Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Пусть пов-ть S задана

ур-ем $F(x,y,z)=0$	графиком ф-ции $z=f(x,y)$

Тогда

ур-е касат. плоскости в т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$F'_x(M_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(M_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(M_0)\cdot(z-z_0)=0$	$f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$

ур-е нормали в т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$\dfrac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$	$\dfrac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}.$

(если касат. пл. и нормаль существуют).

№7.229(а)

Найти уравнения касат. плоскости и нормали к поверхности $z=\underbrace{\sin x\cos y}_{f(x,y)}$ в точке $M_0\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$

Решение.

1) Найдём

$f'_x=\cos x\cos y \Rightarrow f'_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac12$

$f'_y=-\sin x\sin y \Rightarrow f'_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=-\frac12$

2) Ур-е касат. пл. в т. $M_0\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$:

$f'_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+f'_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$ (9)

$\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \quad |\cdot 2$

$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-2\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$

$x-\cancel{\frac{\pi}{4}}-y+\cancel{\frac{\pi}{4}}-2z+1=0$

$x-y-2z+1=0$

3) Ур-е нормали в т. $M_0\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-1}$$ (можно не упрощать)

Ответ: см.

№ 7.232.

Для поверхности $z=4x-xy+y^2$ найти ур-е касат. плоскости, параллельной плоскости $4x+y+2z+9=0$.

Решение

1) Найдём

$f'_x=4-y \Rightarrow f'_x(x_0,y_0)=4-y_0$

$f'_y=-x+2y \Rightarrow f'_y(x_0,y_0)=-x_0+2y_0$

2) Ур-е касат. пл. в неизвестной т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$, где $z_0=f(x_0,y_0)=4x_0-x_0y_0+y_0^2$:

$(4-y_0)(x-x_0)+(-x_0+2y_0)(y-y_0)-(z-(4x_0-x_0y_0+y_0^2))=0$

$(4-y_0)x+(2y_0-x_0)y-z+y_0(x_0-y_0)=0$ (после упрощения ур-я!)

3) Обозначим касат. пл. через α.

В условии дана пл. $\beta: 4x+y+2z+9=0$.

Из условия параллельности плоскостей

$$\alpha \parallel \beta \Rightarrow \frac{4-y_0}{4} = \frac{2y_0-x_0}{1} = \frac{-1}{2}$$

найдём x_0, y_0:

$$\begin{cases} \frac{4-y_0}{4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{2y_0-x_0}{1} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Напоминание.

Плоскости $\alpha: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

параллельны $\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

(т.е. их нормали параллельны)

$$\begin{cases} x_0 = \frac{25}{2} \\ y_0 = 6 \end{cases}$$

Подставим в ур-е касат. плоскости α:

$$(4-6)x + \left(2\cdot 6 - \frac{25}{2}\right)y - z + 6\left(\frac{25}{2} - 6\right) = 0$$

$$-2x - \frac{1}{2}y - z - \frac{6\cdot 13}{2} = 0 \quad |\cdot(2)$$

$$4x + y + 2z + 78 = 0$$

Ответ: $4x+y+2z+78=0$

№7.233(а)

Найти уравнение касат. плоскости и нормали к поверхности $\underbrace{x(y+z)(xy-z)+8}_{F(x,y,z)}=0$ в точке $M_0(2,1,3)$.

Решение.

1) Найдём

$F'_x = (y+z)\left(x(xy-z)\right)'_x = (y+z)\left(1\cdot(xy-z)+x\cdot y\right) = (y+z)(2xy-z)$

вынесли, т.к. не зависит от x

$\Downarrow$

$F'_x(M_0) = (1+3)(2\cdot2\cdot1-3) = 4\cdot1 = 4$

$F'_y = x\cdot\left((y+z)(xy-z)\right)'_y = x\left(1\cdot(xy-z)+(y+z)\cdot x\right) =$

$= x(2xy - z + xz)$

$\Downarrow$

$F'_y(M_0) = 2(2\cdot2\cdot1-3+2\cdot3) = 2\cdot7 = 14$

$F'_z = x\left((y+z)(xy-z)\right)'_z = x\left(1\cdot(xy-z)+(y+z)(-1)\right) =$

$= x(xy - 2z - y)$

$\Downarrow$

$F'_z(M_0) = 2(2\cdot1-2\cdot3-1) = 2\cdot(-5) = -10$

2) Ур-е касат. плоскости в т. M_0:

$F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y-y_0) + F'_z(M_0)(z-z_0) = 0$

$4(x-2) + 14(y-1) - 10(z-3) = 0 \quad |:2$

$2(x-2) + 7(y-1) - 5(z-3) = 0$

$2x + 7y - 5z - 4 - 7 + 15 = 0$

$\boxed{2x + 7y - 5z + 4 = 0}$

Ответ:

3) Ур-е нормали в т. M_0

$\dfrac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \dfrac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \dfrac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$

$\boxed{\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{14} = \dfrac{z-3}{-10}}$

№7.234.

Для поверхности $x^2-z^2-2x+6y=4$ найти ур-я нормали, параллельной прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$

Решение.

Перепишем ур-е пов-ти: $\underbrace{x^2-z^2-2x+6y-4}_{F(x,y,z)}=0$

Ур-е нормали в т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

1) Найдём

$F'_x=2x-2 \Rightarrow F'_x(M_0)=2x_0-2$

$F'_y=6 \Rightarrow F'_y(M_0)=6$

$F'_z=-2z \Rightarrow F'_z(M_0)=-2z_0$

2) Ур-е нормали l в неизвестной точке M_0:

$$\frac{x-x_0}{2x_0-2}=\frac{y-y_0}{6}=\frac{z-z_0}{-2z_0}.$$

3) В условии дана прямая m:

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$$

Из условия ||-ти прямых:

$$l \parallel m \Rightarrow \frac{2x_0-2}{1}=\frac{6}{3}=\frac{-2z_0}{4}$$

Найдём x_0, y_0, z_0

$$\begin{cases} 2x_0-2=2 \\ -6z_0=24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0=2 \\ z_0=-4 \end{cases}$$

Напоминание.

Прямые $a: \frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{b_1}=\frac{z-z_0}{c_1}$

$b: \frac{x-x^0}{a_2}=\frac{y-y^0}{b_2}=\frac{z-z^0}{c_2}$

параллельны $\Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

(т.е. их направл. векторы параллельны)

Подставим x_0, z_0 в ур-е поверхности и найдём y_0

$$\frac{x_0^2-z_0^2}{2}-2x_0+6y_0=4$$

$$\frac{2^2-(-4)^2}{2}-2\cdot 2+6\cdot y_0=4$$

...

$$y_0=\frac{10}{3}$$

Подст. x_0, y_0, z_0 в ур-е нормали l:

$$\boxed{\frac{x-2}{2}=\frac{y-\frac{10}{3}}{6}=\frac{z+4}{8}}$$

Ответ.

ДЗ I № 7.229(б), 7.233(б,в), 7.235

№ 7.239(а)

Показать, что поверхности

$x^2+y^2+z^2=2ax$ и $x^2+y^2+z^2=2by$

попарно ортогональны

Док-во.

Перепишем ур-я поверхностей:

пов-ть S_1: $\underbrace{x^2+y^2+z^2-2ax}_{F_1(x,y,z)}=0$ и $\underbrace{x^2+y^2+z^2-2by}_{F_2(x,y,z)}=0$: S_2 пов-ть

Векторы

$\vec{n}_1 = \mathrm{grad}\, F_1(x,y,z)$ и $\vec{n}_2 = \mathrm{grad}\, F_2(x,y,z)$

ортогональны своим поверхностям в любой точке $M(x,y,z)$ (они явл. направл. векторами нормалей к пов-тям)

Поэтому

поверхности S_1 и S_2 ортогональны $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ норм. векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ ортогональны $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ скал. произв. $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$

1) Найдём $\mathrm{grad}\, F_1$ и $\mathrm{grad}\, F_2$.

$F'_{1x} = 2x - 2a$	$F'_{2x} = 2x$
$F'_{1y} = 2y$	$F'_{2y} = 2y - 2b$
$F'_{1z} = 2z$	$F'_{2z} = 2z$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\vec{n}_1 = \mathrm{grad}\, F_1 = (2x-2a, 2y, 2z)$	$\vec{n}_2 = \mathrm{grad}\, F_2 = (2x, 2y-2b, 2z)$.

2) Найдём скал. произведение

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = (2x-2a)2x + 2y(2y-2b) + (2z)^2 =$$

$$= (2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2 - 4ax - 4by =$$

$$= 4(x^2 + y^2 + z^2 - ax - by)$$

Надо док-ть, что это выражение равно нулю.

3) Мы доказываем ортогональность пов-тей в точках их пересечения.

Координаты (x,y,z) точек пересечения пов-тей удовл. ур-ю и 1ой, и 2ой пов-ти:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2ax \\ x^2+y^2+z^2=2by \end{cases}$$

След, для точек пересечения $2ax=2by$
$ax=by$.

Подставим в скал. произв. в п. 2):

$$(\vec{n_1},\vec{n_2})=4(x^2+y^2+z^2-ax-ax)=$$
$$=4(x^2+y^2+z^2-2ax)=0,$$

т.к. т. (x,y,z) удовл. ур-ю 1ой пов-ти (и 2ой тоже).

Итак, $(\vec{n_1},\vec{n_2})=0$ в т-х пересечения пов-тей. След, пов-ти ортогональны.

ч.т.д.

$\boxed{\text{ДЗ II} \ \text{№} 7.239(б)}$

ДЗ III Из подготовки к РК2 решить

с. 2 №1,2,3 (базовый уровень

с. 2 №1,2,3 (повыш. уровень)