Модуль 2. Функции нескольких переменных.

Лекция 9.

Арифметическое пр-во $\mathbb{R}^n$ и виды множеств в нём.

Множеством $\mathbb{R}^n$ наз. мн-во упорядоченных наборов из n действительных чисел, т.е.
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\}$.

Мн-во $\mathbb{R}^n$ также называют арифметическим n-мерным пр-вом.

Элементы $x = (x_1, \dots, x_n)$ можно рас. как векторы и как точки.

$\forall$ двух элементов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ можно определить

скалярное произв.:
$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$
и
норму:
$|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
В этом случае $\mathbb{R}^n$ становится линейным евклидовым пр-вом.

расстояние между ними:
$\rho(x,y) = |x-y| =$
$= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$
В этом случае $\mathbb{R}^n$ становится аффинным (без опр.) евклидовым пр-вом.

Мн-во $\mathbb{R}^n$ с введёнными (x,y), $|x|$, $\rho(x,y)$ будем называть арифм. n-мерн. евклидовым пр-вом.

Пусть ε – любое положит. действит. число.

Опр. ε-окрестностью точки $a \in \mathbb{R}^n$ наз. мн-во $U(a,\varepsilon)$ всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, расстояние от которых до точки a меньше ε, т.е

$$U(a,\varepsilon)=\{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,a)<\varepsilon\}$$

Другое обозначение ε-окрестности т. a: $U_\varepsilon(a)$

Опр. Проколотой ε-окрестностью т. $a \in \mathbb{R}^n$ наз. мн-во $\overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)$ всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, отличных от точки a, расстояние от которых до точки a меньше ε, т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)=\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0<\rho(x,a)<\varepsilon\}.$$

Другое обозн. прокол. ε-окр. т. a: $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$.

Следствие. $\overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)=U(a,\varepsilon)\setminus\{a\}$.

Опр. Открытым шаром радиуса ε с центром в т. $a \in \mathbb{R}^n$ наз. ε-окрестность точки a. т.е. мн-во $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,a)<\varepsilon\}$.

Сферой радиуса ε с центром в т. $a \in \mathbb{R}^n$ наз. мн-во $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,a)=\varepsilon\}$.

Шаром радиуса ε с центром в т. $a \in \mathbb{R}^n$ наз. мн-во $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,a)\le\varepsilon\}$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ некоторое мн-во.

Опр

Точка

$a \in A$	$a \in \mathbb{R}^n$	$a \in \mathbb{R}^n$

называется

внутренней	внешней	граничной

точкой мн-ва A, если

$\exists$ окрестность $U(a,\varepsilon)$ целиком содержащаяся		$\forall$ окрестность $U(a,\varepsilon)$ содержит
во мн-ве A, т.е. $U(a,\varepsilon) \subset A$	во мн-ве $\mathbb{R}^n \setminus A$, т.е. $U(a,\varepsilon) \subset \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus A}$ дополнение мн-ва A, оно сост. из всех точек, не принадлежащих A.	и точки из A, и точки из $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Внутренностью	Внешностью	Границей

множества A наз. мн-во всех его

внутр. точек	внешних точек.	граничных точек
Обозн. Int A		Обозн. ∂A

Пример Пусть $n=1$. Рас. $\mathbb{R}$. Пусть $A=[2,5)$. Тогда мн-ва

внутр. т-к — это $(2,5)$	внешн. т-к — это $(-\infty;2) \cup (5;+\infty)$	граница — это $\{2\} \cup \{5\}$.

Опр. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется

открытым	замкнутым
	если
все его точки внутренние, т.е. $A = \operatorname{Int} A$	оно содержит все свои граничные точки, т.е. $\partial A \subset A$.

Зам. Пустое мн-во $\varnothing$ считают и открытым, и замкнутым.

Примеры: 1) $\mathbb{R}^n$ явл. и открытым, и замкн.

2) Пусть $n=1$. Рас. $\mathbb{R}$. Тогда интервал (a,b) – открытое мн-во, отрезок $[a,b]$ – замкнутое мн-во, полуинт-л $[a,b)$ – и не открытое, и не замкн., $[a,b] \cup \{c\}$ – замкнутое мн-во (его граница – это $\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$).

Т-ма (Основные св-ва замкнутых и откр. множеств).

1. Пересечение конечного числа | Объединение любого числа открытых мн-в является открытым мн-м.

2. Объединение конечного числа | Пересечение любого числа замкнутых мн-в явл. замкнутым мн-м.

3. Мн-во A открыто $\Leftrightarrow$ его дополнение $B = \mathbb{R}^n \setminus A$ замкнуто.

Опр. Мн-во $A \subset \mathbb{R}^n$ наз. ограниченным, если $\exists$ ε-окрестность точки $O=(0,\dots,0)$, целиком содержащая мн-ва A, т.е. $A \subset U(O,\varepsilon)$.

Мн-во $A \subset \mathbb{R}^n$ наз. компактным, если оно замкнуто и ограничено.

Опр. Окрестностью точки $a \in \mathbb{R}^n$ наз. любое открытое мн-во $U(a)$, содержащее точку a.

Проколотой окрестностью точки $a \in \mathbb{R}^n$ наз. любое мн-во $U(a) \setminus \{a\} \overset{\text{обозн.}}{=} \overset{\circ}{U}(a)$.

Опр

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ наз. предельной точкой мн-ва A, если	Точка $a \in A$ наз. изолированной точкой мн-ва A, если
в любой её проколотой окр-ти $\overset{\circ}{U}(a)$ есть точки множества A	существует такая её проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$, которая не содержит точек мн-ва A.

Пример. Пусть $n=1$. Рас. $\mathbb{R}$ и $A=[1,2) \cup \{5\}$. Тогда

$[1,2]$ – мн-во всех предельных точек мн-ва A.	5 – изолир. точка мн-ва A (других изолир. т-к нет)

Опр. Пусть $\varphi: T \to \mathbb{R}^n$ некоторое отображение числового промежутка $T \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда его можно записать так:

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)), \quad (*)$$

где $\varphi_i(t)$ - числовые ф-ции от 1 перем. t.

Отображение φ наз. путём в $\mathbb{R}^n$, если ф-ции $\varphi_i(t)$ - непрерывны на T $\forall i$.

Образ $\varphi(T)$ пути φ наз. непрерывной кривой в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Тогда

точка $\varphi(a) = (\varphi_1(a), \ldots, \varphi_n(a))$ наз. началом пути,

точка $\varphi(b) = (\varphi_1(b), \ldots, \varphi_n(b))$ наз. концом пути.

Опр. Мн-во $A \subset \mathbb{R}^n$ наз. линейно связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

Открытое линейно связное мн-во наз. областью.

Пример Пусть $n = 1$. Рас. $\mathbb{R}$ и $A = [1, 2) \cup \{5\}$. Тогда A не яв. линейно связным.

Зам. $(*)$ часто записывают в виде столбца.

Функции нескольких переменных

<u>Опр</u> Отображение $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ наз <u>функцией</u>, если оно каждому элементу $x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subset \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие только один элемент $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Ф-я f наз. <u>скалярной</u>, если $m = 1$.

Ф-я f наз. <u>векторной</u>, если $m > 1$.

Ф-я f наз. <u>ф-ей нескольких перем.</u>, если $n > 1$.

Ф-я f наз <u>ф-ей одного перем</u>, если $n = 1$.

Для скалярн. ф-ции n переменных

$$x = (x_1, \dots, x_n) \to f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Для скалярн. ф-ции 1 перем.

$x \to f(x)$. Это обычная числовая ф-я.

Для векторной ф-ции n перем.

$$x = (x_1, \dots, x_n) \to f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Для векторной ф-ции 1 перем

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

Ф-ции $f_1, \dots, f_m$ наз. <u>координатными функциями</u>

<u>Опр.</u> Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ всех точек, в которых определена ф-я f, наз. <u>областью определения ф-ции</u>. <u>Обозн.</u> $D(f)$

Мн-во $Y \subset \mathbb{R}^m$ всех точек, которые являются значениями ф-ции f, наз. <u>областью значения ф-ции</u>. <u>Обозн</u> $E(f)$

<u>Опр.</u> <u>Графиком</u> | <u>Поверхностью уровня</u>

ф-ции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

наз. мн-во

$\Gamma(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} / x \in D(f) \subset \mathbb{R}^n, y \in E(f) \subset \mathbb{R}^m\}$.	$\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = c\}$, где $c \in \mathbb{R}^m$. При $n=2$, $m=1$ пов-ть уровня наз. <u>линией уровня</u>

Последовательность в $\mathbb{R}^n$

Послед. $\{a_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ состоит из точек $a_k = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$.

<u>Опр</u> Точка $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ наз. <u>пределом послед-ти $\{a_k\}$</u>, если $\forall$ ε-окрестности $U(a, \varepsilon)$ точки a $\exists$ номер $N \in \mathbb{N}$: $\forall k > N$ $a_k \in U(a, \varepsilon)$.

Послед. $\{a_k\}$ наз. <u>сходящейся</u>, если она имеет предел, и <u>расходящейся</u> в противном сл.

Предел функции неск. перем. по мн-ву

Опр. Пусть задана ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, мн-во $A \subset D(f) \subset \mathbb{R}^n$ и a - предельная т. мн-ва A.

Точка $b \in \mathbb{R}^m$ наз. пределом ф-ции $f(x)$ в точке a по множеству A, если

$\forall$ ε-окрестности $U(b,\varepsilon)$ точки b $\exists$ проколотая δ-окр. $\mathring{U}(a,\delta)$ точки a такая, что $\forall x \in \mathring{U}(a,\delta) \cap A$ $f(x) \in U(b,\varepsilon)$	$\forall$ послед. $\{a_k\}$, $a_k \neq a$, сходящейся к т. a и $a_k \in A$ $\forall k$ послед. значений $\{b_k\} = \{f(a_k)\}$ сходится к т. b.
опр. по Коши	опр. по Гейне

Обозн. $\lim\limits_{x \to_A a} f(x) = b$, $f(x) \to b$ при $x \to_A a$.

Точка $b \in \mathbb{R}^m$ наз. пределом ф-ции $f(x)$ в точке a, если она явл. пределом ф-ции $f(x)$ по мн-ву A $\forall A \subset D(f)$.

Т-МА. Пусть дана ф-я $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \subset X$ и a – предельная точка мн-ва A.

Тогда $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = b \iff \exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ A}} f_i(x) = b_i$ $\forall i = 1, \dots, m$,

где f_i – координатные ф-ции для f,

т.е. $f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$,

и $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Бесконечно малые и бесконечно большие ф-ции нескольких переменных.

Опр. Ф-я $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наз. беск малой при $x \underset{A}{\to} a$, если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = 0$ (где $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$).

Т-МА. $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = b \iff f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \underset{A}{\to} a$.

Опр. для скалярных ф-ций. Ф-я $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ наз. беск. большой при $x \underset{A}{\to} a$, если $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$:

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \cap A$

$|f(x)| > M$.

Зам. Для скалярн. ф-ций т-ма о связи б.б.ф. и б.м.ф. как и для числовых ф-ций.

Опр Ф-я неск. переменных $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наз. ограниченной на мн-ве $A \subset X$, если мн-во $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x), x \in A\}$ ограничено.

Ф-я неск. перем. $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наз. локально ограниченной в т. a при $x \underset{A}{\to} a$, если $\exists$ проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ точки a такая, что ф-я f ограничена на мн-ве $\overset{\circ}{U}(a,\delta) \cap A$.

Зам. Св-ва пределов ф-ций неск. перем. аналогичны св-вам пределов числовых ф-ций (желающие могут посм. в основной учебник).

Непрерывность ф-ции нескольких переменных

Утв. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — любое мн-во, $a \in A$ — любая его точка. Тогда a — либо предельная, либо изолированная точка мн-ва A.

Опр. Функция неск. переменных
$$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
наз. непрерывной в точке $a \in A$, предельной для мн-ва A, если

1) $\exists \lim\limits_{\substack{x\to a\\ A}} f(x)$ и

2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ A}} f(x) = f(a)$.

Зам. Ф-я неск. перем. $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ считается непрерывной в точке $a \in A$, изолированной для мн-ва A, по определению.

Зам. Можно сформулир. опр. непрерывности ф-ции $f(x)$ в точке более подробно (по Коши и по Гейне). Для этого можно повторить опр. предела ф-ции на с. 9, изменив т. b на $f(a)$, проколотую δ-окр. $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ на δ-окр. $U(a,\delta)$, для послед. $\{a_k\}$ убрать условие $a_k \neq a$.

Опр. Ф-я $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ наз. непрерывной на мн-ве A, если она непр. во всех точках мн-ва A.

Т-ма. $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непр. в т. $a \in A \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ все её коорд. ф-ции непр. в т. a.

Зам. Св-ва ф-ций неск. переменных, непрерывных в точке, аналогичны свойствам числовых ф-ций, непр. в точке (см. осн. учебник)
Рас. напр., т-му о непрерывности сложной ф-ции.

Т-ма о непр. сложной ф-ции. Пусть ф-я $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непр. в т. $a \in A$,
$f(A) \subset B$, $f(a) = b$,
ф-я $g: B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ непр. в т. $b \in B$.
Тогда сложная ф-я $(g \circ f)(x) = g(f(x))$,
$g \circ f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, непр. в т. $a \in A$.

Зам. Св-ва скалярных ф-ций неск. перем., непрерывных на компактном мн-ве (компакте) аналог. св-м числовых ф-ций, непр. на отрезке (см. осн. учебник)

Т-ма о сохранении компактности и линейной связности при непр. отображении
Пусть ф-я $f: K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непр. на мн-ве K.
Если K - компакт, то его образ $f(K)$ - тоже компакт.
Если K - лин. связное мн-во, то его образ $f(K)$ - тоже лин. связное мн-во.