Лекция 14.

Экстремум функции нескольких переменных.

Опр Пусть скалярная функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$.

Точка a наз. точкой локального

максимума	минимума

функции $f(x)$, если $\exists$ проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ такая, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$

$f(x) \leq f(a)$	$f(x) \geq f(a)$

Точки лок. максимума и лок. минимума называются точками локального экстремума функции.

Если неравенства строгие, то говорят о точках строгого локального максимума, строгого локального минимума (строгого локального экстремума).

Значение функции $f(a)$ называется локальным

максимумом	минимумом

(локальным экстремумом) ф-ции $f(x)$.

или (для строгих неравенств)

строгим локальным

максимумом | минимумом

(строгим локальным экстремумом).

Теорема (Необходимые условия экстремума функции нескольких переменных)

Пусть для скалярной функции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1) точка $a \in \mathbb{R}^n$ явл. точкой экстремума

2) и $\exists$ частная производная $f'_{x_i}(a)$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$.

Тогда $f'_{x_i}(a) = 0$.

Следствие 1. Пусть для скалярной ф-ции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1) точка $a \in \mathbb{R}^n$ явл. точкой экстремума.

2) и $\exists$ $\operatorname{grad} f(a)$.

Тогда $\operatorname{grad} f(a) = 0$

Следствие 2. Пусть для скалярной ф-ции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1) точка $a \in \mathbb{R}^n$ явл. точкой экстремума

2) и ф-я f дифференцируема в точке a.

Тогда $df(a) = 0$.

Док-во теоремы.

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ имеет лок. экстремум в точке $a=(a_1,\dots,a_n)$ и $\exists f'_{x_i}(a)$.

Тогда $g(t)=f(a_1,\dots,a_{i-1},t,a_{i+1},\dots,a_n)$ имеет лок. экстремум в точке a_i и $\exists g'(a_i)=$
$=f'_{x_i}(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n)$,
причём из курса мат. анализа $g'(a_i)=0$.

След., $f'_{x_i}(a)=0$. ч.т.д.

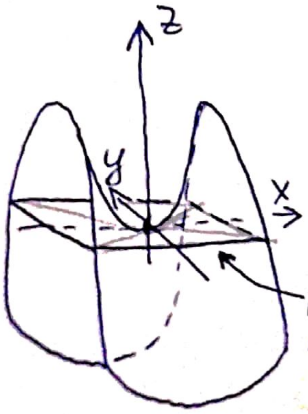
Док-во сл. 1 и сл. 2

$$\operatorname{grad} f(a)=(f'_{x_1}(a),\dots,f'_{x_n}(a))$$
$$df(a)=f'_{x_1}(a)dx_1+\dots+f'_{x_n}(a)dx_n$$ ч.т.д.

Зам. Необх. условие не явл. достаточным.

Пример. $z=x^2-y^2$.

$$\begin{cases} z'_x=2x \\ z'_y=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases}$$ в т. $(0,0)$



Однако т. $(0,0)$ не явл. т. экстремума

касат. плоскость к графику ф-ции в точке $(0,0)$ явл. горизонтальной (здесь совпадает с Oxy)

Опр. Пусть скалярная функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$.

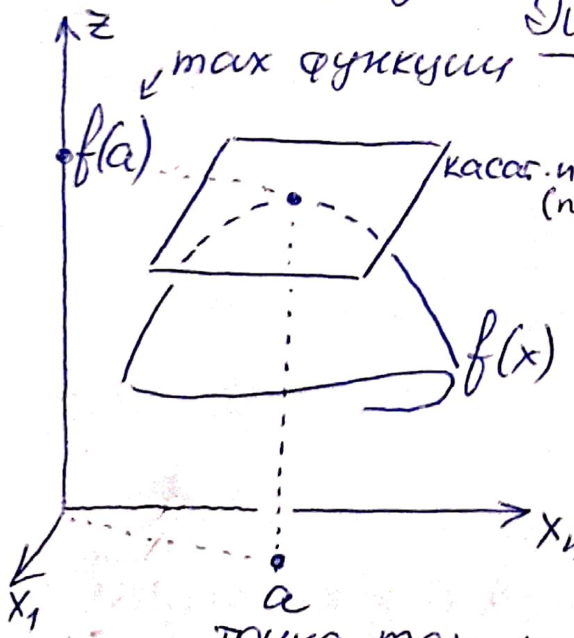
Точка a наз. <u>стационарной точкой функции $f(x)$</u>, если $\operatorname{grad} f(a) = 0$.

Точка a наз. <u>критической точкой функции $f(x)$</u>, если

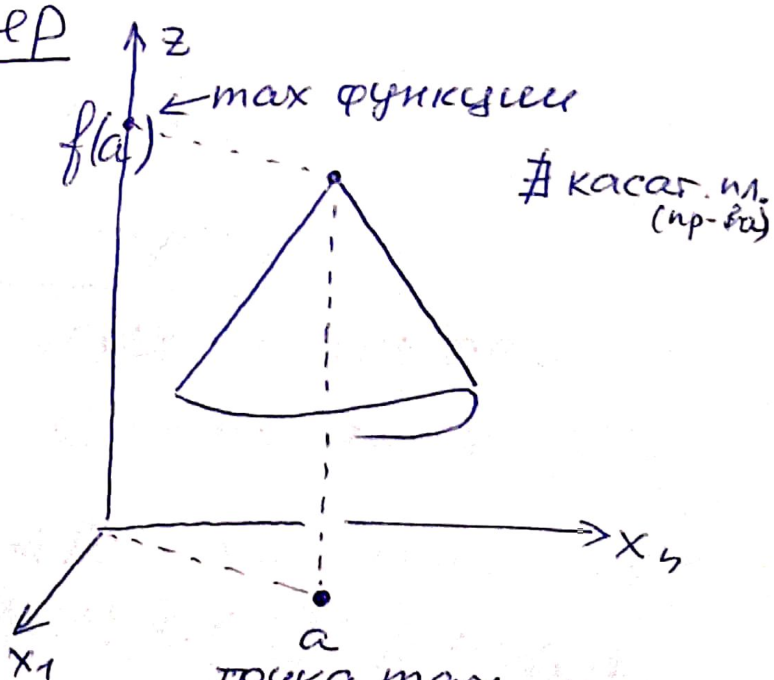
1) $\operatorname{grad} f(a) = 0$ (т.е. a – стац. точка) или 2) $\nexists \operatorname{grad} f(a)$.

Точки экстремума функции надо искать среди её критических точек.

<u>Пример</u>



точка max и стационарная точка ($\operatorname{grad} f(a)=0$)



точка max, но не стационарная точка ($\nexists \operatorname{grad} f(a)$)

Зам. В стац. точках касат. пл. к графику ф-ции $z=f(x,y)$ явл. горизонтальной

критические точки

Теорема (Достаточные условия экстремума).

Пусть скалярная функция $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(1) дважды непрерывно дифференцируема в нек. окрестности,

(2) $\operatorname{grad} f(a)=0$, и

(3) квадратичная форма $d^2 f(a)$

1) положительно определённая	2) отрицательно определённая	3) знакопеременная

Тогда в точке a функция $f(x)$

имеет строгий локальный		не имеет экстремума.
минимум	максимум	

Частный случай.

Рас. достаточные условия экстремума для функции двух переменных $z=f(x,y)$.

Вместо точки $a \in \mathbb{R}^n$ рас. точку (a,b).

Тогда $d^2 f(a,b) = f''_{xx}(a,b)\,dx^2 + 2f''_{xy}(a,b)\,dx\,dy + f''_{yy}(a,b)$.

Пусть в соответствии с теоремой

1) вторые частные производные $\exists$ и непрерывны в ~~точке~~ окр $U(a,b)$ (a,b),

2) первые частные производные
$f'_x(a,b)=0$, $f'_y(a,b)=0$.

3) Для исслед. $d^2f(a,b)$ рас. матрицу Гессе

$$f''(a,b)=\begin{pmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{pmatrix} \overset{\text{обозн}}{=} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Пусть $AC-B^2 \neq 0$ и

$A>0$, $\underbrace{AC-B^2}_{\det f''(a,b)}>0$	$A<0$ $\underbrace{AC-B^2}_{\det f''(a,b)}>0$	$\underbrace{AC-B^2}_{\det f''(a,b)}<0$.

Тогда в точке (a,b) функция $f(x,y)$

имеет строгий локальный минимум	максимум.	не имеет экстремума.

<u>Зам</u>. Если $AC-B^2=0$, то ф-я $f(x,y)$ может иметь, а может и не иметь в точке (a,b) лок. экстремум. Требуется дополнит. исследование.

Напоминание из МА.

Т-ма (Достат. условие лок. экстремума)

Пусть ф-я $y=f(x)$

1) дважды дифф. в нек. окр. т. a,

2) $f'(a)=0$ и

3) $f''(a)>0$ | $f''(a)<0$

Тогда в т. a ф-я $f(x)$ имеет строгий локальный

минимум | максимум.

<u>Пояснение.</u> $\exists\, U(a) : \forall x \in \mathring{U}(a)$

$$f(x)-f(a) \approx \underbrace{f'(a)}_{=0}(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)\underbrace{(x-a)^2}_{>0}$$

След., знаки $f(x)-f(a)$ и $f''(a)$ совпадают.

Пусть $\forall x \in \mathring{U}(a)$

$f''(a)>0$	$f''(a)<0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$f(x)-f(a)>0$	$f(x)-f(a)<0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$f(x)>f(a)$,	$f(x)<f(a)$

След.,

a – т. мин.	a – т. макс.

Аналогично в ФНП.

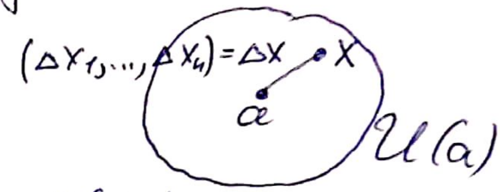
для $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) - f(a) \approx \underbrace{df(a)}_{\substack{\parallel \text{ в стац. точке } a \\ 0}} + \frac{1}{2!} d^2 f(a)$$

След., знаки $f(x) - f(a)$ и $d^2 f(a)$ совпадают.

$$d^2 f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(a)\, \Delta x_i \Delta x_j, \text{ где } \Delta x_i = x_i - a_i.$$

Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$



$d^2 f(a) > 0$	$d^2 f(a) < 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$f(x) - f(a) > 0$	$f(x) - f(a) < 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$f(x) > f(a)$	$f(x) < f(a)$

След.,

a – т. мин.	a – т. макс.

Сканировано с CamScanner