Занятие 13. Часть 1

Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных

Из теории:

Градиентом ф-ции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ наз. вектор из частных производных

$$grad\, f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$$

Производной ф-ции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в т. $x \in \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $\vec{n}$ наз. число

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \vec{n}} = \lim_{s \to +0} \frac{f(x+s\vec{n}_0) - f(x)}{s},$$

где $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ - единичный вектор данного направления, если этот предел $\exists$.

Т-ма Если ф-я $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в т. $x \in \mathbb{R}^n$,

то $\frac{\partial f(x)}{\partial \vec{n}} = (grad\, f(x), \vec{n}_0)$

№ 1031.

Найти производную ф-ции $u = \underbrace{x^2 + \frac{1}{2}y^2}_{f(x,y)}$ в точке $P_0(2,-1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, где $P_1(6,2)$.

Решение.

Scanned by CamScanner

1) Найдём вектор $\operatorname{grad} f(P_0) = \left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 2 \cdot 2 = 4$

$\frac{\partial f}{\partial y} = y \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = -1$

След, $\operatorname{grad} f(P_0) = (4, -1)$

2) Найдём ед. вектор $\vec{n_0} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{|\overrightarrow{P_0P_1}|}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{P_0P_1} = (6-2, 2-(-1)) = (4,3) \\ |\overrightarrow{P_0P_1}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n_0} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

3) Найдём искомую производную:

$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{n}} = (\operatorname{grad} f(P_0), \vec{n_0}) = 4 \cdot \frac{4}{5} + (-1) \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$,

где $\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1}$

Ответ: $\frac{13}{5}$.

№1033.

То же задание для ф-ции
$u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$ в точке $P_0(1, 3, 2, -1)$
по направлению вектора $\vec{a} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} - 2\vec{e_4}$.

Решение.

1) Градиент в т. P_0.

$\operatorname{grad} f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0), \frac{\partial f}{\partial x_3}(P_0), \frac{\partial f}{\partial x_4}(P_0)\right)$

Scanned by CamScanner

$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2,\ \frac{\partial f}{\partial x_3}=-2x_3,\ \frac{\partial f}{\partial x_4}=2x_4$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)=2\cdot 1=2,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0)=2\cdot 3=6,\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(P_0)=-2\cdot 2=-4,\ \frac{\partial f}{\partial x_4}(P_0)=$
$=2\cdot(-1)=-2.$

След., $\mathrm{grad} f(P_0)=(2,6,-4,-2)$

2) Ед. вектор $\vec{n}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(2,1,0,-2)\\ |\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+0^2+(-2)^2}=3\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}_0=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,\frac{-2}{3}\right)$

3) Произв. по направл. $\vec{a}$ в т. P_0:

$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{a}}=(\mathrm{grad} f(P_0),\vec{n}_0)=2\cdot\frac{2}{3}+6\cdot\frac{1}{3}+(-4)\cdot 0+(-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=$
$=\frac{4}{3}+\frac{6}{3}+\frac{4}{3}=\frac{14}{3}$

Ответ: $\frac{14}{3}$.

№ 1035

То же для ф-ции $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ в точке $P(a,b,c)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

Решение.

1) Градиент ф-ции в т. P:

$\mathrm{grad} f(P)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P),\frac{\partial f}{\partial y}(P),\frac{\partial f}{\partial z}(P)\right).$

Scanned by CamScanner

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{c^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)=\frac{2a}{a^2}=\frac{2}{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P)=\frac{2b}{b^2}=\frac{2}{b}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P)=\frac{2c}{c^2}=\frac{2}{c}$$

След, $\operatorname{grad} f(P)=\left(\frac{2}{a}, \frac{2}{b}, \frac{2}{c}\right)$.

2) Радиус-вектор точки $P(a,b,c)$ – это вектор $\vec{OP}$, где $O(0,0,0)$.

Обозн. $\vec{n}=\vec{OP} \Rightarrow \vec{n}(a,b,c)$

Ед. вектор $\vec{n_0}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$

3) Произв. ф-ции f по направл. $\vec{n}$ в т. P:

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \vec{n}}=(\operatorname{grad} f(P), \vec{n_0})=\frac{2}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\frac{2}{\cancel{b}}\cdot\frac{\cancel{b}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+$$

$$+\frac{2}{\cancel{c}}\cdot\frac{\cancel{c}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{6}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

№1037.

Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания функции $u=xyz$ в т. $P_0(1,2,2)$.

Решение.

Scanned by CamScanner

1) Направление наибольшего роста ф-ции в точке P_0 указывает вектор $\operatorname{grad} f(P_0) = \left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\right)$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$

$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 2 \cdot 2 = 4$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 1 \cdot 2 = 2$, $\frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 1 \cdot 2 = 2$.

След, $\operatorname{grad} f(P_0) = (4, 2, 2)$ – направление наибольшего роста ф-ции в т. P_0

2) Скорость наибольшего роста в т. P_0 равна $|\operatorname{grad} f(P_0)| = \sqrt{4^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{2^2+1+1} =$
$= 2\sqrt{6}$

Ответ: $(4, 2, 2)$; $2\sqrt{6}$.

ДЗ I. N 10.32, 10.34, 10.36,

по задачнику Ефимов А.В., Демидович Б.П.

Сборник задач по мат-ке для втузов. В 4х частях. Ч.2. Специальные разделы матем. анализа.

Scanned by CamScanner

Приближенное вычисление значения

№А. неявной функции

Неявная функция $z(x,y)$ в окрестности точки $(1,-2,1)$ задана уравнением

$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

Найти дифференциал ф-ции z в точке $(1,-2)$. С помощью найденного выражения вычислить приближенно $z(0{,}9\,;\,-1{,}8)$.

Решение. Перепишем: $\underbrace{x^3+y^3+z^3-3xyz}_{F(x,y,z)}=0$

1) $dz(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$, где

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Найдем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}&=3x^2-3yz \\ \frac{\partial F}{\partial y}&=3y^2-3xz \\ \frac{\partial F}{\partial z}&=3z^2-3xy \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}&=-\frac{3x^2-3yz}{3z^2-3xy}=-\frac{x^2-yz}{z^2-xy} \\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-\frac{y^2-xz}{z^2-xy} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2,1)=-\frac{1^2-(-2)\cdot 1}{1^2-1\cdot(-2)}=-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,-2,1)=-\frac{(-2)^2-1\cdot 1}{1^2-1\cdot(-2)}=-\frac{3}{3}=-1$$

Scanned by CamScanner

След, дифференциал ф-ции в т. (1,−2) равен
$dz(1;-2)=(-1)dx+(-1)dy=-dx-dy$.

Зам, что дифференциал ф-ции в точке P_0 зависит не только от точки P_0, но и от приращения $\overrightarrow{P_0P}=(\Delta x,\Delta y)=(dx,dy)$

2) $\Delta z \approx dz$, $P_0(x_0,y_0)=(1,-2)$, $P(x,y)=(0{,}9;-1{,}8)$

$$z(P)-z(P_0)\approx\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\Delta y$$

$$\boxed{z(P)\approx z(P_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\Delta y}$$

По условию $z(P_0)=z(1,-2)=1$;

$\Delta x=x-x_0=0{,}9-1=-0{,}1$,

$\Delta y=y-y_0=-1{,}8-(-2)=0{,}2$.

След., $z(0{,}9;-1{,}8)\approx 1-(-0{,}1)-0{,}2=0{,}9$

Ответ: $-dx-dy$; $0{,}9$.

№13 II Задача 5 из подготовки к контр. работе.

Scanned by CamScanner