Занятие 11.

Частные производные 1-го и высших порядков.

№ 7.55

Найти частные производные 1 и 2-го порядков от функции

$z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$

Решение.

$z'_x = 5x^4 - 15x^2y^3$

$z''_{xx} = 20x^3 - 30xy^3$

| При вычислении част. произв. по x считаем y постоянной

$z'_y = 5y^4 - 15x^3y^2$

$z''_{yy} = 20y^3 - 30x^3y$

| При вычислении част. произв. по y считаем x постоянной

$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (5x^4 - 15x^2y^3)'_y = -45x^2y^2$

$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (5y^4 - 15x^3y^2)'_x = -45x^2y^2$

Зам. 1. Можно исп. обозначения

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Зам. 2. Так как в исходную функцию переменные x, y входят одинак. образом, то достаточно было найти z'_x, z''_{xx}, z''_{xy}, а потом для z'_y, z''_{yy}, z''_{yx} поменять x и y местами

№7.57.

$$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Решение.

$$z'_x = \frac{(xy)'_x \sqrt{x^2+y^2} - xy\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{\frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{yx^2}+y^3-\cancel{x^2y}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z''_{xx} = \left(\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)'_x = y^3\left(\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x =$$

$$= y^3\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot\cancel{2}x = \frac{-3xy^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)'_y =$$

$$= \frac{(y^3)'_y\cdot(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - y^3\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right)'_y}{\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{3y^2\cdot(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - y^3\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\cdot(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}y}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{3\cdot(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}y^2\cdot\left((x^2+\cancel{y^2})-\cancel{y^2}\right)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$z'_y = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z''_{yy} = \frac{-3x^3y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$z''_{yx} = \frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

№ 7.60

$z = y^x$

$$\boxed{\begin{aligned}(a^x)' &= a^x \ln a\\ (x^a)' &= a x^{a-1}\end{aligned}}$$

Решение.

$z'_x = (y^x)'_x = y^x \ln y$

$z'_y = (y^x)'_y = x y^{x-1}$

$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (y^x \ln y)'_x = (y^x)'_x \cdot \ln y = y^x (\ln y)^2$

$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (xy^{x-1})'_y = x(y^{x-1})'_y = x\cdot(x-1)y^{x-2}$

$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (y^x \ln y)'_y = (y^x)'_y \cdot \ln y + y^x (\ln y)'_y =$

$= x\cdot y^{x-1}\ln y + y^x \cdot \frac{1}{y} = \frac{xy^x \ln y + y^x}{y} = (x\ln y + 1)\cdot y^{x-1}$

$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (xy^{x-1})'_x = (x)'_x y^{x-1} + x(y^{x-1})'_x =$

$= 1\cdot y^{x-1} + x\cdot y^{x-1}\ln y = y^{x-1}(1 + x\ln y).$

№7.61.

$z = \ln(x^2+y^2)$

Решение.

$z'_x = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+y^2}$

$z''_{xx} = 2 \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x = 2 \cdot \frac{x'_x(x^2+y^2) - x(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} =$

$= 2 \cdot \frac{1(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_y = 2x\left((x^2+y^2)^{-1}\right)'_y =$

$= 2x(-1) \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$

$z'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$

$z''_{yy} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$z''_{yx} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$

№7.63.

$u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

Решение.

$u'_x = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x = -\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)'_x =$$

$$= -\frac{x'_x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - x\left((x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right)'_x}{\left((x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1 \cdot (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x}{(x^2+y^2+z^2)^{3}} =$$

$$= -\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+y^2+z^2-3x^2\right)}{(x^2+y^2+z^2)^{3}} = -\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$u''_{xy} = (u'_x)'_y = \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)'_y = -x\left((x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y =$$

$$= -x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2y = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$u'_y = \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$u''_{yy} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$u''_{yx} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = u''_{xy}$$

$$u_{yz} = \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$u'_z = \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$u''_{zz} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$u''_{zx} = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = u''_{xz}$$

$$u''_{zy} = u''_{yz}$$

$\boxed{\text{ДЗІ №7.56, 7.58, 7.59, 7.62, 7.64.}}$

№7.66.

Найти $f'_x(3,2)$, $f'_y(3,2)$, $f''_{xx}(3,2)$, $f''_{xy}(3,2)$, $f''_{yx}(3,2)$,
если $f(x,y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$.

Решение.

$f'_x = 3x^2y + y^2 - 2$ | $f'_x(3,2) = 3\cdot 3^2\cdot 2 + 2^2 - 2 = 56$

$f'_y = x^3 + 2xy + 3$ | $f'_y(3,2) = 3^3 + 2\cdot 3\cdot 2 + 3 = 42$

$f''_{xx} = 6xy$ | $f''_{xx}(3,2) = 6\cdot 3\cdot 2 = 36$

$f''_{yy} = 2x$ | $f''_{yy}(3,2) = 2\cdot 3 = 6$

$f''_{xy} = 3x^2 + 2y$ | $f''_{xy}(3,2) = 3\cdot 3^2 + 2\cdot 2 = 31 = f''_{yx}(3,2)$

f''_{yx}

$\boxed{\text{ДЗ II} \quad №7.67}$

Дифференциал 1 и 2 порядка.
Полное приращение функции

1) $$\underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x,y,z)}_{\substack{\Delta f(x,y,z)\\ \text{полное приращение}\\ \text{функции в т. }(x,y,z)}} =$$

$$= \underbrace{df(x,y,z)}_{\substack{\text{дифференциал}\\ \text{функции в т.}(x,y,z)}} + o(\rho) \leftarrow \text{o-малое от } \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$$

След., для достат. малых ρ $\quad \Delta f(x,y,z)\approx df(x,y,z)$.
Использование для приближенных вычислений:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)\approx f(x,y,z)+df(x,y,z).$$

2) $$df(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\Delta x+f'_y(x,y,z)\Delta y+f'_z(x,y,z)\Delta z=$$
$$=f'_x(x,y,z)dx+f'_y(x,y,z)dy+f'_z(x,y,z)dz$$

В других обозначениях:

$$df(x,y,z)=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)}_{\substack{\text{оператор дифф-ла}\\ \text{1 порядка применяется к } f(x,y,z)}}f(x,y,z)$$

3) $$d^2f(x,y,z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 f(x,y,z)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(dy)^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(dz)^2+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}dydz+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}dxdz\right)f(x,y,z)$$

<u>Аналог для ф-ции 2х перем.</u> :

$$d^2f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(dy)^2+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy\right)f(x,y)=$$

$$=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(dy)^2+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy$$

$$\overset{\text{т.е.}}{=} f''_{xx}(x,y)(dx)^2+f''_{yy}(x,y)(dy)^2+2f''_{xy}(x,y)dxdy$$

здесь скобки обычно не пишу

4) $$d^3f(x,y,z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^3 f(x,y,z)$$

и т.д.

Так вычисляется дифференциал любого порядка.

5) правила:

$$d(u+v)=du+dv$$

$$d(uv)=du\cdot v+u\,dv,\quad d(ku)=k\,du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{du\cdot v-u\,dv}{v^2}$$

$$d^2u=d(du),\quad d^mu=d(d^{m-1}u)$$

№ 7.89

Найти дифференциал функции

$$z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Решение

$$dz = f'_x\,dx + f'_y\,dy$$

Найдём

$$f'_x = \frac{1}{y + \sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\left(0 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \frac{x}{\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}/$$

$$f'_y = \frac{1}{y + \sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}+y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{y+\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Подставим в dz:

$$dz = \frac{x}{\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$$

Общий множитель $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ можно вынести за скобки.

№ 7.91

$$z = \ln\left(\cos\frac{x}{y}\right)$$

Решение

Scanned by CamScanner

$dz = z'_x dx + z'_y dy$ (можно писать и f'_x, и z'_x — это одно и то же)

Найдем

$$z'_x = \frac{1}{\cos\frac{x}{y}}\left(-\sin\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} = -tg\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}$$

$$z'_y = \frac{1}{\cos\frac{x}{y}}\left(-\sin\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -tg\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = tg\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y^2}$$

Подставим в dz:

$$dz = -\frac{1}{y}tg\frac{x}{y}dx + \frac{x}{y^2}tg\frac{x}{y}dy$$

Иногда выносят общий множитель за скобки:

$$dz = \frac{1}{y^2}tg\frac{x}{y}\left(-y\,dx + x\,dy\right).$$

$$\boxed{\text{Д/З III} \quad № 7.90,\ 7.92}$$

№ 7.103.

Найти дифференциалы 1 и 2 пор. функции $z = \sqrt{x^2+2xy}$

Решение.

1) $dz = z'_x dx + z'_y dy$

Найдём

$$z'_x = \frac{2x+2y}{2\sqrt{x^2+2xy}} = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy}}$$

$$z'_y = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2xy}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2xy}}$$

Подставим в dz:

$$dz = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy}}dx + \frac{x}{\sqrt{x^2+2xy}}dy = \frac{1}{\sqrt{x^2+2xy}}\left((x+y)\,dx + x\,dy\right) =$$

$$= \frac{(x+y)dx + x\,dy}{\sqrt{x^2+2xy}}$$

можно
написать так

2) $d^2z = z''_{xx}\underbrace{dx^2}_{\text{это } (dx)^2} + 2z''_{xy}\,dx\,dy + z''_{yy}\,dy^2$

Найдём

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy}}\right)'_x = \frac{(x+y)'_x\cdot\sqrt{x^2+2xy} - (x+y)\left(\sqrt{x^2+2xy}\right)'_x}{\left(\sqrt{x^2+2xy}\right)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot\sqrt{x^2+2xy} - (x+y)\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy}}}{x^2+2xy} = \frac{(x^2+2xy)-(x+y)^2}{(x^2+2xy)\sqrt{x^2+2xy}} =$$

$$= \frac{-y^2}{(x^2+2xy)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2xy}}\right)'_y = x\left((x^2+2xy)^{-\frac{1}{2}}\right)'_y = x\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}(x^2+2xy)^{3/2}} = \frac{-x^2}{(x^2+2xy)^{3/2}}$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy}}\right)'_y = \frac{1\sqrt{x^2+2xy} - (x+y)\frac{x}{\sqrt{x^2+2xy}}}{x^2+2xy} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2}+2xy-\cancel{x^2}-xy}{(x^2+2xy)\sqrt{x^2+2xy}} = \frac{xy}{(x^2+2xy)^{3/2}}$$

Подставим в d^2z:

$$d^2z = \frac{-y^2}{(x^2+2xy)^{\frac{3}{2}}}dx^2 - \frac{x^2}{(x^2+2xy)^{\frac{3}{2}}}dy^2 + 2\cdot\frac{xy}{(x^2+2xy)^{\frac{3}{2}}}dxdy =$$

$$= \frac{-y^2dx^2-x^2dy^2+2xy\,dxdy}{(x^2+2xy)^{3/2}}$$

№ 7.105

$$z = (x+y)e^{xy}$$

Решение. Зам., что x и y входят в z одинаковым образом, т.е. $z(x,y)=z(y,x)$.

1) $dz = z'_x dx + z'_y dy$

$$z'_x = (x+y)'_x e^{xy} + (x+y)(e^{xy})'_x = 1\cdot e^{xy} + (x+y)e^{xy}\cdot y =$$

$$= e^{xy}(1+xy+y^2)$$

$$z'_y = e^{xy}(1+xy+x^2)$$

Подставим в $dz = e^{xy}\left((1+xy+y^2)dx+(1+xy+x^2)dy\right)$

2) $d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$

$$z''_{xx} = e^{xy}\cdot y\cdot(1+xy+y^2) + e^{xy}\cdot y = e^{xy}\cdot y(2+xy+y^2)$$

$$z''_{yy} = e^{xy}\cdot x(2+xy+x^2)$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = e^{xy} \cdot x(1+xy+y^2) + e^{xy}(x+2y) =$$
$$= e^{xy}(x + x^2y + xy^2 + x + 2y) =$$
$$= e^{xy}(2x + 2y + x^2y + xy^2) =$$
$$= e^{xy}(2(x+y) + xy(x+y)) =$$
$$= e^{xy}(2+xy)(x+y).$$

Подставим в d^2z:

$$d^2z = e^{xy}\big(y(2+xy+y^2)dx^2 + 2(2+xy)(x+y)dxdy + x(2+xy+x^2)dy^2\big).$$

$\boxed{\text{ДЗ } \underline{\text{IV}} \quad № 7.102, 7.107.}$

№ 7.87.

Найти полное приращение и дифференциал ф-ции $z = x^2 - xy + y^2$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y — от 1 до 1,2.

Решение.

$(x, y) = (2; 1)$, $(x+\Delta x, y+\Delta y) = (2,1; 1,2)$

$(\Delta x, \Delta y) = (0,1; 0,2)$.

1) Полное приращение функции.

$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Найдём $f(x,y) = 2^2 - 2\cdot 1 + 1^2 = 3$

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = 2,1^2 - 2,1\cdot 1,2 + 1,2^2 = 3,33$

Подставим в приращение: $\Delta f(2,1) = 3,33 - 3 = 0,33$

2) Дифференциал функции.

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy =$$
$$= f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

Найдём $f'_x = 2x - y$ | $f'_x(2,1) = 2\cdot 2 - 1 = 3$

$f'_y = 2y - x$ | $f'_y(2,1) = 2\cdot 1 - 2 = 0$

Подставим в $df(2,1)$:

$df(2,1) = 3\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}2 = 0{,}3$.

Мы видим, что $\Delta f(2,1) \approx df(2,1)$

Д/З $\underline{V}$: № 7.88.