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(-x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) =$$

$$= -\frac{x^4}{3} + o(x^4) + x^3 - \frac{x^4}{2} - o(x^4) =$$

$$= x^3 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

(см. с. 128 Марон Дифф. и инт. исчисл. в задачах)

№

Вычислить предел исп. ф-лу Тейлора:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x} = \left[\operatorname{tg} x \sim x \text{ при } x\to 0\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cos x}{x^4} = \left[\begin{aligned}&(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)\\ &\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\end{aligned}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+\frac{1}{2}x^2+\underbrace{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}}_{=-\frac{1}{8}}x^4+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-\left(\cancel{1}-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^4}{24}+\cancel{\frac{1}{2}x^2}-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{48}x^6+o(x^7)-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+o(1)\right) = \frac{1}{3}$$