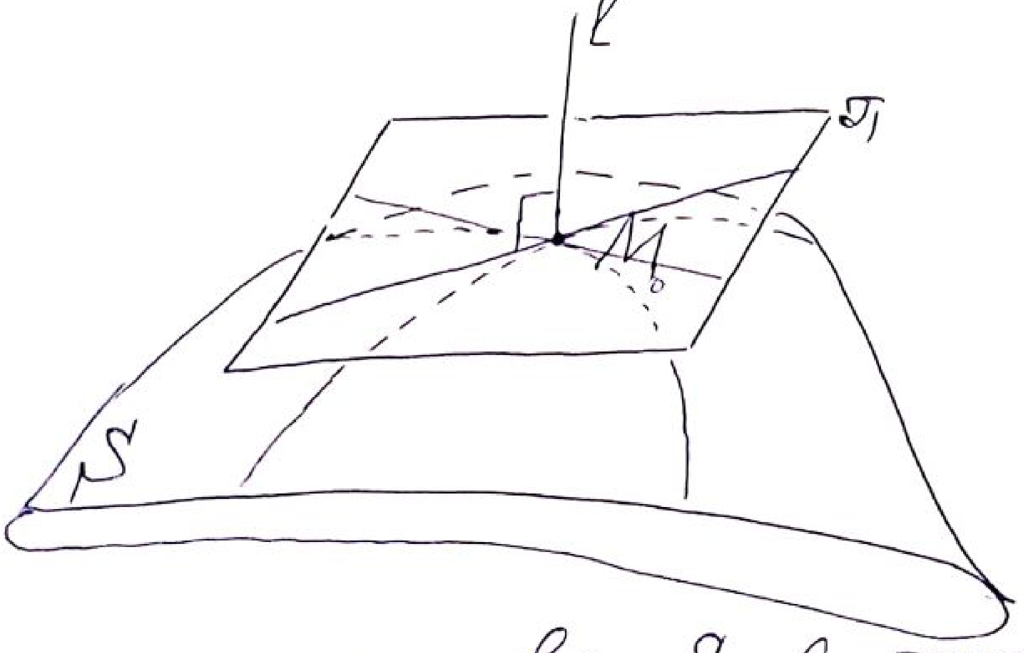
Лекция 13.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Опр Касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0 наз. плоскость π, проходящая через точку M_0 и содержащая касательные, построенные в точке M_0 ко всем кривым, лежащим на поверхности S и проходящим через точку M_0.

Нормалью к поверхности S в точке M_0 наз. прямая l, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости к поверхности S в этой точке.



Когда для пов-ти S в точке M_0 существуют касат. пл. π и нормаль l?

Теорема об условиях существования касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной ур-ем $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Пусть поверхность S

1) задана уравнением $F(x,y,z)=0$ в прямоуг. системе координат $Oxyz$,
2) функция $F(x,y,z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$,
3) $\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Тогда в точке M_0 $\exists$ касат. плоскость π и нормаль l к пов-ти S, причем их ур-я:

$$\pi: \quad F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

$$l: \frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Док-во.

1) Пусть $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ любая кривая:
а) $\gamma(t)$ лежит на поверхности S,
б) проходит через току M_0 при $t=0$,
в) векторная ф-я $\gamma:\mathbb{R}(t)\to\mathbb{R}^3(x,y,z)$ дифф. в т. $t=0$, причём $\gamma'(0)=(x'(0),y'(0),z'(0))$ – ненулевой вектор.

Тогда

а) $\Rightarrow F(x(t),y(t),z(t))=0$ (*)

б) $\Rightarrow \gamma(0)=(x(0),y(0),z(0))=(x_0,y_0,z_0)=M$

в) $\Rightarrow$ сложная ф-я $F(\gamma(t))$ дифф. в т. $t=0$.

Продифференцируем равенство (*) по t и подставим $t=0$:

$$\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cdot x'(0)+\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cdot y'(0)+\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cdot z'(0)=0.$$

Это означает, что скалярное произведение

$$(\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0),\ \gamma'(0))=0.$$

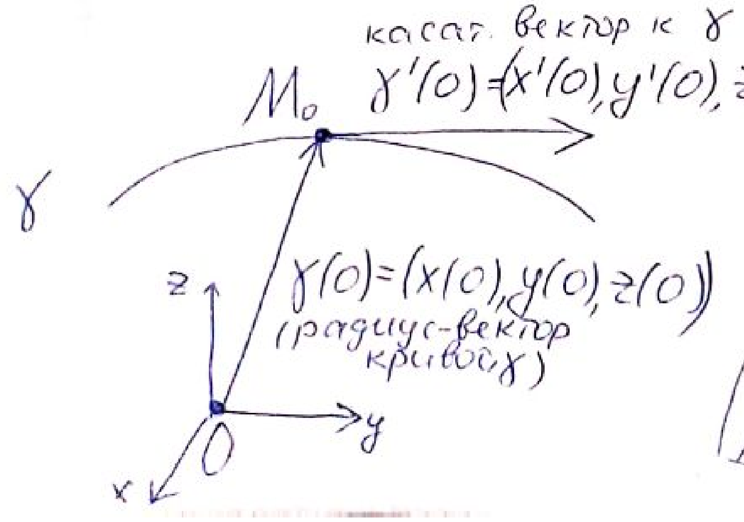
Зам. В прямоуг. сис. к-т скал. произв. вычисляется стандартно.

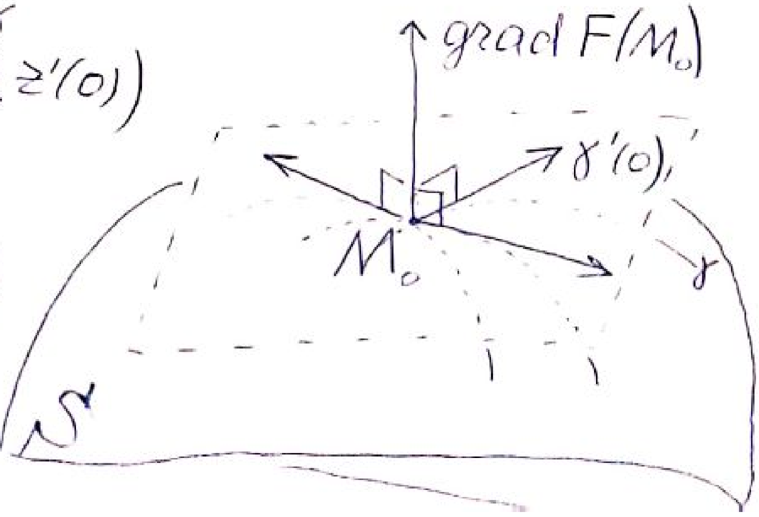
Т.к. $\gamma'(0)=(x'(0),y'(0),z'(0))$ - ненулевой вектор, касательный к кривой $\gamma(t)$ в т. M_0, а $\gamma(t)$ - любая кривая,

то $\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)\perp$ касат. вектору любой кривой, лежащей на пов-ти S, в точке M_0.

Это озн., что $\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)\perp S$ в т. M_0

(нормальный вектор к пов-ти S в т. M_0)





(2) Напишем

а) уравнение плоскости, проходящей через т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\perp$ вектору $\text{grad}\, F(x_0, y_0, z_0)$,

б) канонич. ур-е прямой, проходящей через т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $\text{grad}\, F(x_0, y_0, z_0)$.

Получим требуемые уравнения.
Данные плоскость и прямая явл. касат. пл. π и нормалью ℓ к пов-ти S в т. M_0, т.е. существуют, и мы нашли их ур-я.

ч.т.д.

<u>Сл</u>. Пусть пов-ть S явл. графиком ф-ции $z = f(x, y)$, дифференцируемой в т. (x_0, y_0).
Тогда в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, $\exists$ касат. пл. и нормаль к пов-ти, причём их ур-я:

π: $$f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

ℓ: $$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Док-во. Перепишем ур-е $z = f(x, y)$ в виде $\underbrace{f(x, y) - z}_{F(x,y,z)} = 0$ и применим теорему.

Геометрический смысл дифференциала ф-ции двух переменных.

1. Пусть функция $f: \mathbb{R}^2(x,y) \to \mathbb{R}(z)$ (т.е. $z=f(x,y)$) дифференцируема в точке (x_0,y_0). Тогда её дифференциал в точке (x_0,y_0) равен

$$dz = f'_x(x_0,y_0)\cdot dx + f'_y(x_0,y_0)\,dy.$$

2. График ф-ции $z=f(x,y)$ явл. поверхностью в пр-ве. Из пред. темы следует, что $\exists$ касат. плоскость к поверхности в т. (x_0,y_0,z_0), где $z_0=f(x_0,y_0)$, и её ур-е

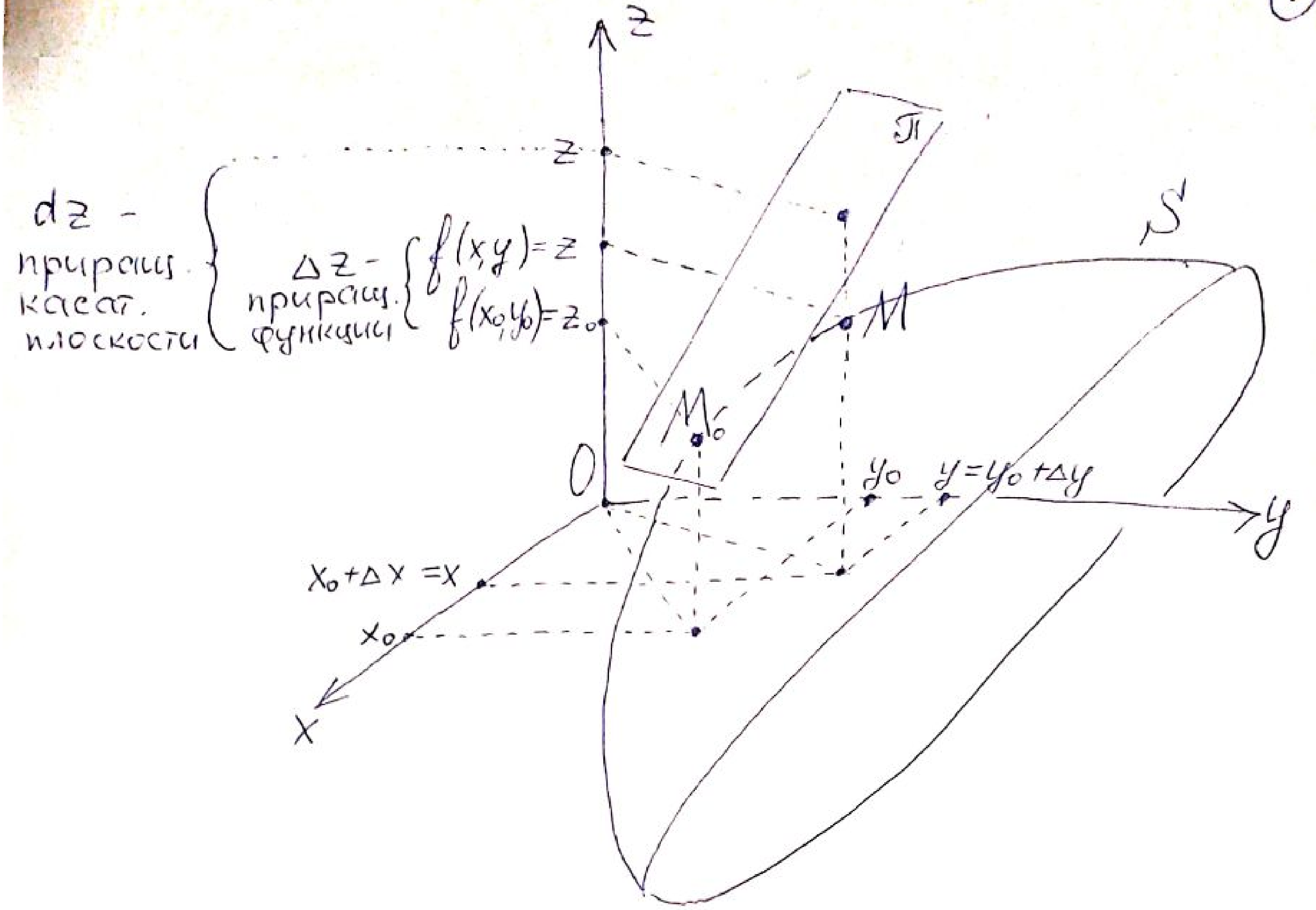
$$f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) - (z-z_0) = 0.$$

Выразим приращение $z-z_0$ для касат. плоскости:

$$z-z_0 = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) =$$
$$= f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y.$$

Напомним, что для независимых переменных $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$.

Сравнивая формулы из п. 1 и п. 2, получаем, что приращение ($z-z_0$) координаты z точки на касат. плоскости, соотв. приращениям $\Delta x, \Delta y$ переменных x и y, равно дифференциалу ф-ции, и наоборот.


z
Z
π
S
dz -
прираш.
касат.
плоскости
Δz -
прираш.
функции
f(x,y)=z
f(x0,y0)=z0
M
M0
O
y0
y=y0+Δy
y
x0+Δx=x
x0
x

Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

Теорема 1 Пусть скалярная ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в нек. δ-окрестности $U_\delta(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$

1) все частные производные до порядка $m+1$,
2) непрерывные в окрестности $U_\delta(x_0)$.

Тогда $\forall x \in U_\delta(x_0)\ \exists \theta \in (0,1)$:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(x_0)}{k!} + \frac{d^{m+1} f(x_0 + \theta(x - x_0))}{(m+1)!}$$

(формула Тейлора с остат. членом в форме Лагранжа)

Теорема 2 Пусть скалярная ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в нек. δ-окрестности $U_\delta(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$

1) все частные производные до порядка $m+1$,
2) причем все частные производные до порядка m непрерывны в окрестности $U_\delta(x_0)$, а
3) все частные производные порядка $m+1$ непрерывны в точке x_0. Тогда $\forall x \in U_\delta(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(x_0)}{k!} + o(|x - x_0|^m).$$

(формула Тейлора с остат. членом в форме Пеано)