Занятие 14.

Экстремум функции неск. перем.

План нахождения точек экстремума и экстремумов дважды непрерывно-дифференцируемой ф-ции.

См. важный пример на с. 8.

1. Найдём стационарные точки функции.
   1) Найдём 1-е частные производные $f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}$
   2) Решим систему $\begin{cases} f'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_n} = 0 \end{cases}$

   Её решения – стац. точки.

2. Определим тип квадр. формы $d^2 f$ в стационарных точках.
   1) Найдём 2-е частные производные $f''_{x_i x_j}$, вычислим их значения в стац. точках и составим матрицу Гессе из их значений:

$$f'' = \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1} & \cdots & f''_{x_1 x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{x_n x_1} & \cdots & f''_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

   Зам. $f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}$

   2) С помощью критерия Сильвестра

определим тип квадр формы d^2f.

Если d^2f (в стац. точке)
1) $\oplus$ определённая, то строгий лок. min,
2) $\ominus$ определённая, то —"— max,
3) знакопеременная, то не экстремум.

<u>Частный случай для $z=f(x,y)$</u>

Пусть матрица Гессе

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

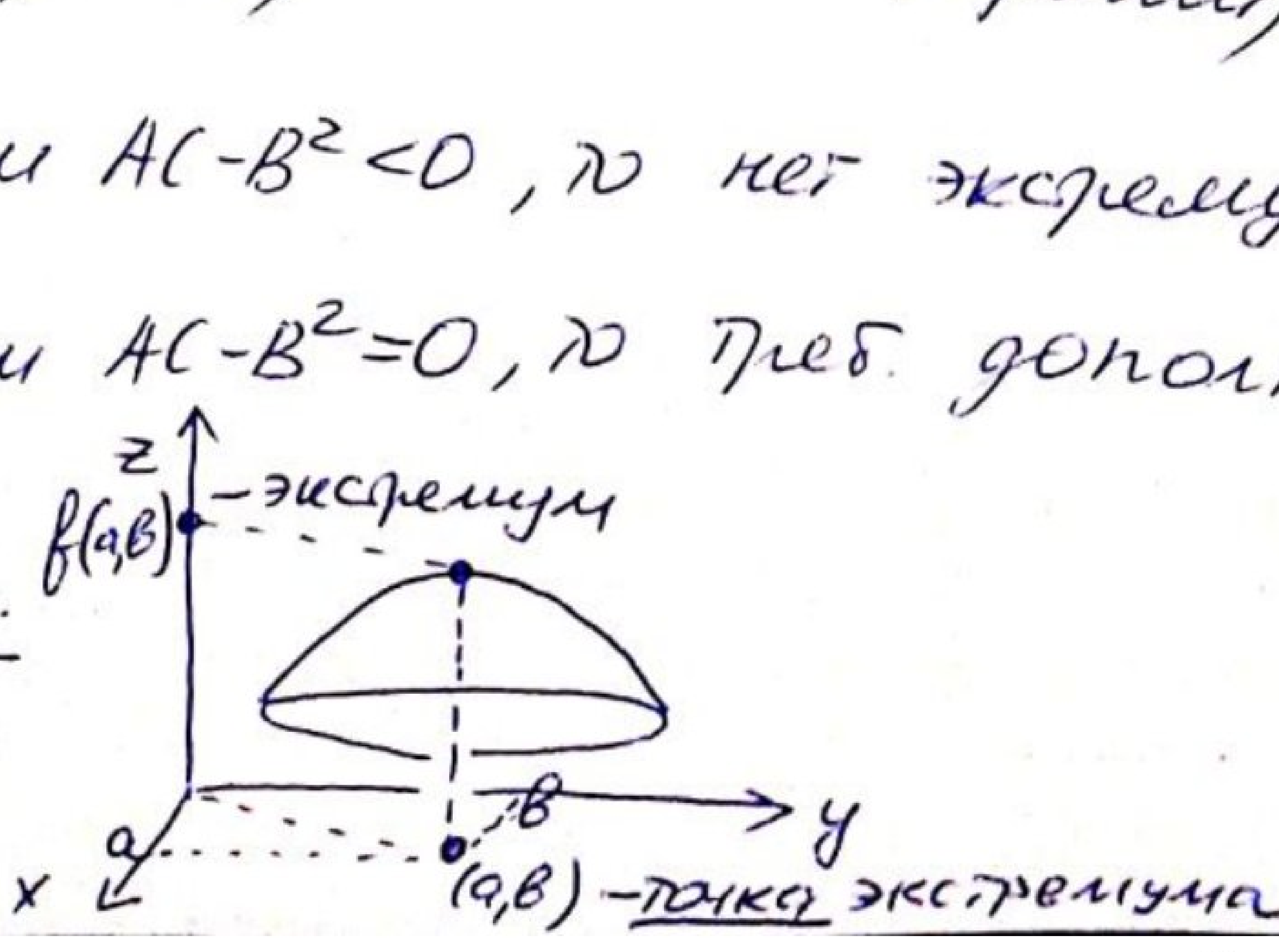
1) Если $AC-B^2>0$ и

$A>0$	$A<0$
то	
лок. минимум (строгий)	лок максимум (строгий)

2) Если $AC-B^2<0$, то нет экстремума.

3) Если $AC-B^2=0$, то треб. дополнит. исслед.

<u>Зам.</u>



№7.187

Найти экстремумы функции

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

Решение. Ф-я дважды непр.-дифф. на $\mathbb{R}^2$

① Стац. точки.

1) $z'_x = 2x + y - 3$
$z'_y = x + 2y - 6$

2) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

След., $P(0,3)$ – стационарная точка

② Исслед. стац. точку на экстремум.

Найдём матр. Гессе в стац. точках

1) $z''_{xx} = 2$
$z''_{yy} = 2$
$z''_{xy} = 1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = z''(A)$$

Матр. Гессе

Здесь (матр. Гессе не зависит от точки A)

2) $\Delta_2 = AC - B^2 = 3 > 0$
$\Delta_1 = A = 2 > 0$

$\Rightarrow d^2z$ – положит. опред. форма

$\Downarrow$

$(0,3)$ – точка строгого лок минимума (точка экстремума ф-ции)

③ $z_{min}(0,3) = 0^2 + 0\cdot 3 + 3^2 - 3\cdot 0 - 6\cdot 3 = 9 - 18 = -9$ – строгий лок минимум ф-ции (экстремум ф-ции)

Ответ: $z_{min}(0,3) = -9$

№7.189.

$z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$

Решение. Ф-я дважды непр-дифференцируем. на $\mathbb{R}^2$.

(1) Стац. точки

1) $z'_x = 6x - 3x^2$
$z'_y = 6y + 4$

2) $\begin{cases} 6x - 3x^2 = 0 \\ 6y + 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right. \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$

След., $P(0, -\frac{2}{3})$ и $Q(3; -\frac{2}{3})$ — стац. точки

(2) Исслед. стац. точку на экстремум.
Найдем мат. Гессе в стац. точках.

1) $z''_{xx} = 6 - 6x$
$z''_{yy} = 6$ $\Rightarrow$ мат. Гессе $\overset{\text{||}}{z''} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-6x & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
$z''_{xy} = 0$

В стац. точках: $z''(P) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $z''(Q) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

2) Для т. P

$\Delta_2 = 36 > 0$

$\Delta_1 = 6 > 0$

$\Downarrow$

т. P — точка лок. min

Для т. Q

$\Delta_2 = -72 < 0$

$\Downarrow$

т. Q не явл. точкой экстремума

(3) $z_{min}(P) = 3 \cdot 0^2 - 0^3 + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

Ответ: $z_{min}(0, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$.

№ 7.191.

$z = x^2+y^2-2\ln x-18\ln y \quad (x>0, y>0)$

Решение. Ф-я дважды непр. дифф. на $\{(x,y) \mid x>0, y>0\}$

1) Стационарные точки

1) $z'_x = 2x - \frac{2}{x}$

$z'_y = 2y - \frac{18}{y}$

2) $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = 0 \\ y - \frac{9}{y} = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \end{array} \right.$ не удовл. усл. $x>0, y>0$

След, $P(1;3)$ — единств. стац. точка

2) Исслед. стац. точку на экстремум.
Найдём мат. Гессе в стац. точках

1) $z''_{xx} = 2 + \frac{2}{x^2}$

$z''_{yy} = 2 + \frac{18}{y^2}$ $\Rightarrow$ мат. Гессе $z'' = \begin{pmatrix} 2+\frac{2}{x^2} & 0 \\ 0 & 2+\frac{18}{y^2} \end{pmatrix}$

$z''_{xy} = 0$

В стац. точке P

$z''(P) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

2) $\Delta_2 = 16 > 0$
$\Delta_1 = 4 > 0$ $\Rightarrow$ P — точка минимума

3) $z_{min}(P) = 1^2+3^2-2\ln 1-18\ln 3 = 10-18\ln 3$.

Ответ: $z_{min}(1,3) = 10-18\ln 3$.

№7.193

$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

Решение. Ф-я дважды непр.-дифф на $\mathbb{R}^2$.

① Найдём стационарные точки.

1) $z'_x = 6x^2 - y^2 + 10x$
$z'_y = -2xy + 2y$

2) $\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 & (1) \\ -2xy + 2y = 0 & (2) \end{cases}$

Из (2) ур-е: $y(1-x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

подст. в (1) ур-е:

$\begin{cases} y = 0 \\ 6x^2 + 10x = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} x = 1 \\ 6 - y^2 + 10 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{5}{3} \end{array}\right. \end{cases}$ | $\begin{cases} x = 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = -4 \\ y = 4 \end{array}\right. \end{cases}$

Получим 4 стац. точки

$P(0,0)$, $Q(-\frac{5}{3}, 0)$, $R(1; -4)$, $S(1, 4)$

② Исслед. стац. точки на экстремум.

1) Найдём мат. Гессе в стац. точках.

$z''_{xx} = 12x + 10$

$z''_{yy} = -2x + 2$

$z''_{xy} = -2y$

$\Rightarrow$ мат. Гессе

$z'' = \begin{pmatrix} 12x + 10 & -2y \\ -2y & -2x + 2 \end{pmatrix}$.

Матр. Гессе в стац. точках:

$z''(P)=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$	$z''(Q)=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & \frac{14}{3}\end{pmatrix}$	$z''(R)=\begin{pmatrix}22 & 8\\ 8 & 0\end{pmatrix}$	$z''(S)=\begin{pmatrix}22 & -8\\ -8 & 0\end{pmatrix}$
2) $\Delta_2=20>0$, $\Delta_1=10>0$	$\Delta_2=-28<0$	$\Delta_2=-64<0$	$\Delta_2=-64<0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
P – т. min	Q – не явл. т. экср	R – не явл. т. экср	S – не явл. т. экср

③ $z_{min}(P)=0$

Ответ: $z_{min}(90)=0$.

$\boxed{\text{ДЗ I № 7.188–7.194 (чётные номера)}}$

$\boxed{\text{ДЗ II Из подготовки к РК2 с. 2 № 4,5,6 (базовый уровень)}}$

№7.195

$z = 2 - \sqrt[3]{x^2+y^2}$

Решение. $D(z) = \mathbb{R}^2$.

Важно! Ф-я $z=f(x,y)$ в этом номере не яв. дважды непр-диф. Поэтому ищем точки экстр. среди крит. точек, не яв. стац.

① Найдём крит. точки ф-ции

1) $z'_x = -\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \dfrac{-2x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2+y^2}^{\,2}}$

$z'_y = \dfrac{-2y}{3\cdot\sqrt[3]{x^2+y^2}^{\,2}}$

2) а) grad f не существует в т. (0,0) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (0,0) крит. точка.

т.к. $D(z'_x)=\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ и ~~$D(z'_y)=\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$~~

б) $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ не имеет реш. $\Rightarrow$ нет стационарных точек.

Получили крит. точку $P(0,0)$.

② Исслед. крит. т. на экстремум.

$z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}$ $\nexists$ в т. P $\Rightarrow$ мат. Гессе использовать нельзя.

Из вида функции $z=2-\sqrt[3]{x^2+y^2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow z(P) > z(Q) \quad \forall Q \neq P$

След., т. P – т. лок. максимума

③ $z_{max}(P) = 2$

Ответ: $z_{max}(0,0) = 2$.