Лекция 15.

Условный экстремум функции нескольких переменных

Опр. Пусть скалярная ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
и векторная ф-я $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,
$(m < n)$
определены в нек. окрестности т. $a \in \mathbb{R}^n$,
$\varphi(x) = 0$ т.е. $\left.\begin{matrix} \varphi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(x) = 0 \end{matrix}\right|$ нек. условие.

Точка a наз. точкой условного лок. максимума | минимума функции $f(x)$, если
$\exists$ проколотая окр-ть $\mathring{U}(a): \forall x \in \mathring{U}(a)$, удовлетворяющих условию $\varphi(x) = 0$,
$f(x) \le f(a)$ | $f(x) \ge f(a)$

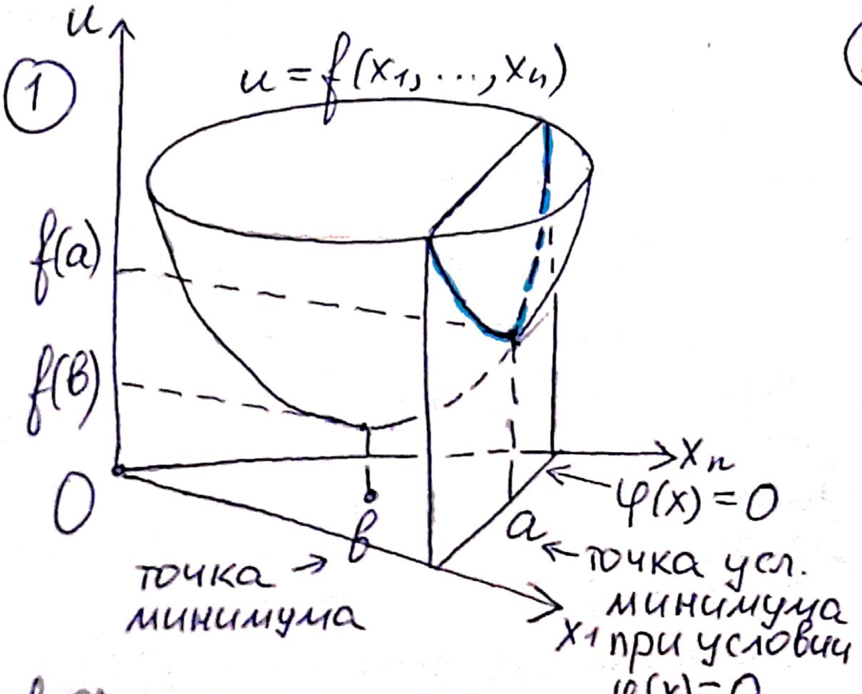
Точки условного лок. макс. и мин называются точками усл. лок. экстремума. Если неравенства строгие, то говорят о точках строгого усл. лок. экстремума (строгого усл. лок. макс или мин)

<u>Условным локальным экстремумом ф-ции</u> (<u>условным лок. максимумом</u> или <u>условным лок. минимумом</u>) наз. <u>значение</u> $f(a)$ функции f в точке условного лок. экстремума (в точке усл. лок. макс. или в точке усл. лок. мин.)

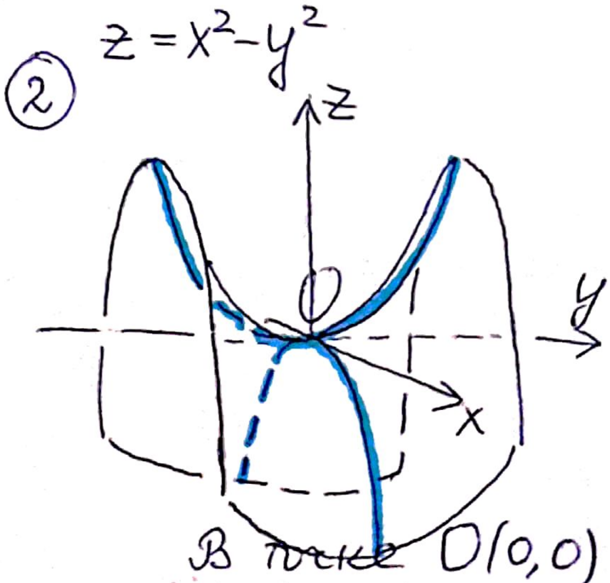
Для строгих неравенств условный лок. экстремум ф-ции наз. <u>строгим</u>.

Условие $\varphi(x)=0$ наз. <u>условием связи</u> (<u>условиями связи</u> при $m>1$). Это m уравнений с n неизвестными $x_1, \dots, x_n$.

Примеры.



$f(b)$ – минимум ф-ции
$f(a)$ – усл. минимум ф-ции при условии $\varphi(x)=0$



В точке $O(0,0)$ функция имеет лок. макс. при усл. $y=0$ и лок. мин. при усл. $x=0$.

Краткая запись задачи исслед. ф-ции

на экстремум:	на условный экстремум:
$f(x) \to extr$ (1)	$f(x) \to extr,$ $\varphi(x)=0$ (2)

Функция $f(x)$ наз. целевой функцией.
Задача (1) также наз. задачей на безусловный экстремум

Методы решения задачи на условный экстремум.

I. Метод исключения части переменных.

Пусть для уравнений связи ~~т штук~~ переменных

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\dots x_{n-m}, x_{n-m+1},\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1,\dots,x_{n-m}, x_{n-m+1},\dots,x_n)=0 \end{cases}$$

выполняются условия теоремы о неявной ф-ции и можно выразить

$$\begin{cases} x_{n-m+1} = \psi_1(x_1,\dots,x_{n-m}) \\ \vdots \\ x_n = \psi_m(x_1,\dots,x_{n-m}) \end{cases}$$

Подставим в ф-ю f и получим ф-ю от $n-m$ переменных:

$$f(x_1,\dots,x_{n-m}, \psi_1(x_1,\dots,x_{n-m}),\dots \psi_m(x_1,\dots,x_{n-m})) = g(x_1,\dots,x_{n-m}).$$

Исследуем функцию $g(x_1, \dots, x_{n-m})$ на безусловный экстремум (см. лекц. 14).

II. Метод Лагранжа (более общий)

Опр. Функцией Лагранжа для задачи на усл. экстремум

$$f(x) \to \text{extr},$$

$$\varphi_1(x) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_m(x) = 0$$

наз. ф-я $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x)$.

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ наз. множителями Лагранжа.

Зам. В векторном виде пишут

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \varphi(x), \text{ т.е.}$$

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \underbrace{(\lambda_1 \dots \lambda_m)}_{\text{наз. вектором множителей Лагранжа}} \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix};$$

$L : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ — скалярная ф-я.

Вместо задачи об усл. экстр. ф-ции $f(x)$ решают задачу о безусл. экстр. ф-ции $L(x, \lambda)$:

$$L(x, \lambda) \to \text{extr}.$$

Теорема (Необходимое условие условного экстремума ф-ции неск. перем.)

Пусть

1) скалярная ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и векторная ф-я $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m<n)$ непрерывно дифференцируемы в нек. окрестности т. $a \in \mathbb{R}^n$,

2) т. a явл. точкой условного экстремума ф-ции $f(x)$ при условиях связи $\varphi(x)=0$,

3) ранг матрицы Якоби $\varphi'(a)$ ф-ции $\varphi(x)$ в т. a равен m, т.е. $\operatorname{rg} \varphi'(a) = m$.

Тогда

$\exists$ множители Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$:

$$\begin{cases} L'_{x_1}(a,\lambda)=0 \\ \vdots \\ L'_{x_n}(a,\lambda)=0 \\ L'_{\lambda_1}(a,\lambda)=0 \\ \vdots \\ L'_{\lambda_m}(a,\lambda)=0 \end{cases} \qquad (3)$$

Решения системы (3) явл. стационарными точками ф-ции Лагранжа.

Зам 1. Последние m условий в системе — это

$\varphi_1(a)=0$

$\vdots$

$\varphi_m(a)=0$

Зам. 2 Условие 3) теоремы: $rg\,\varphi'(a)=m$,

т.е. $rg\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}\begin{matrix} \leftarrow grad\,\varphi_1(a) \\ \\ \leftarrow grad\,\varphi_m(a) \end{matrix} = m$,

означает лин. независимость векторов $grad\,\varphi_1(a), \dots, grad\,\varphi_m(a)$.

В частном случае при $m=1$ условие $rg\left(\frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_n}\right)=1$ означает, что $grad\,\varphi(a)\neq\vec{0}$ (ненулевой)

Зам. 3 В частном случае при $n=2, m=1$ для
$$z=f(x,y)\to extr$$
$$\varphi(x,y)=0$$
функция Лагранжа имеет вид
$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$.
Необх. условия усл. экстремума (система) имеет вид

$$\begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

Зам. 4. означает $grad f(x,y)=-\lambda\, grad\,\varphi(x,y)$ в т-х „подозрит." на усл. экстремум.

Решения сист. (3) — точки „подозрит." на усл. экстр. Их надо проанализировать. Как это делать?

Пусть $(a,\lambda) \overset{\text{т.е.}}{=} (a_1,\dots,a_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ – одно из решений системы (3).

Обозн. $\lambda_a = (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ – набор для данного a.

Подставим λ_a в функцию Лагранжа и рас. её как функцию от x:

$$L(x) = L(x, \lambda_a).$$

Исследуем $L(x)$ в точке a на экстремум с помощью квадр. формы $d^2L(a)$, но ограничим $d^2L(a)$ на лин. подпр-во

$$H = \{(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n) \mid \text{решения системы } d\varphi(a)=0\} =$$

$$= \left\{(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n) \;\middle|\; \begin{cases} d\varphi_1(a)=0 \\ \vdots \\ d\varphi_m(a)=0 \end{cases} \right\} =$$

это однородная СЛАУ относит. dx_i. (4)

$$= \left\{(dx_1,\dots,dx_n) \;\middle|\; \begin{cases} \frac{\partial\varphi_1(a)}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial\varphi_1(a)}{\partial x_n}dx_n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi_m(a)}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial\varphi_m(a)}{\partial x_n}dx_n = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{(dx_1,\dots,dx_n) \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_m(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{m\times 1} \right\}.$$

это матрица Якоби $\varphi'(a)$ векторной функции $\varphi(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке a.

Итак, мы будем анализировать

$d^2L(a)\big|_H$ – квадр. форму не на всём пр-ве $\mathbb{R}^n(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$,

а на подпр-ве H,

определяемом условием связи $\varphi(x)=0$, т.е. условием $d\varphi(a)=0$

Размерность подпр-ва H зависит от ранга $\varphi'(a)$ (матр. Якоби).

Теорема (Достаточное условие условного экстремума ф-ции неск. перем.)

Пусть

1) скалярная ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и векторная ф-я $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m<n)$ дважды непрерывно дифференцируемы в нек. окрестности т. $a \in \mathbb{R}^n$,

2) $\varphi(a)=0$, rg $\varphi'(a)=m$,

3) координаты точки $(a_1, \dots, a_n, \overbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_m}^{\lambda_a}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ явл. решением системы ур-ий

$$\begin{cases} L'_{x_1}(x,\lambda)=0 \\ \vdots \\ L'_{x_n}(x,\lambda)=0 \\ L'_{\lambda_1}(x,\lambda)=0 \\ \vdots \\ L'_{\lambda_m}(x,\lambda)=0 \end{cases},$$

4) для функции $L(x)=L(x,\lambda_a)$
и подпр-ва $H=\{(dx_1,\ldots,dx_n) \mid d\varphi(a)=0\}$
квадр. форма $d^2L(a)\big|_H$

положит. определённая	отрицат. определённая	знакопеременная.

Тогда функция $f(x)$ в точке a

имеет строгий локальный минимум	максимум	не имеет условного экстремума

при условии $\varphi(x)=0$

<u>Пояснение</u>. Решения однородной СЛАУ (4) образуют лин. подпр-во.
Его размерность равна $k=n-r$, где r = ранг матрицы системы.
У нас $r=\mathrm{rg}\,\varphi'(a)=m$. След., $k=n-m$.
Из системы (4) можно выразить $dx_{n-m+1},\ldots,dx_n$ через $dx_1,\ldots,dx_{n-m}$.
Подставив в $d^2L(a)$, получим квадр. форму $d^2L(a)\big|_H$ от $n-m$ переменных $dx_1,\ldots,dx_{n-m}$.

III. Матричный метод (расскажем кратко для $n=2$)

1. Найдём стационарные точки ф-ции Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

2. Пусть (x_1,y_1,λ_1) – одна из стац. т-к. Найдём

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_1,y_1) & \varphi'_y(x_1,y_1) \\ \varphi'_x(x_1,y_1) & L''_{xx}(x_1,y_1,\lambda_1) & L''_{xy}(x_1,y_1,\lambda_1) \\ \varphi'_y(x_1,y_1) & L''_{xy}(x_1,y_1,\lambda_1) & L''_{yy}(x_1,y_1,\lambda_1) \end{vmatrix}$$

Если $\Delta<0$, то (x_1,y_1) – т. усл. лок. макс. ф-ции $f(x,y)$,

$\Delta>0$, то (x_1,y_1) – — " — мин. — " —,

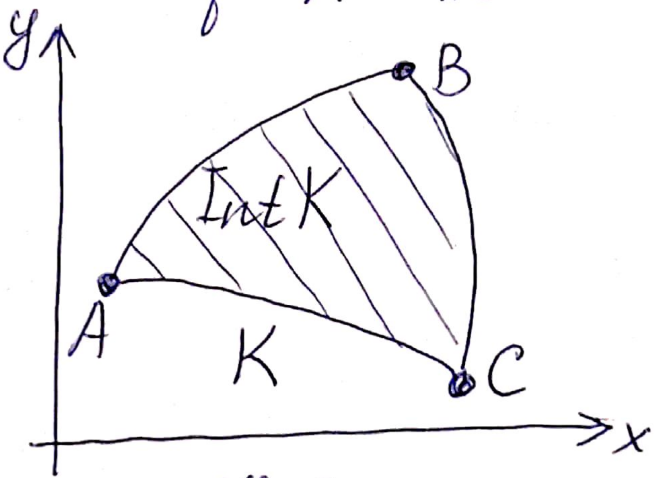
$\Delta=0$, то треб. дополнит. исслед. (напр., другим способом).

Наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x,y)$, определённой на компактном мн-ве $K \subset \mathbb{R}^2$.

Пример.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ компактное мн-во, $\operatorname{Int} K$ - внутренность K, граница ∂K = дуга AB $\cup$ дуга BC $\cup$ дуга AC (дуги заданы условиями $g_i(x,y)=0$, где $g_i(x,y)$ непр. дифф. ф-ции),

$f: K \to \mathbb{R}^2$ непр. дифф. ф-я.



Напоминание

Ф-я, непр. на компактн. мн-ве, достигает на нём своих наиб. и наим. значений.

Найдём точки, в кот. достигаются наиб. и наим. значения ф-ции $f(x,y)$ на K.

План.

1) Найдём критич. точки ф-ции f на $\operatorname{Int} K$.

2) Найдём точки „подозрит." на условного

экстремума ф-ции $f(x)$ при условиях

$g_1(x,y)=0$ | $g_2(x,y)=0$ | $g_3(x,y)=0$.

Отберём из них те, которые принадл.

дуге AB | дуге BC | дуге AC

<u>Зам.</u> Нек. точки, напр., A, B, C, могут оказаться точками усл. экстремума для разных дуг.
Возможно, точки A, B, C не окаж. точками усл. экстремума.

3) Найдём значения ф-ции $f(x,y)$ в точках, найденных в п. 1), в п. 2) и в точках A, B, C.
Сравним значения и выберем наиб. и наим.