Занятие 15. Часть 1.

Условный экстремум функции нескольких переменных.

Задача: $z = f(x,y) \to \text{ext}_1$ (f - целевая ф-я, $\varphi(x,y)=0$ - ур-е связи)

$\varphi(x,y) = 0$

I способ Метод исключения части перем-х.

① Выразим из уравнения связи $\varphi(x,y)=0$ одну перем. через другую (если это возможно), напр., $y = y(x)$.

Подставим в целевую ф-ю $f(x,y)$.

Получим ф-ю от одной перем.:

$$z = f(x, y(x)) = g(x)$$

② Исследуем $g(x)$ на экстремум.

II способ. Метод Лагранжа

① Составим ф-ю Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

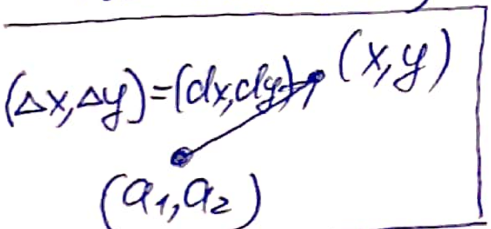
Найдём стационарные точки ф-ии $L(x,y,\lambda)$.

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$$

② Пусть (a_1,a_2,λ_a) — одна из стац. точек L.
Подставим λ_a в $L(x,y,\lambda)$.
Получим $L(x,y)=L(x,y,\lambda_a)$.

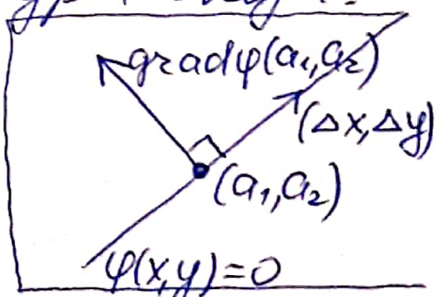
Найдём квадр. форму
$$d^2L(x,y)=L''_{xx}(x,y)(dx)^2+2L''_{xy}(x,y)dxdy+L''_{yy}(x,y)(dy)^2$$
Подставим a_1,a_2:
$$d^2L(a_1,a_2)=L''_{xx}(a_1,a_2)(dx)^2+2L''_{xy}(a_1,a_2)dxdy+L''_{yy}(a_1,a_2)(dy)^2$$

③ Исследуем $d^2L(a_1,a_2)$ на знакоопределённость.
Но приращения dx, dy будем брать не любые, а определяемые ур-ем связи.



Поясн. $d^2L(a_1,a_2)$ явл. ф-ей от dx, dy.

Возьмём дифф-л от ур-я связи:
$$d\varphi(x,y)=0$$
$$\varphi'_x(x,y)dx+\varphi'_y(x,y)dy=0$$



Подставим a_1,a_2:
$$(*)\qquad \varphi'_x(a_1,a_2)dx+\varphi'_y(a_1,a_2)dy=0$$

Выразим из этого равенства один дифф-л через другой, напр., $dy=-\dfrac{\varphi'_x(a_1,a_2)}{\varphi'_y(a_1,a_2)}dx$

Подставим в $d^2L(a_1,a_2)$ и упростим.
Получим $d^2L(a_1,a_2)=\underbrace{D(a_1,a_2)}_{\text{число}}(dx)^2$.

Это $d^2L(a_1,a_2)\big|_H$ — кв. форма, ограниченная на подпр-во H, заданное ур-ем (*).

Если $D(a_1,a_2)>0$, то (a_1,a_2) – т. усл. лок. min,
<0, то (a_1,a_2) – т. усл. лок. max,
$=0$, то треб. доп. исслед.

III способ. Матричный метод

① Составим ф-ю Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

Найдём стационарные точки ф-ции L:

$$\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ L'_\lambda=0 \end{cases}$$

② Пусть (a_1,a_2,λ_a) – одна из стац. точек L.
Подставим λ_a в $L(x,y,\lambda)$.
Получим $L(x,y)=L(x,y,\lambda_a)$.
Найдём $\varphi'_x(a_1,a_2)$, $\varphi'_y(a_1,a_2)$, $L''_{xx}(a_1,a_2)$,
$L''_{yy}(a_1,a_2)$, $L''_{xy}(a_1,a_2)$
и вычислим определитель

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta>0$, то (a_1,a_2) – т. усл. лок. min
$\Delta<0$, то (a_1,a_2) – т. усл. лок. max;
$\Delta=0$, то треб. доп. исслед.

№7.201.

Найти условный экстремум функции

$z = x^2+y^2-xy+x+y-4$ при $x+y+3=0$.

Решение.

I сп. Исключение части переменных.

① Выразим из ур-е связи одну переменную через другую и подставим в ф-ю.

Напр., $y=-x-3$.

$$\Rightarrow z = x^2+(-x-3)^2-x(-x-3)+x+(-x-3)-4 =$$
$$= x^2+x^2+6x+9+x^2+3x+\cancel{x}-\cancel{x}-3-4 =$$
$$= 3x^2+9x+2$$

② Исслед. ф-ю $z(x)$ на экстремум.

Из „школьных соображений"

$z=z(x)$ квадр. ф-я, график – парабола, ветви вверх, т. минимума – это $x_{вершина} = \frac{-в}{2a}$ параболы

$$x_в = \frac{-9}{2\cdot3} = -\frac{3}{2} = x_{min} \quad \left(\Rightarrow y=-\left(-\frac{3}{2}\right)-3=-\frac{3}{2}\right)$$

$$z_{min}\left(-\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\frac{9}{4}+9\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+2 = \frac{27}{4}-\frac{27}{2}+2 = -\frac{19}{4}$$

Точка усл. минимума: $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$,

усл. минимум $z_{min}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}$.

II сп. Метод Лагранжа.

① Составим ф-ю Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2-xy+x+y-4+\lambda(x+y+3)$$

Найдём её стационарные точки:

$$L'_x = 2x-y+1+\lambda$$

$$L'_y = 2y-x+1+\lambda$$

$$L'_\lambda = x+y+3$$

Решим систему ур-ий:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y+1+\lambda=0 \\ 2y-x+1+\lambda=0 \\ x+y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \\ \lambda=\frac{1}{2} \end{cases}$$

② Исслед. точку $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Подставим $\lambda = -\frac{1}{2}$ в $L(x,y,\lambda)$. Получим

$$L(x,y) = x^2+y^2-xy+x+y-4+\frac{1}{2}(x+y+3) =$$

$$= x^2+y^2-xy+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{5}{2}$$

Найдём 2-й дифференциал $d^2L(x,y) =$

$$= L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2.$$

$L'_x(x,y) = 2x-y+\frac{3}{2}$ $\qquad L''_{xx} = 2$

$L'_y(x,y) = 2y-x+\frac{3}{2}$ $\qquad L''_{yy} = 2$

$L'_{xy} = -1$

Зам. $L''_{xx}, L''_{yy}, L''_{xy}$ постоянные $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ не зависят от т. $(x,y) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

След, $d^2L(x,y) = 2dx^2 - 2dxdy + 2dy^2 = d^2L\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

(3) Возьмём дифф-л от ур-я связи:

$$x+y+3=0$$
$$dx+dy=0$$

Выразим $dy=-dx$

Это равенство задаёт подпр-во H.

Подставим в $d^2L(x,y)$:

Зам.
В данной задаче ещё до подстановки $dy=-dx$ в $d^2L(x,y)$ можно сказать, какая $d^2L(x,y)$:
$\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=4-1=3>0$ $\Rightarrow$
$d^2L(x,y)>0$
$\Downarrow$
$d^2L(x,y)\Big|_H>0$
$\Downarrow$
$(x,y)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ – т. min

$$d^2L(x,y)\Big|_H=2dx^2-2dx(-dx)+2(dx)^2=$$
$$=6(dx)^2>0$$

$\Rightarrow (x,y)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ – точка усл. лок. мин.

(4) $z_{min}\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{4}$.

III сп. (1) Найдём стац. т. ф-ции Лагранжа (см действие (1) пред. способа): $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

(2) $\varphi'_x=1$
$\varphi'_y=1$

$L'_x=2x-y+1+\lambda \Rightarrow L''_{xx}=2$

$L'_y=2y-x+1+\lambda \Rightarrow L''_{yy}=2$

$L''_{xy}=-1$

Вычисленные частные производные в этой задаче не завис. от x, y, поэтому подставлять $x=-\frac{3}{2}, y=-\frac{3}{2}$ некуда.

Найдём определитель

$$\Delta=-\begin{vmatrix}0 & \varphi'_x & \varphi'_y\\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy}\\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=6>0$$

$\Rightarrow$ найденная точка $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ явл т. усл. min.

(3) Ответ: $z_{min}\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{4}$.

№7.205.

$z = 2x+y \to extr$

$x^2+y^2=1$

Эта запись озн.: исслед. ф-ю $z=2x+y$ на экстр. при условии $x^2+y^2=1$.

Решение. Решим последним III-им способом.

Стац. точки ф-ции Лагранжа:

(1) $L(x,y,\lambda) = \underbrace{2x+y}_{f(x,y)} + \lambda(\underbrace{x^2+y^2-1}_{\varphi(x,y)})$

$$\begin{cases} L'_x = 2+2\lambda x = 0 \\ L'_y = 1+2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2+y^2-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{4}{\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}-1=0 \end{cases}$$

$$\frac{5}{4\lambda^2}=1$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt5}{2}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt5}{2} \\ x = -\frac{2}{\sqrt5} \\ y = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -\frac{\sqrt5}{2} \\ x = \frac{2}{\sqrt5} \\ y = \frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$$

$\left(-\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}, \frac{\sqrt5}{2}\right)$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}, -\frac{\sqrt5}{2}\right)$

Рас. точки

$A\left(-\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right)$ $\qquad$ $B\left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)$.

Исследуем A и B на экстремум.

② $\varphi'_x = 2x \Rightarrow \varphi'_x(A) = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ | $\varphi'_x(B) = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$\varphi'_y = 2y \Rightarrow \varphi'_y(A) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ | $\varphi'_y(B) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$L''_{xx} = 2\lambda \Rightarrow L''_{xx}(A) = \sqrt{5}$ | $L''_{xx}(B) = -\sqrt{5}$

$L''_{yy} = 2\lambda \Rightarrow L''_{yy}(A) = \sqrt{5}$ | $L''_{yy}(B) = -\sqrt{5}$

$L''_{xy} = 0$

Найдём

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Для т. $A\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & \sqrt{5} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \sqrt{5} \end{vmatrix} =$$

$= 4\sqrt{5} > 0$

След, A – точка условного min

Для т. $B\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & -\sqrt{5} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\sqrt{5} \end{vmatrix} =$$

$= -4\sqrt{5} < 0$

След, B – точка условного max

ДВI №7.202
7.203
7.204

③ $z_{min}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$ | $z_{max}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$

Ответ: $z_{min}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$; $z_{max}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$

ДЗ II Из подготовки к РК2 решить с. 2 № 7, 8, 9 (базовый уровень)
с. 3 № 3 (из типового варианта билета)

Наибольшее и наименьшее значения функции.

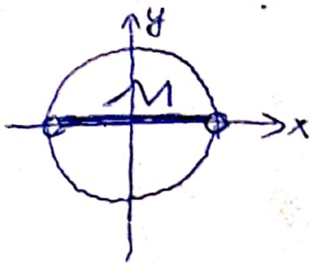
№ 7.214.

Найти наибольшее и наименьшее значения ф-ции $z = xy^2$ в области $x^2+y^2 \le 1$.

Решение. Обозн. $K=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$

(1) Найдём стац. точки ф-ции внутри K.

$$\begin{cases} z'_x = y^2 = 0 \\ z'_y = 2xy = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} & \text{это т. } O(0,0) \\ y=0 & \text{это ось } Ox. \end{array}\right.$$



Внутри области K лежат точки
$M=\{(x,y) \mid y=0,\ -1<x<1\}$

Значения ф-ции в стац. т-х внутри области:
$z(M) = x\cdot 0^2 = 0$
во всех т-х мн-ва M

(2) Исслед. ф-ю на границе области K.
Граница $\partial K = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

Выразим y^2: $y^2 = 1 - x^2$

Подставим в ф-ю:

$$z = x(1-x^2) = x - x^3$$

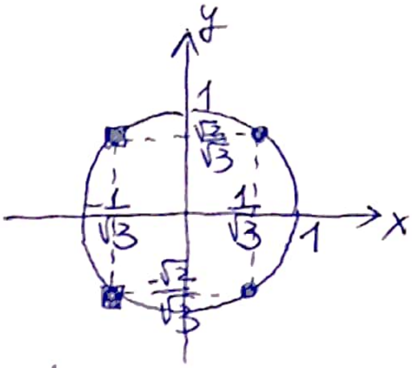
Исслед. на экстремум:

$$z'_x = 1 - 3x^2$$

$z'_x = 0$ $\quad 1 - 3x^2 = 0$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Найдём $z\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

$$z\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

3) Сравним все найденные в п. 1) и 2) значения ф-ции, получим

$z_{наим} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\sqrt{1-x^2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{3}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$z_{наиб} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Ответ: $z_{наим}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = z_{наим}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$z_{наиб}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = z_{наиб}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

ДЗ III № 7.211, 7.212, 7.213.

ДЗ IV Из подготовки к РК 2 решить с. 2 № 4–7 (повыш. сложн.); с. 3 № 4 (из типового вар-та билета)