Лекция 11.

Полный дифференциал функции нескольких переменных.

Опр. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определена в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и дифференцируема в точке x.

Полным дифференциалом (или 1-м дифференциалом, или дифференциалом) функции f в точке x наз. линейная относительно $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ часть приращения $\Delta f(x)$ функции f в точке x.

Обозн. $df(x)$.

След., $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$

Обозначим $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$. Т.к. для независимых переменных $dx_i = \Delta x_i$, то $dx = \Delta x$

След., $df(x) = f'(x) \cdot dx$

Итак, для дифф. в точке x функции

$$\underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\substack{\Delta f(x) \\ \text{полное прира-} \\ \text{щение}}} = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\substack{df(x) \\ \text{дифферен-} \\ \text{циал}}} + \underbrace{\alpha(\Delta x) \cdot |\Delta x|}_{\substack{\text{беск. малая} \\ \text{функция} \\ \text{при } \Delta x \to 0}}$$

Зам. 1) Для скалярной ф-ции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$df(x) = \underbrace{\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)}_{\text{матр. Якоби}} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \cdot \underbrace{dx_1}_{\Delta x_1} + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \underbrace{dx_n}_{\Delta x_n}.$$

В частн., для $n=1$ $\quad df(x) = f'(x)dx.$

2) Для векторной ф-ции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Зам. Для скалярной ф-ции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ <u>частными дифференциалами в т. x</u> наз. выражения $d_{x_i} f(x) = f'_{x_i}(x) dx_i$

$$\left(= \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i\right).$$

След., $df(x) = d_{x_1} f(x) + \dots + d_{x_n} f(x)$.

<u>Частный дифференциал</u> – ~~это~~ линейная отн. Δx_i часть приращения $\Delta_i f(x)$ функции f по переменной x_i.

Дифференциал 2-го порядка функции нескольких переменных.

Опр Пусть ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
определена и дифференцируема
в некоторой окрестности $U(x)$ точки
$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, и
её 1-й дифференциал
$df(x)$ дифференцируем в точке x.

Дифференциалом 2-го порядка
(или 2-м дифференциалом) функции $f(x)$
в точке x наз. дифференциал 1-го
дифференциала функции $f(x)$.

Обозн. $d^2 f(x)$.

След., $d^2 f(x) = d(df(x))$.

Зам. Для скалярной функции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 f(x) = d(df(x)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (df(x))}{\partial x_j} dx_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j$$

Зам. Для скалярной ф-ции.

Дифференциал 1-го порядка явл. линейной формой (линейной функцией) от переменных $dx_1, \ldots, dx_n$:

$$df(x) = f'_{x_1}(x)\, dx_1 + \ldots + f'_{x_n}(x)\, dx_n .$$

коэфф-ты лин. формы

Дифференциал 2-го порядка явл. квадратичной формой от переменных $dx_1, \ldots, dx_n$:

$$d^2 f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(x)\, dx_i\, dx_j .$$

С помощью матрицы Гессе можно представить

$$d^2 f(x) = (dx_1 \ldots dx_n) \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1}(x) & \ldots & f''_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{x_n x_1}(x) & \ldots & f''_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Т-ма (Необходимые и достаточные условия существования $d^2 f(x)$)

1) $\exists\, d^2 f(x) \Rightarrow \exists$ частные произв. $f''_{x_i x_j}(x)$ в точке x.

2) $\exists$ частные произв. $f''_{x_i x_j}$ в нек. $U(x)$ и $f''_{x_i x_j}$ непрерывны в т. x $\Rightarrow \exists\, d^2 f(x)$.

Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных

I сп. $d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x))$

II сп. Определим с помощью операторов.

Пусть $d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n$ – оператор дифференциала 1-го порядка (т.е. полного дифференциала).

Тогда $df(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right) f(x) =$

$$= \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n.$$

Пусть $d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^2$ – оператор дифференциала 2-го порядка.

Тогда $d^2 f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^2 f(x) =$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \cdot dx_j\right) f(x) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \cdot dx_j.$$

Пусть $d^k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^k$ – оператор дифференциала k-го порядка.

Тогда $d^k f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^k f(x)$.

Восстановление функции по её полному дифференциалу.

Рас. скалярные функции двух переменных. Пусть дано выражение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Выясним условия существования ф-ции $U(x,y)$: $dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

<u>Теорема</u> (<u>о необходимых и достаточных условиях того, чтобы выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ было полным дифф-м</u>)

Выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ явл. полным дифф-м нек. ф-ции $U(x,y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 1) функции $P(x,y), Q(x,y), \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$ и

2) $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad \forall (x,y) \in G$.

<u>Сл.</u> Если $dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, то $P(x,y) = \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}$, $Q(x,y) = \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}$.

Условия 2) означают равенство вторых частных производных: $\dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x}$.

Пусть функция $U(x,y)$: $dU = Pdx + Qdy$ существует. Как её найти в явном виде (восстановить функцию по её полному дифференциалу)?

1) Т.к. $P(x,y) = U'_x(x,y)$,
то проинтегрируем $P(x,y)$ по x:
$$U(x,y) = \int P(x,y)dx = R(x,y) + C(y)$$

2) Найдём $C(y)$.

а) Т.к. $Q(x,y) = U'_y(x,y)$,
то продифференцируем $U(x,y)$ из 1) по y и приравняем $Q(x,y)$:
$$R'_y(x,y) + C'(y) = Q(x,y)$$

б) Выразим $C'(y)$:
$$C'(y) = Q(x,y) - R'_y(x,y).$$

в) Проинтегрируем $C'(y)$ по y:
$$C(y) = \int (Q(x,y) - R'_y(x,y))dy = P(y) + D, D \in R$$

3) Подставим $C(y)$ из 2) в 1).

<u>Зам.</u> Если условия 1 или 2 теоремы не вып., то функция $U(x,y)$ не существует.

Пример. Найдём $U(x,y)$:

$$dU(x,y) = 2x(1+\sqrt{x^2-y})dx - \sqrt{x^2-y}\,dy.$$

Решение.

1. Пров, что функция $U(x,y)$ существует.

$P(x,y) = 2x(1+\sqrt{x^2-y})$, $Q(x,y) = -\sqrt{x^2-y}$.

$P'_y(x,y) = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2-y}}$, $Q'_x(x,y) = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2-y}}$

Функции P, Q, P'_y, Q'_x непр. в своей обл. определения и $P'_y = Q'_x \Rightarrow \exists\, U(x,y)$.

2. Найдём $U(x,y)$.

1) $U(x,y) = \int P(x,y)dx = \int 2x(1+\sqrt{x^2-y})dx =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \int \left(1+(x^2-y)^{\frac{1}{2}}\right) d(x^2-y) = (x^2-y) + \dfrac{(x^2-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C(y)$

2) Найдём $C(y)$.

а) $U'_y(x,y) = (x^2-y)'_y + \left(\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\right)'_y + C'(y) =$

$= -1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{1}{2}} + C'(y) = -1 - \sqrt{x^2-y} + C'(y)$

Приравнем $P(x,y)$:

$-1 - \sqrt{x^2-y} + C'(y) = -\sqrt{x^2-y}$

б) $C'(y) = 1$

в) $C(y) = y + D,\ D \in \mathbb{R}$.

3) $U(x,y) = (x^2 - \cancel{y}) + \frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}} + \cancel{y} + D = x^2 + \frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}} + D$.

Применение дифференциалов функции нескольких переменных к приближенным вычислением

1. Пусть скалярная ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в т. $x \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $f(x+\Delta x)-f(x) = df(x)+\alpha(x)\cdot|\Delta x|$,

где $\alpha(x)$ – б. м. ф. при $\Delta x \to 0$.

Приближенно: $f(x+\Delta x) \approx f(x)+df(x)$ при $\Delta x \to 0$.

Подробнее:

$$f(x_1+\Delta x_1, \ldots, x_n+\Delta x_n) \approx f(x_1, \ldots, x_n) + f'_{x_1}(x)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f'_{x_n}(x)\Delta x_n.$$

Точку x выбирают так, чтобы правая часть приближенного равенства несложно вычислялась.

2. Для более точных вычислений исп. формулу Тейлора для функций нескольких перем.

Дифференцируемость сложной функции

Теорема. Пусть функции нескольких переменных

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{и} \quad f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

дифференцируемы в точках

$$a \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad b \in \mathbb{R}^m$$

соответственно, причём

$$b = g(a).$$

Тогда сложная функция

$$f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

дифференцируема в точке a,

причём для матриц Якоби выполнено равенство:

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a).$$

Зам. Подробно: обозначим переменные в $\mathbb{R}^n$ через x, в $\mathbb{R}^m$ через y, в $\mathbb{R}^k$ через z.
Тогда для сложной ф-ции $z = f(g(x))$ матрица Якоби

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{k \times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial y_m} \end{pmatrix}}_{k \times m} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{m \times n}$$

Поэлементно для матрицы Якоби сложн. ф-ции.

$$\boxed{\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial g_m}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_s}\frac{\partial g_s}{\partial x_j}}.$$

Это формула для частных производных сложной функции.

Частные случаи.

(1) $z = f(u(x,y),\ v(x,y))$.

Рас. функции

обозначения переменных в этих пространствах.

$g:\ \mathbb{R}^2(x,y) \to \mathbb{R}^2(u,v)$,

$f:\ \mathbb{R}^2(u,v) \to \mathbb{R}(z)$,

$z = f(g(x,y)):\ \mathbb{R}^2(x,y) \to \mathbb{R}(z)$ — сложн. ф-я.

Их матрицы Якоби:

$$g' = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix},$$

$$z' = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

По теореме о дифференцировании сложной функции для матриц Якоби выполняется равенство: $z' = f' \cdot g'$.

Распишем подробно:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

След., пользуясь правилом умножения матриц, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

(2) $u = f(x(t), y(t), z(t))$.

Рас. функции:

$g: \mathbb{R}(t) \to \mathbb{R}^3(x,y,z)$,

$f: \mathbb{R}^3(x,y,z) \to \mathbb{R}(u)$,

$u = f(g(t)): \mathbb{R}(t) \to \mathbb{R}(u)$ сложная функция.

Их матрицы Якоби:

"прямое" d

$$g' = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} \overset{\text{т.е.}}{=} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix},$$ т.к. $x(t), y(t), z(t)$ — функции одной переменной,

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$u' = \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \end{pmatrix} \overset{\text{т.е}}{=} \begin{pmatrix} u'(t) \end{pmatrix}.$$

По теореме о дифференцировании сложной функции для матриц Якоби выполняется равенство: $z' = f' \cdot g'$.

Распишем подробно:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\\ \frac{dz}{dt}\end{pmatrix}$$

Пользуясь правилом умножения матриц, получим:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

<u>Опр</u> Производная сложной ф-ции $z = f(g(t))$, где $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ называется <u>полной производной сложной функции</u>. $(n \overset{\text{т.е.}}{=} k = 1)$

(3) $z = f(t, x(t),\ \ (t))$

Рас. ф-ции:

$g: \mathbb{R}(t) \to \mathbb{R}^3(t, x, y)$

$f: \mathbb{R}^3(t, x, y) \to \mathbb{R}(z)$

$f(g): \mathbb{R}(t) \to \mathbb{R}(z)$.

Их матрицы Якоби:

$$g' = \begin{pmatrix} \frac{dt}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$z' = \begin{pmatrix} \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

По т-ме о дифф. сложной функции для матриц Якоби выполняется равенство:

$z' = f' \cdot g'$, т.е. $\begin{pmatrix} \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$

След., $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

4) $z = f(u(x,y), v(x,y), x)$.

Аналогично:

$g : \mathbb{R}^2(x,y) \to \mathbb{R}^3(u,v,x)$

$f : \mathbb{R}^3(u,v,x) \to \mathbb{R}(z)$

$f(g) : \mathbb{R}^2(x,y) \to \mathbb{R}$

Матрицы Якоби:

$$g' = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f' = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \quad \frac{\partial f}{\partial v} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$z' = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

По т-ме о дифференцируемости сложн. ф-ции: $z' = f' \cdot g'$, т.е

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \; \frac{\partial f}{\partial v} \; \frac{\partial f}{\partial x} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

След., $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} .$$

Scanned by CamScanner

Инвариантность 1-го дифференциала относительно замены переменных

Пусть ф-ции нескольких переменных
$g: \mathbb{R}^n(x) \to \mathbb{R}^m(y)$ и $f: \mathbb{R}^m(y) \to \mathbb{R}^k(z)$
дифференцируемы в точках
x и y
соответственно, причём $y = g(x)$.

Запишем дифференциалы функций $y = g(x)$, $z = f(y)$ и сложной ф-ции $z = (f \circ g)(x)$.

$dy = g'(x)dx$, $\boxed{dz(y) = f'(y)dy,}$ $dz = (f \circ g)'dx$

матрицы Якоби

Распишем $\boxed{dz(x) =} (f \circ g)'dx = \big(f'(y) \cdot g'(x)\big)dx =$

произведение матриц Якоби

$= f'(y) \cdot \big(g'(x)dx\big) \boxed{= f'(y)dy}$

т.к. произведение матриц ассоциативно

Сравнивая формулы „в рамочках" видим, что dz имеет одинаковый вид в обоих случаях: когда переменные $y = (y_1, \dots, y_m)$ независимые или зависимые.

Зам. Для дифф-в пор. k, $k > 1$, это неверно.