Занятие 10 (Занятие 9 – это РК1)

Область определения функции неск. переменных. Линии и поверхности уровня.

№ 7.6.

Найти область определения и линии уровня функции двух переменных

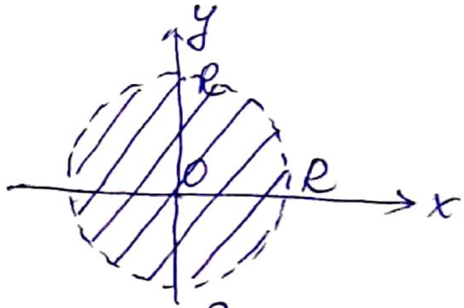
$$z = \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

Решение.

1) Обл. определения $D(f)$:

$$R^2-x^2-y^2>0$$

$$x^2+y^2<R^2$$



$D(f)=\{(x,y) \mid x^2+y^2<R^2\}$ Это открытый круг с центром в т.$(0,0)$ и радиусом R.

2) Линии уровня:

$$\left\{(x,y) \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=c\right\}$$

Решим: $R^2-x^2-y^2=\frac{1}{c^2}$, $c>0$

$$\boxed{x^2+y^2=R^2-\frac{1}{c^2}}$$

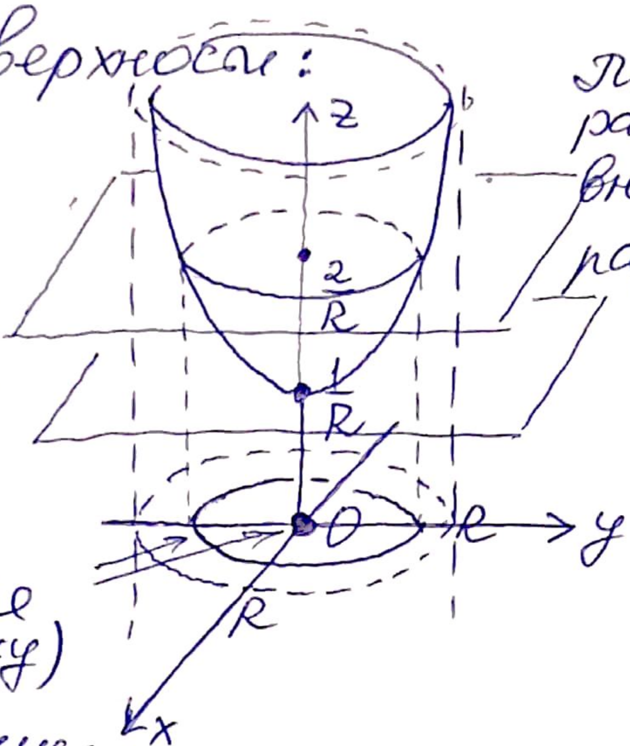
Это окружности с центром в т.$(0,0)$ и радиусом $\sqrt{R^2-\frac{1}{c^2}}$.

Т.к. $R^2-\frac{1}{c^2}\geq 0$, то $c\geq\frac{1}{R}$.

При $c=\frac{1}{R}$ линией уровня явл. точка $x^2+y^2=0$, т.е. $(0,0)$

При $c \to +\infty$ линии уровня $\to$ окружность с ц. $(0,0)$ и рад. R.

Эскиз поверхности:



Доп. задание:

3) Найдём линию уровня, проходящую через точку $(x_0, y_0) = \left(\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{2}R}{2}\right)$.

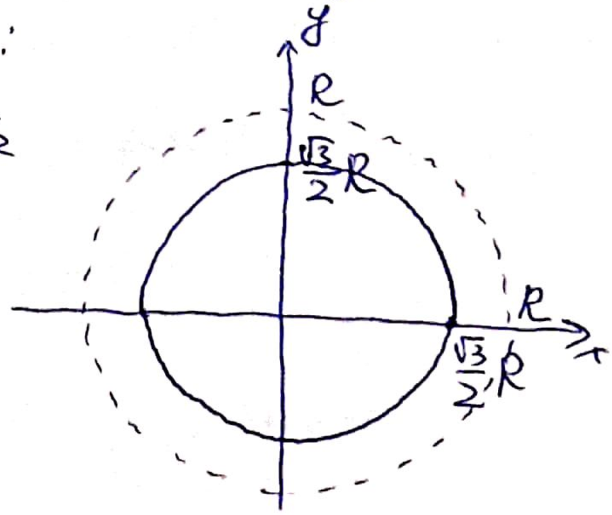
Найдём c, при котором линия уровня проходит через т. (x_0, y_0):

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{3R^2}{4} = R^2 - \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{R^2}{4}$$

$$c = \frac{2}{R}.$$



Подставим обратно в ур-е линии уровня.

$$x^2 + y^2 = R^2 - \frac{R^2}{4}$$

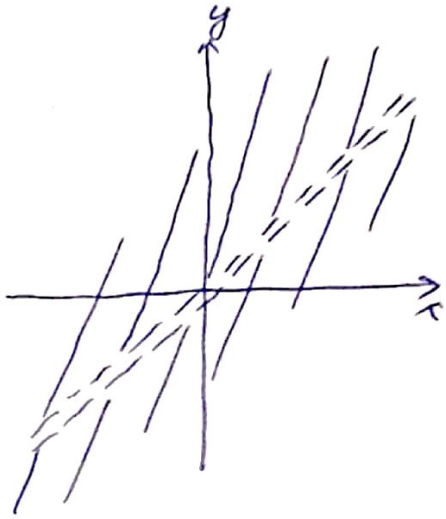
$$x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2$$ Это окружность с ц. $(0,0)$ и радиусом $\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

№7.8.

$$z = \frac{2x+3y-1}{x-y}$$

Решение. 1) $D(f) = \{(x,y) \mid x-y \neq 0\}$

Это плоскость без прямой $y=x$.



2) Линии уровня:

$$\left\{(x,y) \mid \frac{2x+3y-1}{x-y} = c\right\}$$

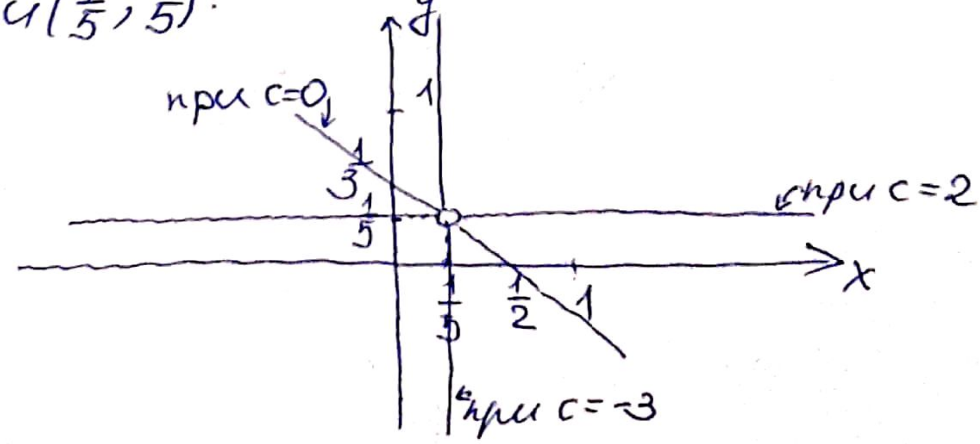
Решим: $\begin{cases} 2x+3y-1 = c(x-y) \\ x-y \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (2-c)x+(3+c)y-1=0 \\ y \neq x \end{cases}$ ← это прямые.

Выясним, где прямые пересекаются с прямой $y=x$: $(2-c)x+(3+c)x-1=0$

$x = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{5} \Rightarrow$ в точке $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

След., линии уровня – это прямые $(2-c)x+(3+c)y-1=0$ без точки $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.



Например, при $c=0$ получим прямую

$2x+3y-1=0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

3) Доп. задание: построить линию уровня, проходящую через т. (1,2).

Найдём C, при котором линия уровня проходит через т. (1,2). Для этого подставим (1,2) в ур-е линий уровня:

$$\frac{2\cdot 1+3\cdot 2-1}{1-2}=C$$

$$C=-7$$

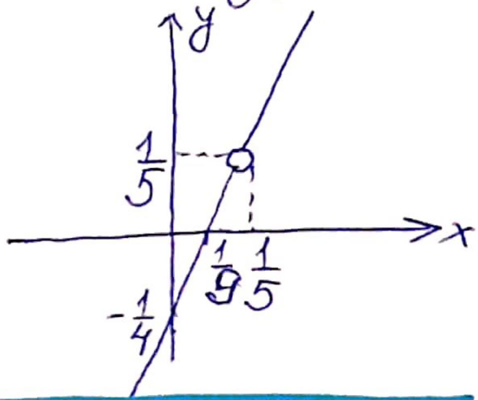
Подставим обратно в ур-е линий уровня:

$$(2+7)x+(3-7)y-1=0$$

$$9x-4y-1=0$$

$$y=\frac{9}{4}x-\frac{1}{4}$$

Точку $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$ надо выколоть.



ДЗ I №7.7, 7.9, 7.13. Находите линии уровня.

№7.10

$$z=\ln(-x-y).$$

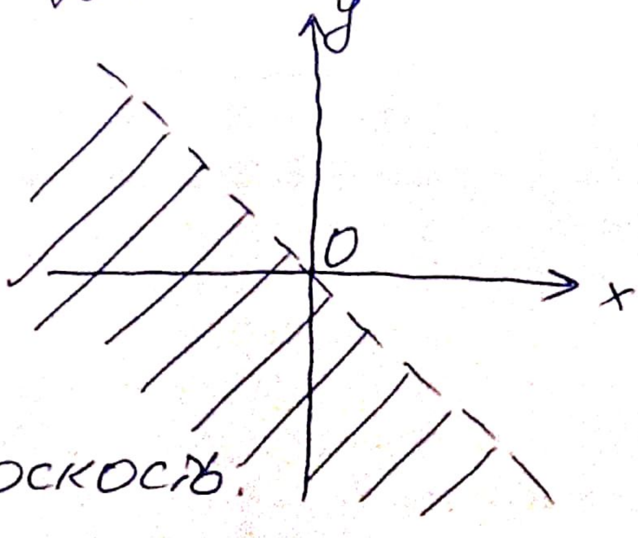
Решение.

1) $D(f)$: $-x-y>0$

$y<-x$

$D(f)=\{(x,y)\mid y<-x\}$.

Это открытая полуплоскость.



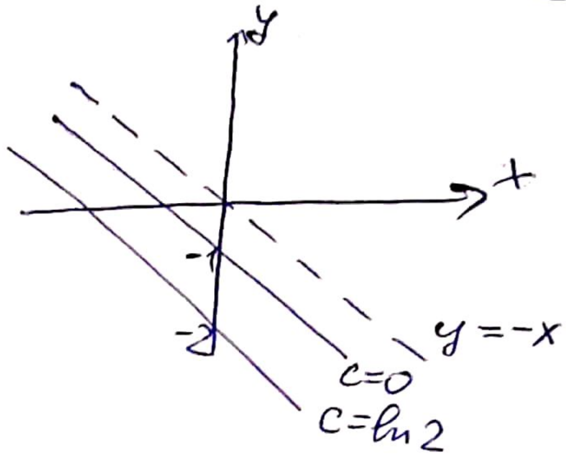
2) Линии уровня:

$\{(x,y) \mid z=\ln(-x-y)=c\}$

$-x-y=e^c$

$y=-x-\underbrace{e^c}_{>0}$

это прямые



№ 7.19

Найти область определения ф-ции 3х переменных и ~~линии~~ поверхности уровня.

$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}$

Решение.

1) $D(f)$: $x^2+y^2+z^2-R^2\geq 0$

$x^2+y^2+z^2\geq R^2$

Это сфера радиуса R и внешность круга радиуса R.

2) Поверхности уровня:

$\{(x,y,z) \mid u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}=c\} \Rightarrow c\geq 0$.

$x^2+y^2+z^2-R^2=c^2$

$x^2+y^2+z^2=R^2+c^2$

Это сферы радиусов $\sqrt{R^2+c^2}$ с центром в начале коорд-т.

№ 7.21.

$u=\ln(1-x^2-y^2+z^2)$

То же задание.

Решение.

1) $D(f)$: $\quad 1-x^2-y^2+z^2>0$

$x^2+y^2-z^2<1$ Это внутренность 1-полостного гип-да

2) Пов-ти уровня:

$\{(x,y,z)\ |\ \ln(1-x^2-y^2+z^2)=c\}$

$1-x^2-y^2+z^2=e^c$

$x^2+y^2-z^2=1-e^c$

Если $c=\underset{\ln 1}{0}$, то $x^2+y^2-z^2=0$. это конус

Если $c=\ln 2$, то $x^2+y^2-z^2=-1$ это 2-пол. гип-д

Если $c=\ln\frac{1}{2}$, то $x^2+y^2-z^2=\frac{1}{2}$ это 1-пол. гип-д.

$\boxed{\text{ДЗ II № 7.20}}$

Предел функции нескольких переменных.

№1. Выяснить, существует ли предел ф-ции.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x+3y}{4x+5y}.$$

I сп.

Пусть $(x,y)\to(0,0)$ по прямой $y=kx$.

Найдём

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=kx}} \frac{2x+3y}{4x+5y} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+3kx}{4x+5kx} = \lim_{x\to 0}\frac{(2+3k)\cancel{x}}{(4+5k)\cancel{x}} = \frac{2+3k}{4+5k}$$

Предел зависит от углового коэф-та $k \Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x+3y}{4x+5y}$

II сп.

Перейдём к полярным координатам (r,φ):

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$; $\quad (x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow r\to 0.$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x+3y}{4x+5y} = \lim_{r\to 0}\frac{2r\cos\varphi+3r\sin\varphi}{4r\cos\varphi+5r\sin\varphi} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{(2\cos\varphi+3\sin\varphi)\cancel{r}}{(4\cos\varphi+5\sin\varphi)\cancel{r}} = \frac{2\cos\varphi+3\sin\varphi}{4\cos\varphi+5\sin\varphi}$$

Предел зависит от угла „вхождения" т. (x,y) в т. $(0,0)$. $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x+3y}{4x+5y}$

(8)

№7.35.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \left[\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} ; (x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow r\to 0\right] =$$

$$= \lim_{r\to 0} (1+r^2)^{\frac{1}{r^2}} = e$$ (II замечат. предел).

Мы вычислили предел; он не зависит от φ.

$\Downarrow$

предел $\exists$.

№2. I сп.

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \underbrace{(x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}}_{f(x,y)} = \left[\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} ; x\to\infty, y\to\infty \Leftrightarrow r\to\infty\right] =$$

$$= \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)} = \lim_{r\to\infty} (r^2+2r^2\sin^2\varphi)e^{-r^2} =$$

$$= \lim_{r\to\infty} r^2(1+2\sin^2\varphi)e^{-r^2} = (1+2\sin^2\varphi)\lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{e^{r^2}} =$$

$= (1+2\sin^2\varphi)\cdot 0 = 0$. Предел вычислен $\Rightarrow$ он $\exists$.

II сп.

$$0 \le f(x,y) = \frac{x^2}{e^{x^2+y^2}} + \frac{3y^2}{e^{x^2+y^2}} \le \frac{x^2}{e^{x^2}} + \frac{3y^2}{e^{y^2}}$$

Исп. теорему „о 2х милиционерах", перейдём к пределу в неравенстве:

$$0 \le \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} f(x,y) \le 0+0.$$ След., $\exists$

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} f(x,y) = 0.$$

№7.32.

Найти предел функции

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy\left(3+\sqrt{xy+9}\right)}{\left(3-\sqrt{xy+9}\right)\left(3+\sqrt{xy+9}\right)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy\left(3+\sqrt{xy+9}\right)}{9-(xy+9)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\cancel{xy}\left(3+\sqrt{xy+9}\right)}{-\underset{-1}{\cancel{xy}}} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(3+\sqrt{xy+9}\right) =$$

$$= -\left(3+\sqrt{0\cdot 0+9}\right) = -6.$$

Предел $\exists$ и равен -6.

ДЗ III № 7.33, 7.34
Много примеров содержится в основных учебниках (см. календарный план)
Также полезный сайт: www.mathprofi.ru
(автор Еремин)

Непрерывность ф-ции неск. перем.

№7.44.

Найти точки разрыва ф-ции 2^x перем.:

$$z = \frac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$$

Решение. Выясним, для каких x, y знам. $=0$.

$$(x-1)^2+(y+1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow$$ точка разрыва $(1;-1)$.

№7.46.

$$z=\frac{1}{\sin x \sin y}$$ Задание тоже.

Решение.

Найдём x, y : $\sin x \sin y = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin y = 0\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \pi n\\ y = \pi m\end{array}\right. \; n, m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ точки разрыва – это точки прямых

$x = \pi m$ и $y = \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$

(линии точек разрыва)

№7.50

Найти точки разрыва ф-ции 3^х перем:

$$u = \frac{1}{xyz}.$$

Решение.

Найдём x, y, z : $xyz = 0$

$$\left[\begin{array}{l}x = 0\\ y = 0\\ z = 0\end{array}\right.$$

Это координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy. (поверхности точек разрыва).

ДЗ IV №7.45, 7.47, 7.51

См. также примеры в основных учебниках.