Лекция 12

Неявные ф-ции, их существование и дифференцируемость.

Пусть задана векторная функция неск. переменных (ФНП)

$$F:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m.$$

Обозначим переменные в $\mathbb{R}^{n+m}$ так:

$$(x,y)=(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m).$$

Тогда m координатных ф-ций вект. ф-ции $F(x,y)$ можно записать:

$$\begin{pmatrix} f_1(x,y)\\ \vdots \\ f_m(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\end{pmatrix}$$

Рас. векторное ур-е $F(x,y)=0$. Оно равносильно системе из m ур-ий с $n+m$ неизвестными

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0\\ \vdots \\ f_m(x,y)=0\end{cases}, \text{т.е.} \boxed{\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0\\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0\end{cases}} \qquad (1)$$

Для системы (1) можно выписать матрицы Якоби:

$$\underset{\text{матрица } m\times n}{F'_x(x,y)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix} \text{ и } \underset{\text{квадратная матрица } m\times m}{F'_y(x,y)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}$$

Выясним, когда систему ур-ий (1) можно разрешить отн. переменных $y_1, \dots, y_m$, т.е. выразить их через переменные $x_1, \dots, x_n$.

Опр. Система ур-ий (1) задаёт неявную ф-ю $y = \varphi(x) : \mathbb{R}^n(x) \to \mathbb{R}^m(y)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, если $\forall x \in \mathbb{R}^n(x) \ \exists!\, y \in \mathbb{R}^m(y)$, причем $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ явл. решениями системы.

Опр. Скалярная ф-я $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ наз. <u>k раз непрерывно-дифференцируемой</u>, если она имеет все частные производные до порядка k, и они непрерывны на мн-ве X.

Обозн. мн-во всех непр.-дифф. k раз ф-ций на X: $C^k(X)$ или $C^k(X, \mathbb{R})$

Опр. Векторная ф-я $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наз. <u>k раз непрерывно-дифференцируема</u>, если все её координатные функции принадлежат классу $C^k(X)$ (т.е. явл. k раз непр.-дифф. на X)

Обозн. $C^k(X, \mathbb{R}^m)$. Мы рас. $k=1$.

Теорема о неявной функции (общий случай).

Пусть система ур-ий $F(x,y)=0$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, удовл. условиям:

1) координаты точки $(a,b) \in \mathbb{R}^{n+m}$ удовл. системе уравнений, т.е. $F(a,b)=0$;
2) ф-я $F: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ определена и непрерывно-дифференцируема в нек. окрестности V точки (a,b);
3) матрица Якоби функции $F(x,y)$ в точке (a,b) по частн. переменных y невырождена, т.е.

$$\det F'_y(a,b) \neq 0.$$

Тогда 1) $\exists$ окрестность U точки (a,b), $U \subset V$ вида $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid |x-a| < \delta_x, |y-b| < \delta_y\}$, в которой система уравнений

$$F(x,y)=0$$

разрешима относит. переменных y и тем самым задаёт неявную ф-ю

$$y=\varphi(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

где $x \in U_x^{(a)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < \delta_x\}$;

2) функция $y=\varphi(x)$ непр.-дифф. в U_x,

3) $\varphi(a)=b$ и

4) матрица Якоби $\varphi'(x)$ равна

$$\varphi'(x) = -\left[\left(F'_y(x,y)\right)^{-1} \cdot F'_x(x,y)\right]\Bigg|_{y=\varphi(x)},$$

т.е.
$$\underset{m\times n}{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}} = -\underset{m\times m}{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1}} \cdot \underset{m\times n}{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}$$

Рас. два частных случая теоремы.

Т-ма о неявной ф-ции:

Частный случай 1 Пусть уравнение $F(x,y)=0$, где $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ удовл. условиям:

1) координаты точки $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ удовл. уравнению, т.е. $F(a,b)=0$;
2) ф-я $F(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ определена и непр.-дифф. в нек. окрестности V точки (a,b), т.е. $F \in C^1(V)$
3) частная производная ф-ции $F(x,y)$ в точке (a,b) по y отлична от нуля, т.е.

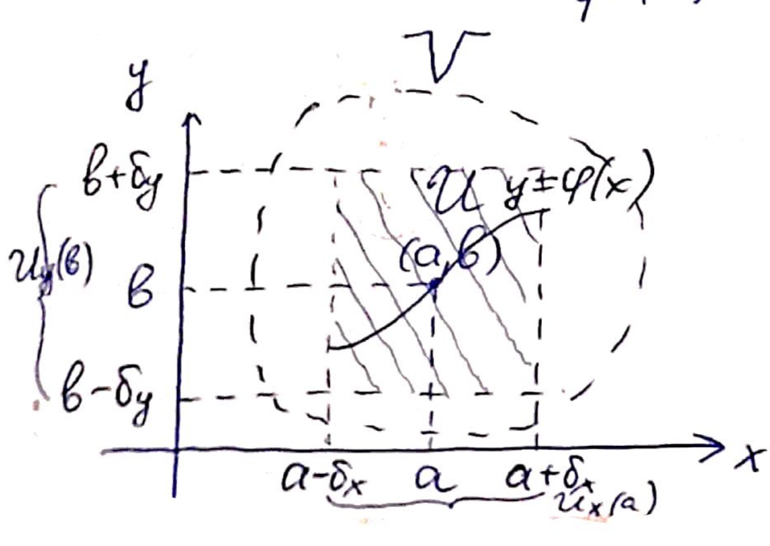
$$F'_y(a,b) \neq 0.$$

Тогда 1) $\exists$ окрестность U точки (a,b), $U \subset V$, вида $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-a| < \delta_x, |y-b| < \delta_y\}$,

в которой ур-е $F(x,y)=0$ разрешимо отн. y и тем самым задаёт неявную ф-ю $y=\varphi(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $x \in U_x^{(a)} = (a-\delta_x, a+\delta_x) \leftarrow$ интервал;

2) ф-я $y=\varphi(x)$ непрерывно-дифф. в $U_x(a)$,
3) $\varphi(a)=b$, и
4) её производная

$$\varphi'(x) = -\left.\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\right|_{y=\varphi(x)}.$$



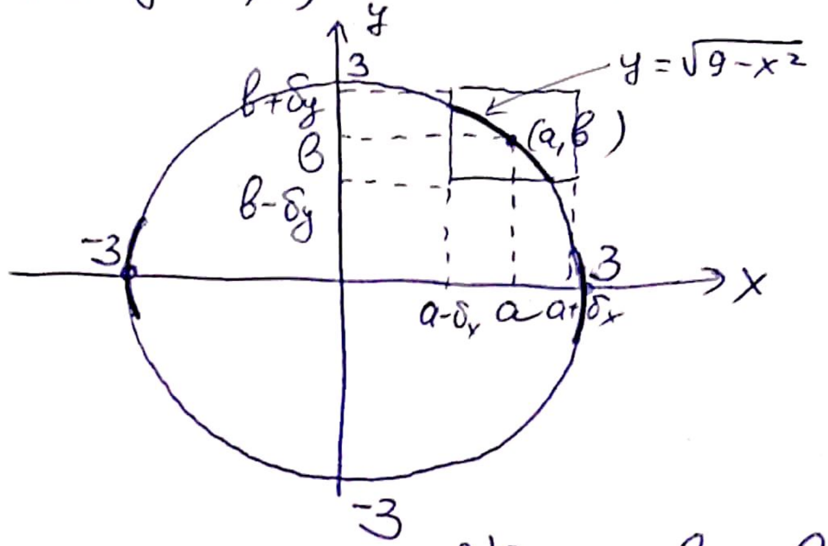
Зам. U - это прямоугольник с центром в точке (a,b)

Пример 1.

Рас. ур-е $F(x,y)=0$ вида

$$x^2+y^2-9=0$$

Это окр. с ц. $(0,0)$ и $R=3$.



Усл. 1), 2) т-мы (ч. случай) 1 вып. во всех т-х окр-ти (нужное), но усл. 3) не вып. в т-х $(\pm 3,0)$, т.к. $F'_y=2y=0 \Leftrightarrow y=0$, т.е. усл. 3) не вып. в т-х пересеч. окр. с осью Ox.

Тогда по т-ме (ч. сл. 1) 1) ур-е $x^2+y^2-9=0$ разрешимо отн. y ($y=\varphi(x)$)

(действ., можно выразить $y=\sqrt{9-x^2}$ или $y=-\sqrt{9-x^2}$)

в нек. окрестностях точек окр-ти, кроме т-к $(\pm 3,0)$:

В любых окр-тях т-к $(\pm 3,0)$ график не явл. графиком ф-ции. (двузначность)

2) для верхней и нижней полуокружн.

$y=\sqrt{9-x^2}$ | $y=-\sqrt{9-x^2}$

производная равна

$y'=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$ (1) | $y'=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ (1')

(в данном примере находится легко),

а по т-ме она равна

$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$ (2)

Проверим эту ф-лу для

произвольных точек

Пусть $x=2 \Rightarrow$ возьмём, напр., $y=\sqrt{9-2^2}=\sqrt{5} \Rightarrow (2;\sqrt{5})$ – точка в верхней полуокр.

подст. в (1):

$y'=\frac{-2}{\sqrt{9-2^2}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

подст. в (2):

$y'=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. Ответы совпадают

Пусть $x=2 \Rightarrow$ возьмём, напр., $y=-\sqrt{5} \Rightarrow (2,-\sqrt{5})$ – т. в нижн. полуокр.,

подст. в (1'): $y'=\frac{2}{\sqrt{5}}$ | подст. в (2) $y'=-\frac{2}{-\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

Ответы совпали.

Зам. В примере 1 для вычисления y' нет необходимости привлекать формулу $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$, т.к. можно получить явное выражение $y = \varphi(x)$.

Пример 2. $\underbrace{\cos x + \ln y - 5y}_{F(x,y)} = 0$

$y'(x) - ?$

Здесь выразить y из уравнения $F(x,y)=0$ нельзя. Поэтому, не зная явного выражения $y(x)$, найдём $y'(x)$ по формуле

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{-\sin x}{\frac{1}{y} - 5} =$$

$$= \frac{y \sin x}{5y - 1}.$$

Т-ма о неявной ф-ции:
Частный случай 2. Пусть уравнение $F(x,y)=0$,
где $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}$ удовл. условиям:

1) координаты точки $(a,b) \in \mathbb{R}^{n+1}$ удовл. уравнению, т.е. $F(a,b)=0$;
2) функция $F(x,y): \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ определена и непр.-дифф. в нек. окрестности V точки (a,b), т.е. $F\in C^1$
3) частная производная ф-ции $F(x,y)$ в точке (a,b) по y отлична от нуля, т.е.

$$F'_y(a,b)\neq 0.$$

Тогда 1) $\exists$ окрестность U точки (a,b), $U\subset V$, вида $\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid x\in U_{\delta_x}(a), |y-b|<\delta_y\}$, в которой ур-е $F(x,y)=0$ разрешимо отн. y и тем самым задаёт неявную ф-ю $y=\varphi(x)$, где $x\in U_{\delta_x}(a)$, $U_{\delta_x}(a)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x-a|<\delta_x\}$;

2) ф-я $y=\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема в $U_{\delta_x}(a)$,

3) $\varphi(a)=b$, и

4) её матрица Якоби

$$\left(\varphi'_{x_1} \dots \varphi'_{x_n}\right) = -\frac{1}{F'_y(x,y)} \underbrace{\left(F'_{x_1}(x,y) \dots F'_{x_n}(x,y)\right)}_{\text{это матрица Якоби ф-ции } F(x,y) \text{ по переменным } x_1,\dots,x_n.}\Bigg|_{y=\varphi(x)},$$

т.е. $\varphi'_{x_k} = -\dfrac{F'_{x_k}(x,y)}{F'_y(x,y)}\Bigg|_{y=\varphi(x)}$

<u>Пример 3</u>. Дано ур-е $F(x,y,z)=0$.

Пусть в некоторой окрестности V точки (x,y,z) вып. условия т-мы о неявной функции, в частности, $F'_z(x,y,z)\neq 0$.

Тогда $\exists$ окрестность $U\subset V$, в которой ур-е разрешимо относит. переменной z, т.е. $\exists$ неявная ф-я $z=\varphi(x,y)$, непр., дифференцируемая в U, причём её матрица Якоби

$$(\varphi'_x\ \varphi'_y)=-\frac{1}{F'_z}(F'_x\ F'_y),$$

т.е. $\varphi'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$, $\varphi'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

<u>Зам.</u> Т-ма о неявн. ф-ции явл. достат, но не необходимым условием $\exists$-я неявн. ф-ции.

Док-во (только вывод формул для φ'_{x_k}) для второго частного случая.

Дано ур-е $F(x_1,\dots,x_n,y)=0$ и выполняются условия теоремы (перечислите!)

Тогда $\exists\ y=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ с требуемыми свойствами (перечислите) ← без док-ва.

Подставим $y=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ в ур-е

$$F(x_1,\dots,x_n,\varphi(x_1,\dots,x_n))=0.$$

Из заключения т-мы о неявной ф-ции следует, что левая часть этого ур-я непр.-дифференцируема. Найдём частные производные от лев. и прав. части (от правой — равны нулю) по правилу дифф-я сложной ф-ции:

$$F'_{x_i}+F'_y\cdot\varphi'_{x_i}=0 \quad \forall i=1,\dots,n.$$

Т.к. $F'_y(a,b)\neq 0$, то в нек. окрестности т. a можно выразить

$$\varphi'_{x_i}(x)=-\frac{F'_{x_i}(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Ч.т.д.

Производная функции по направлению. Градиент.

Опр Пусть скалярная ф-я нескольких перем.

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

определена в нек. окр. $U(a) \subset \mathbb{R}^n$,

пусть $\vec{n}$ – любой ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$,

$\vec{n}_0 = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ – единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{n}$;

$f(a+s\vec{n}_0)-f(a)$ приращение ф-ции в направлении вектора $\vec{n}$, $s \in \mathbb{R}$, $s>0$.

Производной ф-ции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $\vec{n}$ наз. число

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = \lim_{s \to +0} \frac{f(a+s\vec{n}_0)-f(a)}{s},$$

если этот предел $\exists$.

Опр Градиентом ф-ции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ наз. вектор из частных производных

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right),$$

если все частные производные $\exists$.

Теорема.

Пусть ФНП $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифф. в т. $a \in \mathbb{R}^n$,
$\vec{n}$ – любой ненулевой вектор,
$\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – ед. вектор в напр-ии $\vec{n}$.

Тогда $\exists$ производная f по напр-ю $\vec{n}$ в т. a, причём

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}\nu_1 + \dots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}\nu_n$$

Док-во.

Рас. сложную ф-ю $g(s) = f(x(s))$ от одного переменного s, где $x(s) = a + s\vec{n_0}$, т.е.

$$g(s) = f(x(s)) = f(a_1 + s\nu_1, \dots, a_n + s\nu_n) = f(a + s\vec{n_0})$$

$$g(0) = f(a)$$

Ф-я $g(s)$ дифф. в т. $s=0$.

Найдем производную 2-мя способами:

как от сложн. ф-ции

$$\left.\frac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{df(a_1+s\nu_1, \dots, a_n+s\nu_n)}{ds}\right|_{s=0} =$$

$$= \left.\frac{\partial f(s)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \dots + \frac{\partial f(s)}{\partial x_n}\frac{dx_n}{ds}\right|_{s=0} =$$

$$= \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}\nu_1 + \dots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}\nu_n \; ; \qquad (1)$$

и по определению произв.:

$$\left.\frac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} = \lim_{s\to 0}\frac{g(s)-g(0)}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{f(a+s\vec{n}_0)-f(a)}{s} =$$

$$\overset{\text{односторонн. пределу}}{=} \lim_{s\to +0}\frac{f(a+s\vec{n}_0)-f(a)}{s} =$$

$$= \frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}}. \qquad (2)$$

Из (1), (2) получим треб. ф-лу.

Ч.т.д.

Сл. $\boxed{\dfrac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = (\operatorname{grad} f(a), \vec{n}_0)}$ ← скалярн. произв.

это ф-ла для выч. $\dfrac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}}$ в т. a

Сканировано с CamScanner

Пример 4 $f(x,y,z) = x^2 - 2y^3 + \cos xz$

$\vec{n} = (-1, 2, 2)$

$M(2, 1, 0)$

Найдём производную ф-ции f в т. M по направлению вектора $\vec{n}$.

Решение.

1) Найдём $\operatorname{grad} f(M) = \left(\frac{\partial f(M)}{\partial x}, \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \frac{\partial f(M)}{\partial z}\right)$:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - z\sin xz \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M) = 2\cdot 2 - 0\cdot \sin(2\cdot 0) = 4$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -6y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(M) = -6\cdot 1^2 = -6$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -x\sin xz \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(M) = -2\cdot \sin(2\cdot 0) = 0$

След, $\operatorname{grad} f(M) = (4, -6, 0)$

2) Найдём ед. вектор $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$.

$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \Rightarrow \vec{n}_0 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

3) $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(M) = (\operatorname{grad} f(M), \vec{n}_0) = 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + (-6)\cdot\frac{2}{3} + 0\cdot\frac{2}{3} = -\frac{16}{3}$.

Зам. (важное!) Производная ф-ции по направлению — это односторонний предел. Частная производная ф-ции — это двусторонний предел.

Если $\exists$ частная произв. $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, то $\exists$ произв. ф-ции по направлению $\vec{n}_i = (0, \ldots, 0, \underset{\uparrow \atop i\text{-я координата}}{1}, 0, \ldots, 0)$, причём $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \vec{n}_i}$.

Обратно может быть неверно, т.е. возможно $\exists \frac{\partial f}{\partial \vec{n}_i}$, но $\nexists \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Геом. смысл произв. по направлению (для $z = f(x,y)$):

$\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = \operatorname{tg} \theta$, где θ — угол наклона односторонней касательной в т. a к сечению графика ф-ции $z = f(x,y)$ плоскостью, прох. через т. a и параллельно векторам $\vec{n}$ и $\vec{k}$ (это напр. вектор оси Oz).

Физич. смысл произв. по направлению:

это скорость роста ф-ции в направлении вектора $\vec{n}$.

Свойства градиента функции и производной ф-ции по направлению

1. Если скал. ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифф. в т. $a \in \mathbb{R}^n$, то $\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = \underbrace{np_{\vec{n}}\, grad f(x)}$

это проекция $grad f(x)$ на направление вектора $\vec{n}$

Док-во.

1) По т-ме $\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = (grad f(a), \vec{n}_0)$.

2) по св-ву скал. произведения
$$(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{y}| \cdot np_{\vec{y}} \vec{x}.$$

3) $\vec{n}_0$ - ед. вектор $\Rightarrow |\vec{n}_0| = 1$.

Из 1), 2), 3) $\Rightarrow \frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = np_{\vec{n}_0} grad f(a) = np_{\vec{n}} grad f(a)$

2. Если скал. ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифф. в т. $a \in \mathbb{R}^n$, $\vec{n} = grad f$,
то $\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = |grad f(a)|$

Док-во. $\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = (grad f(a), \vec{n}_0) = \left(grad f(a), \frac{grad f(a)}{|grad f(a)|}\right) =$

$= \frac{1}{|grad f(a)|} (grad f(a), grad f(a)) =$

$= \frac{1}{|grad f(a)|} \cdot |grad f(a)|^2 = |grad f(a)|.$

3. Если скал. ф-я $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ дифф. в т. $a\in\mathbb{R}^n$, то в этой точке вектор $\operatorname{grad} f(a)$ указывает на направление наибольшего роста ф-ции.

4. Если скал. ф-я $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ дифф. в т. $a\in\mathbb{R}^n$, то в этой точке вектор $-\operatorname{grad} f(a)$ указывает на направление наибольшего убывания ф-ции.

5. Если скал. ф-я $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ дифф. в т. $a\in\mathbb{R}^n$, то наибольшая скорость

возрастания	убывания

функции в т. a равна

$\lvert\operatorname{grad} f(a)\rvert$	$-\lvert\operatorname{grad} f(a)\rvert$.

Док-во св-ва ③.

Рас. 2 вектора $\vec{n} = \operatorname{grad} f(a)$ и $\vec{m} \not\uparrow\uparrow \vec{n}$.

Покажем, что $\dfrac{\partial f(a)}{\partial \vec{m}} < \dfrac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}}$.

Рас.

$$\vec{m}_0 = \frac{\vec{m}}{|\vec{m}|} \text{ и } \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\operatorname{grad} f(a)}{|\operatorname{grad} f(a)|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(a) = |\operatorname{grad} f(a)| \cdot \vec{n}_0.$$

Найдём $\dfrac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}}$ и $\dfrac{\partial f(a)}{\partial \vec{m}}$.

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{по св-ву} \\ ②}}{=} |\operatorname{grad} f(a)|$$

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{m}} = (\operatorname{grad} f(\vec{a}), \vec{m}_0) =$$

$$= (|\operatorname{grad} f(a)| \cdot \vec{n}_0, \vec{m}_0) =$$

$$= |\operatorname{grad} f(a)| \cdot (\vec{n}_0, \vec{m}_0) =$$

$$= |\operatorname{grad} f(a)| \cdot \underbrace{|\vec{n}_0|}_{=1} \underbrace{|\vec{m}_0|}_{=1} \underbrace{\cos(\widehat{\vec{n}_0, \vec{m}_0})}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq |\operatorname{grad} f(a)| = \frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}}.$$

ч.т.д.