Лекция 10

Частные производные функции нескольких переменных.

Опр. Пусть ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определена в некоторой δ-окрестности $U(a,\delta)$ точки $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$.

Пусть Δx_i – любое приращение i-й переменной ф-ции $f(x_1,\dots,x_n)$ такое, что точка $(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+\Delta x_i,a_{i+1},\dots,a_n)\in U(a,\delta)$.

Частным приращением ф-ции f по переменной x_i в точке a наз. разность

$$\Delta_i f(a) = f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+\Delta x_i,a_{i+1},\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n)$$

Частной производной ф-ции f по переменной x_i в точке a наз. предел

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_i f(a)}{\Delta x_i},$$ если он существует.

Обозн. $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(a)$.

Зам. 1. Если $m=1$, то $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ скалярная функция нескольких переменных. Можно рас. числовую ф-ю

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Тогда $f'_{x_i}(a) = \varphi'(a_i)$, т.е. обычная производная ф-ции $\varphi(x_i)$ в т. a_i как функции одной переменной.

Зам. 2 Если $m>1$, то $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ векторная ф-я нескольких переменных,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix},$$ где f_i - координатные скалярные ф-ции.

Тогда $f'_{x_i}(a) = \begin{pmatrix} (f_1)'_{x_i}(a) \\ \vdots \\ (f_m)'_{x_i}(a) \end{pmatrix}$ или $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_i} \end{pmatrix}$

в других обозначениях.

Опр. Пусть ф-я $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ имеет частные производные по всем переменным в нек. точке $x \in \mathbb{R}^n$. Матрицей Якоби ф-ции f в т. x наз. матрица из частных производных:

$$f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

обозначения

Примеры.

1. $f(x,y,z) = xy^2 + \sin(yz) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'_x = y^2, \quad f'_y = 2xy + \cos(yz)\cdot z,$

$f'_z = \cos(yz)\cdot y$

2. $f(x,y) = \begin{pmatrix} \underbrace{e^{2x} - \frac{1}{y}}_{f_1(x,y)} \\ \underbrace{x\sin y}_{f_2(x,y)} \end{pmatrix} \Rightarrow f'_x = \begin{pmatrix} (e^{2x} - \frac{1}{y})'_x \\ (x\sin y)'_x \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ \sin y \end{pmatrix}, \quad f'_y = \begin{pmatrix} (e^{2x} - \frac{1}{y})'_y \\ (x\sin y)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} \\ x\cos y \end{pmatrix}$

3. Матрица Якоби для примера 1

$f' = (f'_x \;\; f'_y \;\; f'_z) = (y^2 \;\; 2xy + z\cos(yz) \;\; y\cos(yz))$

4. Матрица Якоби для примера 2

$f' = (f'_x \;\; f'_y) = \begin{pmatrix} (f_1)'_x & (f_1)'_y \\ (f_2)'_x & (f_2)'_y \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2e^{2x} & \frac{1}{y^2} \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$

Геометрический смысл частных производных для ф-ции $z=f(x,y)$

Рас. скалярную ф-ю двух переменных $f: \mathbb{R}^2(x,y) \to \mathbb{R}(z)$, определённую в окрестности т. $a=(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$.

Графиком Г ф-ции f явл. поверхность в $\mathbb{R}^3(x,y,z)$.

Рас. плоскости

$\pi_1=\{(x,y) \mid y=a_2\}$	$\pi_2=\{(x,y) \mid x=a_1\}$

и кривые

$\gamma_1=\Gamma \cap \pi_1$	$\gamma_2=\Gamma \cap \pi_2$

Они являются графиками ф-ций одной переменной

$f(x,a_2)$	$f(a_1,y)$

Пусть $\exists$ касательные к графикам в плоскостях π_1 и π_2,

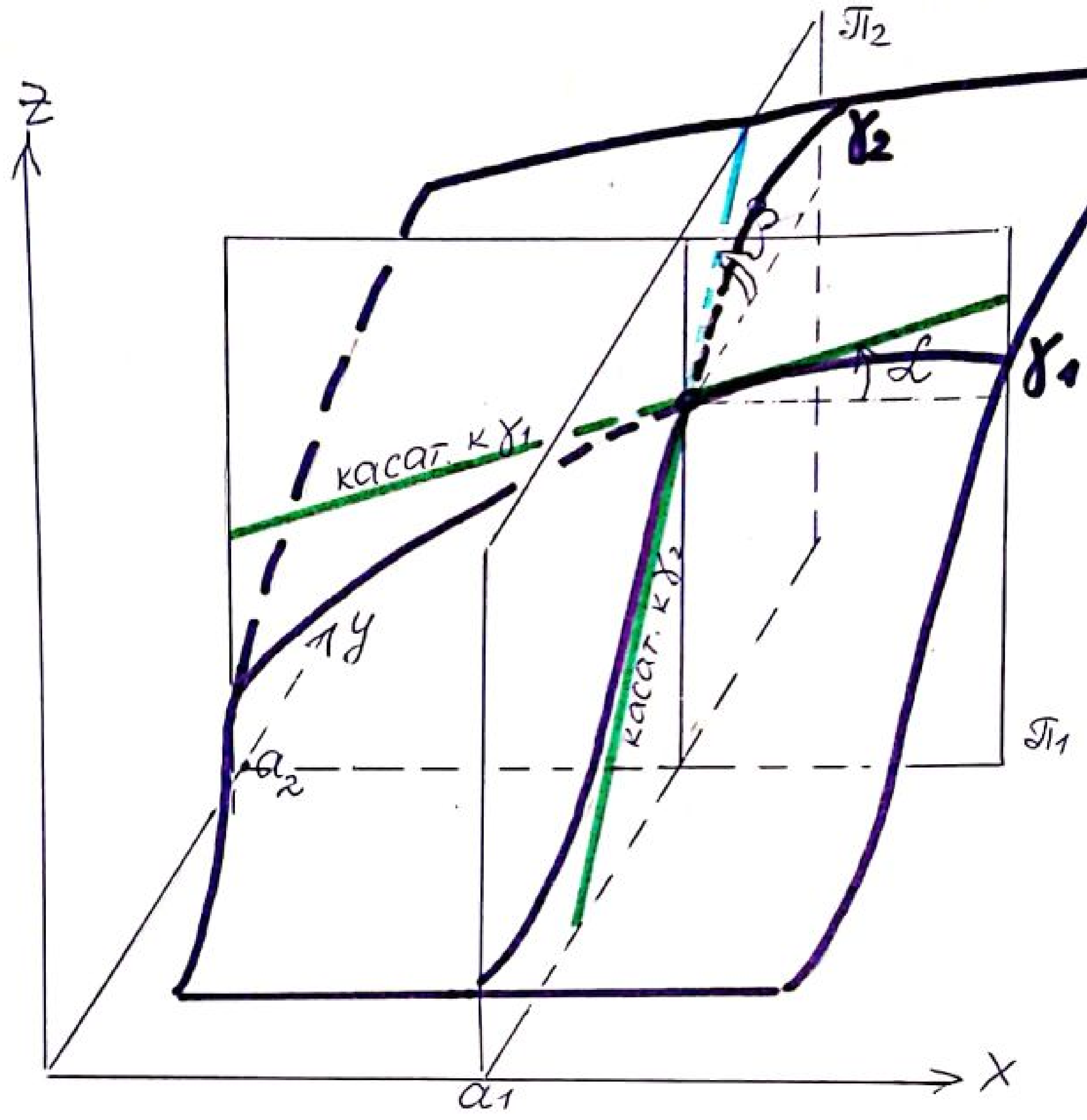
α -	β -

углы между касательными и осями соответственно

Ox	Oy.

Тогда

$f'_x(a_1,a_2)=\operatorname{tg}\alpha$	$f'_y(a_1,a_2)=\operatorname{tg}\beta$.


π2
Z
γ2
β
γ1
α
касат. к γ1
γ
a2
касат. к γ2
π1
X
a1

Дифференцируемость функции нескольких переменных.

Опр. Пусть ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определена в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ – любое приращение независимых переменных такое, что точка $x+\Delta x = (x_1+\Delta x_1, \dots, x_n+\Delta x_n) \in U(x)$.

Полным приращением ф-ции f в точке x наз. разность

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \begin{pmatrix} \Delta f_1(x) \\ \vdots \\ \Delta f_m(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x_1+\Delta x_1, \dots, x_n+\Delta x_n) - f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1+\Delta x_1, \dots, x_n+\Delta x_n) - f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что Δx и $\Delta f(x)$ – это векторы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно; $|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$.

Функция f наз. дифференцируемой в точке x, если ее полное приращение в точке x в нек. окрестности точки x можно представить в виде

$$\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot |\Delta x|, \quad \text{где} \qquad (1)$$

A – матрица $m \times n$, элементы которой не зависит от Δx,

$\alpha(\Delta x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ беск. малая ф-я при $\Delta x \to 0$

Зам. 1 Если $m=1$, то для скалярной ф-ции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ формула (1) даёт

$$\Delta f(x) = a_1 \cdot \Delta x_1 + \ldots + a_n \cdot \Delta x_n + \alpha(\Delta x) \cdot |\Delta x|. \quad (2)$$

Зам. 2 Если $m>1$, то для векторной ф-ции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ формула (1) даёт

$$\Delta f(x) = \begin{pmatrix} \Delta f_1(x) \\ \vdots \\ \Delta f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(\Delta x) \\ \vdots \\ \alpha_n(\Delta x) \end{pmatrix} \cdot |\Delta x|. \quad (3)$$

Следствие. Векторная ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в т. $x \in \mathbb{R}^n \iff$ все её координатные (скалярные) ф-ции $f_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в т. $x \in \mathbb{R}^n$.

Опр. Ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наз. дифференцируемой в области $X \subset \mathbb{R}^n$, если она дифференцируема в каждой точке области X.

Теорема (Необходимое условие дифференцируемости функции неск перем)

Пусть ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифф. в т. $x \in \mathbb{R}^n$.
Тогда в т. x $\exists$ частные производные ф-ции f по всем переменным,
т.е определена матрица Якоби $f'(x)$,
причём матрица A из опр. дифф. ф-ции и матрица Якоби $f'(x)$ равны, т.е.

$$a_{ji} = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}.$$

Док-во.

1) Док-м для $m=1$.
Пусть скалярная ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифф. в т. $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда в нек. окрестности $\mathcal{U}(x)$ полное приращение ф-ции равно

$$\Delta f(x) = a_1 \Delta x_1 + \ldots + a_n \Delta x_n + \alpha(\Delta x) \cdot |\Delta x|, \quad (2)$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, не завис. от $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, $x + \Delta x \in \mathcal{U}(x)$, $\alpha(\Delta x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ беск. малая ф-я при $\Delta x \to 0$

Докажем, что $\exists f'_{x_i}(x)$, причем $a_i = f'_{x_i}(x)$.
Для этого возьмём $\Delta x = (0, \ldots, 0, \Delta x_i, 0, \ldots, 0)$ $\forall \Delta x_i$ такого, что $x + \Delta x \in \mathcal{U}(x)$, и подставим в (2):

$$\Delta f(x) = a_1 \cdot 0 + \ldots + a_{i-1} \cdot 0 + a_i \Delta x_i + a_{i+1} 0 + \ldots + a_n 0 + \alpha(\Delta x) \cdot |\Delta x| =$$

$$= a_i \Delta x_i + \alpha(\Delta x) \cdot |\Delta x_i|$$

$$(\text{т.к. } |\Delta x| = \sqrt{0^2 + \ldots + (\Delta x_i)^2 + \ldots + 0^2} = |\Delta x_i|).$$

Но при таком приращении Δx

$$\Delta f(x) = \Delta_i f(x).$$

Получим, что приращение ф-ции по i-й переменной равно:

$$\Delta_i f(x) = a_i \Delta x_i + \alpha(\Delta x) |\Delta x_i|.$$

Найдём $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i} =$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{a_i \Delta x_i + \alpha(\Delta x) \cdot |\Delta x_i|}{\Delta x_i} =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \Big(a_i + \underbrace{\underbrace{\alpha(\Delta x)}_{\text{б.м.ф.}} \cdot \underbrace{\frac{|\Delta x_i|}{\Delta x_i}}_{= \pm 1 \,(\Rightarrow \text{огранич. ф-я})}}_{\text{б.м.ф.}} \Big) = a_i.$$

След, $\exists$ частная производная $f'_{x_i}(x) = a_i$ или в других обозначениях $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} = a_i$.

Итак, если скалярная ф-я $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ дифф. в т. $x\in\mathbb{R}^n$, то в точке x $\exists$ все частные производные $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,n$, и в нек. окрестности $U(x)$ полное приращение ф-ции

$$\Delta f(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\Delta x_1+\dots+\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\Delta x_n+\alpha(\Delta x)\cdot|\Delta x|,$$

где $\alpha(\Delta x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ скалярная беск. малая ф-я при $\Delta x\to 0$.

2) Док-м для $m>1$.

Пусть векторная ф-я $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ дифф. в т. $x\in\mathbb{R}^n$. Тогда (из последнего следствия) все координатные ф-ции (скалярные) они $f_j\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ дифф. в т. $x\in\mathbb{R}^n$. След., из п.1) полное приращение коорд. функций

$$\Delta f_j(x)=a_{j1}\Delta x_1+\dots+a_{jn}\Delta x_n+\alpha_j(\Delta x)\cdot|\Delta x|=$$

$$=\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_1}\Delta x_1+\dots+\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_n}\Delta x_n+\alpha_j(\Delta x)|\Delta x|.$$

Для полного приращения вект. ф-ции f получим

$$\Delta f(x)=\begin{pmatrix}\Delta f_1(x)\\ \vdots\\ \Delta f_m(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1(\Delta x)\\ \vdots\\ \alpha_m(\Delta x)\end{pmatrix}\cdot|\Delta x|,$$

т.е. $\exists$ матр. Якоби $f'(x)=\left(\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}\right)$ и $a_{ji}=\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}$ $\forall i,j$.

ч.т.д.

Теорема (О связи дифференцируемости и непрерывности функции неск. перем.)

Если ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифф. в т. $x \in \mathbb{R}^n$, то она непр. в т. x.

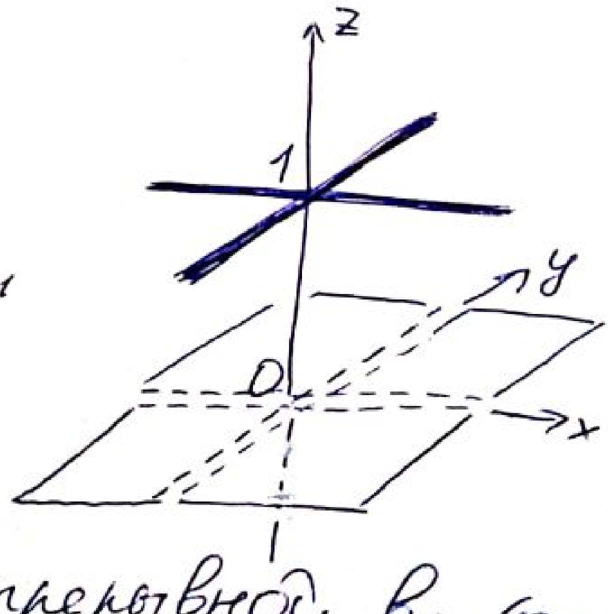
Сл. Если ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифф. в области $X \subset \mathbb{R}^n$, то она непр. в области X.

Теорема (Достаточное условие дифф-ти функции неск. переменных).
(см. на след. стр.)

Обсуждение. Из существования частных производных ф-ции в точке не следует её дифференцируемости и даже непрерывности в точке.

Пример

$$z = f(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } y \neq 0 \\ 1, \text{ если } x = 0 \text{ или } y = 0 \end{cases}$$



$\exists f'_x(0,0) = 0$ и $f'_y(0,0) = 0$,

но ф-я $f(x,y)$ не явл. непрерывной в т. $(0,0)$

След., не явл. дифф. в т. $(0,0)$.

Итак, теорема.

Пусть ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ имеет матрицу Якоби в некоторой окрестности $\mathcal{U}(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ и все элементы матрицы Якоби $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ непрерывны в точке $a \in \mathbb{R}^n$

Тогда ф-я f дифференцируема в т. a.

Док-во.

① Док-м для $m=1$. Пусть для простоты $n=2$.

Рас. т. $a=(x_0, y_0)$ и такой $\Delta\rho(\Delta x, \Delta y)$, что точка $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in \mathcal{U}(a)$.

Рас полное приращение ф-ции f в т. a:

$$\Delta f(a) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] +$$
$$+ [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)] \; =$$

Первая	Вторая

скобка — это приращение ф-ции f в точке

x_0	y_0

при постоянном

$y=y_0+\Delta y$	$x=x_0$.

1) Функции одной переменной

$f(t, y_0+\Delta y)$ | $f(x_0, t)$

дифференцируемы на

$[x_0, x_0+\Delta x]$ (или $[x_0+\Delta x, x_0]$) | $[y_0, y_0+\Delta y]$ (или $[y_0+\Delta y, y_0]$)

т.к. по условию $\exists$ частные производные

$f'_x(x,y)$ | $f'_y(x,y)$

в $U(a)$.

Применим к ф-ям одной перем. т-му Лагранжа о конечных приращениях:

$\exists\, \theta_1 \in (0,1)$ | $\exists\, \theta_2 \in (0,1)$

такое, что

(продолжаем равенство)

$$\circled{=}\ f'_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\cdot\Delta y)\cdot\Delta y \ \boxed{=}$$

2) Частные производные f'_x и f'_y непр. в точке $a=(x_0, y_0)$ по условию $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f'_x(x,y) = f'_x(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f'_y(x,y) = f'_y(x_0,y_0).$$

Применим т-му о связи ф-ции, её предела и бесконечно малой и продолжим рав-во:

$$\boxed{=} \Big(f'_x(x_0,y_0)+\underbrace{\beta(\Delta x,\Delta y)}_{\text{б.м.ф-я при } \Delta x\to 0, \Delta y\to 0}\Big)\cdot\Delta x+\Big(f'_y(x_0,y_0)+\underbrace{\gamma(\Delta y)}_{\text{б.м.ф. при } \Delta y\to 0}\Big)\cdot\Delta y$$

$$=f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\underbrace{\beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\gamma(\Delta y)\Delta y}$$

3) Док., что сумма последних двух слагаемых равна $\alpha(\Delta\rho)\cdot|\Delta\rho|$, где $\alpha(\Delta\rho)$ – б.м.ф. при $\Delta\rho\to 0$

Обозначим $\alpha(\Delta\rho)=\dfrac{\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\gamma(\Delta y)\Delta y}{|\Delta\rho|}$. $(*)$

Найдём $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\alpha(\Delta\rho)=$

$$=\lim_{\Delta\rho\to 0}\Big(\underbrace{\beta(\Delta x,\Delta y)}_{\substack{\text{б.м.ф.}\\ \text{при } \Delta\rho\to 0}}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta\rho}+\underbrace{\gamma(\Delta y)}_{\substack{\text{б.м.ф.}\\ \text{при } \Delta\rho\to 0}}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\Big)=0$$

огранич., т.к. $\in[-1;1]$

(напомним, что $|\Delta\rho|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$)

След., $\alpha(\Delta\rho)$ – б.м.ф. при $\Delta\rho\to 0$ и из $(*)$ получим $\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\gamma(\Delta y)\cdot\Delta y=\alpha(\Delta\rho)\cdot|\Delta\rho|$.

Мы доказали, что

$$\Delta f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\alpha(\Delta\rho)\cdot|\Delta\rho|.$$

След., f дифференцируема в т. $a=(x_0,y_0)$

(2) Док-м для $m>1$.

Из (1) $\Rightarrow$ все координатные (скалярные) ф-ции f_j дифф. в т. $a \in \mathbb{R}^n$.

След., векторная ф-я $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ дифф. в т. a.

ч.т.д.

Частные производные высших порядков

Пусть $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ скалярная ф-я имеет в нек. окрестности $U(a)$ т. $a \in \mathbb{R}^n$ частную произв. $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

Пусть эта частная производная (тоже скал. ф-я) имеет частную произв. $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)\Big|_{x=a}$; в др. обозначениях

$$(f'_{x_i})'_{x_j}(a).$$

Частная производная наз. второй частн. произв. или частн. произв. второго порядка ф-ции $f(x)$ в точке a.

Обозн. $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}$ или $f''_{x_i x_j}(a)$.

Если $i=j$, то исп. обозначение

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i^2} \text{ или } f''_{x_i^2}(a) \text{ или } f''_{x_i x_i}(a).$$

Если $i \neq j$, то частн. произв. наз. смешанными.

Аналог. определяют частн. произв. высших порядков $\frac{\partial^k f(a)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_k}}$, где $k = i_1 + \ldots + i_k$.

<u>Опр</u> <u>Матрицей Гессе</u> наз. матрица, составленная из вторых частн. произв. скалярной ф-ции:

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

<u>Теорема о независимости частных произв. от порядка дифференцирования.</u>

Пусть скалярная ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в нек. окрестности $U(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ смешанные частные произв. $f''_{x_i x_j}(x)$ и $f''_{x_j x_i}(x)$, которые непрерывны в т. a.

Тогда $f''_{x_i x_j}(a) = f''_{x_j x_i}(a)$.

Док-во

Док-м для $n=2$.

Пусть т. $a=(x_0,y_0)$. Рас. такие $\Delta x, \Delta y$, что точка $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in U(a)$.

1) Рас. вспомогат. ф-ю $g(\Delta x,\Delta y)= = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0,y_0)$

и пок., что для некоторых $\theta_i \in (0,1)$, $i=1,2,3,4$,

$$g(\Delta x,\Delta y) = f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y \quad \text{и} \quad (4)$$

$$g(\Delta x,\Delta y) = f''_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x, y_0+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y \quad (5)$$

Приравняв (4) и (5) и сократив на $\Delta x\Delta y$, получим

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) = f''_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x, y_0+\theta_4\Delta y)$$

По усл. f''_{xy} и f''_{yx} непр. в т. $a=(x_0,y_0)$. Перейдём к пределу при $\Delta x\to 0$, $\Delta y \to 0$ в лев. и прав. части, получим

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0).$$

2) Пок, что верно равенство (4). Равенство (5) выводится аналогично.

а) Рас. вспомогат. функцию

$$\varphi(x) = f(x, y_0+\Delta y) - f(x,y_0).$$

Тогда $g(\Delta x,\Delta y) = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)$.

Из условия т-мы $\Rightarrow \varphi(x)$ дифф. на $[x_0, x_0+\Delta x]$.
(или $[x_0+\Delta x, x_0]$)

Применим теорему Лагранжа о конечн. приращениях: $\exists\, \theta_1 \in (0,1)$ такое, что

$$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0) = \varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\cdot\Delta x$$

Возвращаясь к определению ф-ции $\varphi(x)$, получим

$$g(\Delta x, \Delta y) = \left[f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\right]\cdot\Delta x$$

б) Рас. вспомогат. ф-ю

$$\lambda(y) = f'_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y)$$

Тогда $g(\Delta x, \Delta y) = \left[\lambda(y_0+\Delta y) - \lambda(y_0)\right]\cdot\Delta x$

Из условия т-мы $\Rightarrow \lambda(y)$ дифф. на $[y_0, y_0+\Delta y]$
(или $[y_0+\Delta y, y_0]$)

Применим теорему Лагранжа о конечных приращениях: $\exists\, \theta_2 \in (0,1)$ такое, что

$$\lambda(y_0+\Delta y) - \lambda(y_0) = \lambda'(y_0+\theta_2\cdot\Delta y)\cdot\Delta y$$

Возвращаясь к определению ф-ции $\lambda(y)$, получим

$$g(\Delta x, \Delta y) = f''_{xy}(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y_0+\theta_2\cdot\Delta y)\,\Delta y\cdot\Delta x.$$

3) Для вывода рав-ва (5) надо исп. вспомогат. функции $\psi(y) = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0, y)$ и
$\mu(x) = f'_y(x, y_0+\theta_3\cdot\Delta y)$. Т-ма док-на.