Занятие 12

I. Производная сложной ф-ции.

Формулы

1) $u = f(x(t), y(t), z(t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ полная производная равна

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

или в других обозначениях

$$u'(t) = u'_x \cdot x'(t) + u'_y \cdot y'(t) + u'_z \cdot z'(t)$$

Частный случай: $x = t$.

$u = f(x, y(x), z(x)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$$

или в других обозначениях

$$u'(x) = u'_x + u'_y \cdot y'(x) + u'_z \cdot z'(x)$$

2) $z = f(u(x,y), v(x,y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ частные производные равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

или в других обозначениях

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y$$

Scanned by CamScanner

№7.114.

$z=e^{2x-3y}$, где $x=\operatorname{tg}t$, $y=t^2-t$.

Найти полную производную $\frac{dz}{dt}$

Зам. Мы пишем d „прямое", когда ф-я зависит от одной переменной, т.е. $\frac{dz}{dt}=z'(t)$ ← это полная производная. Мы пишем ∂ „круглое", когда ф-я зависит от нескольких перем., т.е. $\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x$ ← это частная произв.

Решение. $z=f(x(t),y(t))$, т.е. $z=z(t)$.

I способ.

По формуле $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

1) Найдём $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3y}\cdot 2$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x-3y}\cdot(-3)$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\frac{dy}{dt}=2t-1$$

2) Подставим в формулу:

$$\frac{dz}{dt}=e^{2x-3y}\cdot 2\cdot\frac{1}{\cos^2 t}+e^{2x-3y}\cdot(-3)(2t-1)=$$

$$=e^{2x-3y}\left(\frac{2}{\cos^2 t}-3(2t-1)\right)=e^{2\operatorname{tg}t-3(t^2-t)}\cdot\left(\frac{2}{\cos^2 t}-3(2t-1)\right).$$

Scanned by CamScanner

II способ.

Подставим $x(t)$, $y(t)$ в $z=f(x,y)$, получим

$z(t)=e^{2\operatorname{tg} t-3(t^2-t)}$

Найдём $\frac{dz}{dt}=e^{2\operatorname{tg} t-3(t^2-t)}\cdot\left(\frac{2}{\cos^2 t}-3(2t-1)\right)$.

это $z'(t)$

Это тот же ответ.

Ответ:

$\boxed{\text{Надо уметь считать обоими способами. I сп. — главный.}}$

№7.115.

$z=x^y$, где $x=\ln t$, $y=\sin t$

Найти полную производную $\frac{dz}{dt}$.

Решение. Будем писать др. обозначения („для разнообразия")

I сп. По формуле

$z'(t)=z'_x\cdot x'(t)+z'_y\cdot y'(t)$

1) Найдём $z'_x=y\cdot x^{y-1}$

$z'_y=x^y\ln x$

$x'(t)=\frac{1}{t}$

$y'(t)=\cos t$

2) Подставим в формулу:

$z'(t)=y\cdot x^{y-1}\cdot\frac{1}{t}+x^y\ln x\cdot\cos t=$

$=x^{y-1}\left(\frac{y}{t}+x\cdot\ln x\cos t\right)=$

$=(\ln t)^{\sin t-1}\left(\frac{\sin t}{t}+\ln t\cdot\ln(\ln t)\cos t\right)$

Scanned by CamScanner

II сп. Подставим $x(t), y(t)$ в $z=f(x,y)$, получим $z(t)=(\ln t)^{\sin t}=$

$$=e^{\sin t\cdot\ln(\ln t)}$$

Найдём $z'(t)=e^{\sin t\cdot\ln(\ln t)}\cdot\left(\cos t\cdot\ln(\ln t)+\right.$

$$\left.+\sin t\,\frac{1}{\ln t}\,\frac{1}{t}\right)=$$

$$=(\ln t)^{\sin t}\left(\cos t\cdot\ln(\ln t)+\frac{\sin t}{\ln t\cdot t}\right)=$$

$$=(\ln t)^{\sin t-1}\left(\ln t\cdot\cos t\cdot\ln(\ln t)+\frac{\sin t}{t}\right).$$

этот же ответ.

Ответ: ...

$\boxed{\text{ДЗ I. № 7.116}}$

№ 7.119.

$z=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}$, где $y=e^{(x+1)^2}$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

Решение (1) $z=f(x,y)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ частная производная

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+1}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=$$

$$=\frac{y}{y^2+(x+1)^2}$$

Scanned by CamScanner

② $z=f(x,y(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ полная производная

I сп. По формуле

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

1) Найдём $\frac{\partial z}{\partial x}$ (См. действие ①).

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}\left(\frac{x+1}{y}\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}\cdot(x+1)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{x+1}{y^2+(x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{(x+1)^2}\cdot 2(x+1)$$

2) Подставим в формулу:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{y}{y^2+(x+1)^2}-\frac{x+1}{y^2+(x+1)^2}\cdot e^{(x+1)^2}\cdot 2(x+1)=$$

$$=\frac{1}{y^2+(x+1)^2}\left(y-2(x+1)^2\cdot e^{(x+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{e^{2(x+1)^2}+(x+1)^2}\cdot\left(e^{(x+1)^2}-2(x+1)^2\cdot e^{(x+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{e^{(x+1)^2}\cdot\left(1-2(x+1)^2\right)}{e^{2(x+1)^2}+(x+1)^2}$$

II сп. Подст. $y(x)$ в $z=f(x,y(x))$,
получим $z(x)=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{e^{(x+1)^2}}$.

Scanned by CamScanner

Найдём $\frac{dz}{dx} =$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{e^{(x+1)^2}}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{e^{(x+1)^2}}\right)' =$$

$$= \frac{\cancel{e^{2(x+1)^2}}}{e^{2(x+1)^2}+(x+1)^2} \cdot \frac{1 \cdot e^{(x+1)^2} - (x+1)\cdot e^{(x+1)^2} \cdot 2(x+1)}{\cancel{e^{2(x+1)^2}}} =$$

$$= \frac{e^{(x+1)^2}\left(1-2(x+1)^2\right)}{e^{2(x+1)^2}+(x+1)^2}.$$

Ответ: .

$\boxed{\text{ДЗ II № 7.118}}$

№ 7.120.

$z = u^2 \ln v$, где $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение.

I сп. По формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

1) Найдём все частные производные из левых частей равенств:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (u^2 \ln v)'_u = 2u \cdot \ln v; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = (u^2 \cdot \ln v)'_v = \frac{u^2}{v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (x^2 + y^2)'_x = 2x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = (x^2 + y^2)'_y = 2y$$

2) Подставим в формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2u \cdot \ln v \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{u^2}{v} \cdot 2x \overset{\text{подставим } u \text{ и } v \text{ как функции от } x, y.}{=}$$

$$= 2 \cdot \frac{y}{x} \ln(x^2 + y^2) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \text{можно упростить}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2u \cdot \ln v \cdot \frac{1}{x} + \frac{u^2}{v} \cdot 2y =$$

$$= 2\frac{y}{x} \ln(x^2 + y^2) \cdot \frac{1}{x} + \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{x^2 + y^2} \cdot 2y = \text{можно упростить}$$

II сп. Подставим u и v в $z(u, v)$; получим

$$z(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \ln(x^2 + y^2).$$

Scanned by CamScanner

Найдём

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{y^2}{x^2}\ln(x^2+y^2)\right)'_x=$$

$$=y^2\left(\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2}\right)'_x=$$

$$=y^2\,\frac{\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x\cdot x^2-\ln(x^2+y^2)\cdot 2x}{x^4}=$$

$$=y^2\,\frac{\frac{2x^2}{x^2+y^2}-\ln(x^2+y^2)\cdot x}{x^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{y^2}{x^2}\cdot\ln(x^2+y^2)\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(y^2\cdot\ln(x^2+y^2)\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(2y\cdot\ln(x^2+y^2)+y^2\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y\right)=\ldots$$

<u>Зам.</u>
В обоих способах ответы приводятся к одинаковым выражениям. II сп. легче, но I сп. надо знать обязат., т.к. при вычислении производных <u>в точке</u> значения $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ в соотв. точке могут быть известны.

$\boxed{\text{Д/З III. № 7.121.}}$

Scanned by CamScanner

№ 7.122.

$z = f(u,v)$, где $u = \frac{2y}{x+y}$, $v = x^2 - 3y$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$

Решение.

По формулам $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

1) Найдём

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{2y}{x+y}\right)'_x = 2y \cdot \left(\frac{1}{x+y}\right)'_x = 2y \cdot \left(-\frac{1}{(x+y)^2}\right) = \frac{-2y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{2y}{x+y}\right)'_y = 2 \cdot \frac{1 \cdot (x+y) - y \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{2x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -3$$

2) Подставим в формулы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{-2y}{(x+y)^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2x$$

Ответ:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{2x}{(x+y)^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot (-3)$$

Дальше здесь преобразовывать не надо.

$\boxed{\text{ДЗ IV № 7.123}}$

Scanned by CamScanner

Полный (1-й) дифференциал сложной функции. Инвариантность 1-го дифференциала

№ 7.124.

$z = f(u,v)$, где $u = \cos(xy)$, $v = x^5 - 7y$

Найти dz.

Решение. $z = f(u(x,y), v(x,y)) \overset{\text{т.е.}}{=} z(x,y)$

I сп. $\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$ (1)

1) Найдём

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}(-\sin(xy))\cdot y + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 5x^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}(-\sin(xy)\cdot x + \frac{\partial z}{\partial v}(-7)$$

2) Подст. в формулу:

$$dz = \left[\frac{\partial z}{\partial u}\cdot(-\sin(xy))\cdot y + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 5x^4\right]dx +$$
$$+\left[\frac{\partial z}{\partial u}\cdot(-\sin(xy))\cdot x + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot(-7)\right]dy$$

II сп. $\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv}$ (2), где

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$
$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

1) Найдём

$du = -\sin(xy)\cdot y\,dx - \sin(xy)\,x\,dy$

$dv = 5x^4\,dx - 7\,dy$

2) Подставим в формулу:

Scanned by CamScanner

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\left(-\sin(xy)\cdot y\,\underline{dx} - \sin(xy)\cdot x\,\underline{\underline{dy}}\right) +$$

$$+\frac{\partial z}{\partial v}\left(5x^4\,\underline{dx} - 7\,\underline{\underline{dy}}\right) \overset{\text{упростим}}{=}$$

$$= \left[\frac{\partial z}{\partial u}(-\sin(xy))y + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 5x^4\right]dx +$$

$$+\left[\frac{\partial z}{\partial u}(-\sin(xy))x + \frac{\partial z}{\partial v}(-7)\right]dy$$. Тот же ответ.

$\boxed{\text{ДЗ } \underline{\text{V}} . \ N 7.125}$

Зам.

Инвариантность 1-го дифф-ла означает, что вычисление dz по ф-лам (1) или (2) даст нам одинак. ответ.

Аналог. вычисления для 2-го дифф-ла дадут разные ответы; говорят, что 2$^{\text{й}}$ дифф-л не инвариантен (отн. замены перем.)

Scanned by CamScanner

№7.129.

Показать, что функция $z = x\cdot f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ удовлетворяет уравнению $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

Решение.

1) Найдём $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Обозн. $t = \frac{y}{x} \Rightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) = f(t)$ функция одного переменного.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2\right)'_x = \left(x\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)\right)'_x - (x^2)'_x - (y^2)'_x =$$

$$= x'_x\cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + x\cdot f'(t)\Big|_{t=\frac{y}{x}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x - 2x = f\left(\frac{y}{x}\right) + x f'(t)\Big|_{t=\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) - 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2\right)'_y = x\cdot f'(t)\Big|_{t=\frac{y}{x}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y - (x^2)'_y - (y^2)'_y =$$

$$= x f'(t)\Big|_{t=\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x} - 2y = f'(t)\Big|_{t=\frac{y}{x}} - 2y$$

2) Подставим в левую часть уравнение:

$$\text{лев. часть} = x\cdot\left(f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'(t)\Big|_{t=\frac{y}{x}} - 2x\right) +$$

$$+ y\left(f'(t)\Big|_{t=\frac{y}{x}} - 2y\right) = x f\left(\frac{y}{x}\right) - 2x^2 - 2y^2.$$

3) Правая часть ур-я =

$$= \left(x f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2\right) - x^2 - y^2 = x f\left(\frac{y}{x}\right) - 2x^2 - 2y^2.$$

Scanned by CamScanner

Из 2), 3) $\Rightarrow$ левая часть = правой част.

ч.т.д.

№ 7.135.

Показать, что функция $u = x\cdot\varphi(x+y) + y\cdot\psi(x+y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Решение. Рас. φ и ψ – функции от t; $t = x+y$.

1) Найдём

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Big(x\cdot\varphi(\overbrace{x+y}^{t}) + y\,\psi(\overbrace{x+y}^{t})\Big)'_x =$$

$$= \Big(\varphi(x+y) + x\varphi'(t)\Big|_{t=x+y}\cdot(x+y)'_x\Big) + y\cdot\psi'(t)\Big|_{t=x+y}\cdot(x+y)'_x =$$

$$= \varphi(x+y) + x\varphi'(t)\Big|_{t=x+y} + y\,\psi'(t)\Big|_{t=x+y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi'(t)\Big|_{t=x+y}\cdot(x+y)'_x + \Big(\varphi'(t)\Big|_{t=x+y} + x\varphi''(t)\Big|_{t=x+y}(x+y)'_x\Big) +$$

$$+ y\cdot\psi''(t)\Big|_{t=x+y}(x+y)'_x =$$

$$= 2\varphi'(t)\Big|_{t=x+y} + x\varphi''(t)\Big|_{t=x+y} + y\,\psi''(t)\Big|_{t=x+y}$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\psi'(t)\Big|_{t=x+y} + y\,\psi''(t)\Big|_{t=x+y} + x\,\varphi''(t)\Big|_{t=x+y}$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) =$$

$$= \left(\varphi(x+y) + x\varphi'(t)\Big|_{t=x+y} + y\psi'(t)\Big|_{t=x+y}\right)'_y =$$

$$= \varphi'(t)\Big|_{t=x+y} \cdot (x+y)'_y + x\cdot\varphi''(t)\Big|_{t=x+y}(x+y)'_y +$$

$$+ \left(\psi'(t)\Big|_{t=x+y} + y\cdot\psi''(t)\Big|_{t=x+y}\cdot(x+y)'_y\right) =$$

$$= \varphi'(t)\Big|_{t=x+y} + x\varphi''(t)\Big|_{t=x+y} +$$

$$+ \psi'(t)\Big|_{t=x+y} + y\psi''(t)\Big|_{t=x+y}.$$

2) Подставим в лев. часть равенства:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$

$$= \cancel{2\varphi'(t)}\Big|_{t=x+y} + \cancel{x\varphi''(t)}\Big|_{t=x+y} + \cancel{y\psi''(t)}\Big|_{t=x+y} -$$

$$-2\left(\cancel{\varphi'(t)}\Big|_{t=x+y} + \cancel{x\varphi''(t)}\Big|_{t=x+y} + \cancel{\psi'(t)}\Big|_{t=x+y} + \cancel{y\psi''(t)}\Big|_{t=x+y}\right) +$$

$$+ \cancel{2\psi'(t)}\Big|_{t=x+y} + \cancel{y\psi''(t)}\Big|_{t=x+y} + \cancel{x\varphi''(t)}\Big|_{t=x+y} = 0 =$$

= правой части. ч.т.д.

$\boxed{\text{ДЗ } \overline{\text{VI}} \quad №7.130,\ 7.136.}$

II. Производная неявной функции.

Дано уравнение $F(x,y,z)=0$.

Пусть оно разрешимо относительно z, т.е. $\exists$ неявная ф-я $z=z(x,y)$, при подстановке которой в ур-е оно обращается в верное равенство, причём дифференцируема.

Найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и дифференциал dz.

Решение.

I сп. 1) Из теории: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$;

2) $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \underset{\text{подстав. из 1)}}{=} -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dx - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dy$

II сп. 1) Возьмём дифференциал от обеих частей равенства (уравнение):

$$dF(x,y,z) = d0$$

Распишем:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

2) Выразим dz:

$$dz = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dx - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dy.$$

Scanned by CamScanner

№ 7.141.

Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y\sin x - \cos(x-y) = 0$.

Решение.

Уравнение: $F(x,y)=0$, где $F(x,y) = y\sin x - \cos(x-y)$

Пусть оно разрешимо отн. y, т.е. $\exists$ неявная функция $y = y(x)$.

Из теории: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$\uparrow$

это полная производная, т.к. $y(x)$ – ф-я одной переменной x.

1) Найдём

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\cos x + \sin(x-y)\cdot 1 = y\cos x + \sin(x-y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin x + \sin(x-y)\cdot(-1) = \sin x - \sin(x-y)$$

2) Подставим в формулу:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin x - \sin(x-y)}$$ $\leftarrow$ Ответ:

$\boxed{\text{ДЗ VII. № 7.140.}}$

Scanned by CamScanner

№ 7.145.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $(1, -2, 2)$, если $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

Решение.

$F(x,y,z) = z^3 - 4xz + y^2 - 4$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

1) Найдём

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4z \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 4x$$

2) Подставим в формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-4z}{3z^2-4x} = \frac{4z}{3z^2-4x} ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3z^2-4x}$$

3) Подставим в 2) точку $(1,-2,2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2,2) = \frac{4\cdot 2}{3\cdot 2^2 - 4\cdot 1} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,-2,2) = -\frac{2\cdot(-2)}{3\cdot 2^2 - 4\cdot 1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{ДЗ } \overline{\text{VIII}} \quad №7.146}$$

Scanned by CamScanner

№7.149.

Найти dz, если $yz = \operatorname{arctg}(xz)$.

Решение. Рас. ур-е $\underbrace{yz - \operatorname{arctg}(xz) = 0}_{F(x,y,z)}$

I сп. $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, где

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

1) Найдём $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{z}{1+(xz)^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = z; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y - \frac{x}{1+(xz)^2}$$

След., $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{z}{1+(xz)^2}}{y - \frac{x}{1+(xz)^2}} = \frac{z}{y(1+(xz)^2)-x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{y - \frac{x}{1+(xz)^2}} = \frac{-z(1+(xz)^2)}{y(1+(xz)^2)-x}$$

2) $$dz = \frac{z}{y(1+(xz)^2)-x}dx - \frac{z(1+(xz)^2)}{y(1+(xz)^2)-x}dy =$$

$$= \frac{z(dx-(1+(xz)^2)dy)}{y(1+(xz)^2)-x}$$

так можно упростить.

Scanned by CamScanner

II сп. Возьмём d от обеих частей ур-я:

$$F(x,y,z)=0$$

$$dF(x,y,z)=d0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

1) Найдём $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{z}{1+(xz)^2},\ \frac{\partial F}{\partial y}=z,\ \frac{\partial F}{\partial z}=y-\frac{x}{1+(xz)^2}$$

2) Подставим в последнее ур-е и выразим dz:

$$-\frac{z}{1+(xz)^2}dx+z\,dy+\left(y-\frac{x}{1+(xz)^2}\right)dz=0.$$

$$dz=\frac{\frac{z}{1+(xz)^2}dx-z\,dy}{y-\frac{x}{1+(xz)^2}}=$$

$$=\frac{z\,dx-z(1+(xz)^2)dy}{y(1+(xz)^2)-x}.$$

Тот же ответ.

Ответ:.

$\boxed{\text{Д/З IX № 7.150}}$

№ 7.152.

Найти вторые частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z=z(x,y)$, заданной неявно уравнением $x+y+z=e^z$.

Решение. $F(x,y,z)=x+y+z-e^z$

1) Найдём 1-е частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=1-e^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{1-e^z}=\frac{1}{e^z-1} ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{1-e^z}=\frac{1}{e^z-1}$$

2) Найдём 2-е частные производные.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^z-1}\right)=-\frac{1}{(e^z-1)^2}\cdot e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=$$

$$=-\frac{e^z}{(e^z-1)^2}\cdot\frac{1}{e^z-1}=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}=\frac{e^z}{(1-e^z)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\ldots\text{аналог}\ldots=\frac{e^z}{(1-e^z)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{e^z-1}\right)=-\frac{1}{(e^z-1)^2}e^z\frac{\partial z}{\partial y}=$$

$$=-\frac{1}{(e^z-1)^2}e^z\cdot\frac{1}{e^z-1}=\frac{e^z}{(1-e^z)^3}.$$

Scanned by CamScanner

След., $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^z}{(1-e^z)^3}$

Можно выразить e^z из исходного ур-е:

$$e^z = x+y+z$$

и подставить в ответ, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x+y+z}{(1-(x+y+z))^3}.$$

Ответ: или в таком виде.

ДЗ $\underline{X}$ №7.151.