Задачи о касат. плоскостях и нормалях.

№1.

Найти такие a, b, c, чтобы эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ касался плоскости $x+y+2z=1$ в точке $(1,2,1)$.

Занятие 15. Часть 2

Решение

1) Касат. пл. к эллипсоиду:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0 \;\Big/ :2$$

grad $F(x_0,y_0,z_0)$, где $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$

в т. касания

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=\underbrace{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}}_{=1}$$

$$\boxed{\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1}$$

2) касат. плоскость совп. с плоскостью

$x+y+2z=1$

ур-е плоскостей запис. так, чтобы своб. член был одинак.

$$\Downarrow$$

$$\frac{x_0}{a^2}=1,\ \frac{y_0}{b^2}=1,\ \frac{z_0}{c^2}=-2$$

$$x_0=a^2,\ y_0=b^2,\ z_0=-2c^2.$$

По усл. точка касания $(x_0, y_0, z_0) =$
$= (1, 2, 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$

$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$ $\Leftarrow$ Ответ:

$c^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

След, $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{\frac{1}{2}} = 1$ искомый эллипсоид

№2.

В каких точках пов-ти $\underbrace{xz+2xy+3yz+4=0}_{F(x,y,z)}$ касат. плоскость параллельна одной из коорд. плоскостей.

Решение.

① Ур-е касат. плоскости в т. (x_0, y_0, z_0):

$$\operatorname{grad} F = (F'_x, F'_y, F'_z) = (z+2y, 2x+3z, x+3y)$$

$$(z_0+2y_0)(x-x_0)+(2x_0+3z_0)(y-y_0)+(x_0+3y_0)(z-z_0)=0$$

② Касат. пл. имеет нормаль

$$\vec{n} = (z_0+2y_0, 2x_0+3z_0, x_0+3y_0)$$

или любой другой пропорциональный $\vec{n}$ вектор.

1) Касат. пл. ∥ пл. $Oxy \Leftrightarrow \vec{n}$ пропорц. вектору $\vec{k}=(0,0,1)$

$$\begin{cases} z_0+2y_0=0 \\ 2x_0+3z_0=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_0=-\frac{1}{2}z_0 \\ x_0=-\frac{3}{2}z_0 \end{cases}$$

чтобы найти z_0, подставим x_0, y_0, z_0 в ур-е пов-ти:

$$-\frac{3}{2}z_0\cdot z_0+2\left(-\frac{3}{2}z_0\right)\left(-\frac{1}{2}z_0\right)+3\left(-\frac{1}{2}z_0\right)z_0+4=0 \quad |\cdot(-4)$$

$$\cancel{6z_0^2}-\cancel{6z_0^2}+6z_0^2-16=0$$

$$z_0=\pm\sqrt{\frac{8}{3}} \Rightarrow$$

$$x_0 = \mp \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{3}} = \mp \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{1} = \mp\sqrt{5}$$

$$y_0 = -\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \mp\sqrt{\frac{2}{3}}$$

След., $A_1\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$ и $A_2\left(\sqrt{5}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$.

2) Касат. пл. $\parallel Oyz \Leftrightarrow \vec{n}$ пропорц. вектору $\vec{i}=(1,0,0)$.

$$\begin{cases} 2x_0+3z_0=0 \\ x_0+3y_0=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z_0=-\frac{2}{3}x_0 \\ y_0=-\frac{1}{3}x_0 \end{cases}$$

Подст. в ур-е пов-ти

$$x_0\left(-\frac{2}{3}x_0\right)+2x_0\left(-\frac{1}{3}x_0\right)+\cancel{3}\left(-\frac{1}{\cancel{3}}x_0\right)\left(-\frac{2}{3}x_0\right)+4=0 \quad \Big|\cdot(-3)$$

$$2x_0^2+\cancel{2x_0^2}-\cancel{2x_0^2}+4=0$$

$$2x_0^2+4=0$$

$x_0^2=-2$ нет решений $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет таких точек.

3) Касат. пл. $\parallel Oxz \Leftrightarrow \vec{n}$ проп. $\vec{j}=(0,1,0)$

$$\begin{cases} z_0+2y_0=0 \\ x_0+3y_0=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z_0=-2y_0 \\ x_0=-3y_0 \end{cases}$$

Подст. в ур-е пов-ти:

$$\cancel{(-3y_0)(-2y_0)}+\cancel{2(-3y_0)y_0}+3y_0(-2y_0)+4=0$$

$$-6y_0^2+4=0$$

$y_0^2 = \frac{2}{3}$

$y_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow x_0 = \mp\sqrt{6},$

$z_0 = \mp\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$B_1\left(-\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ и $B_2 = \left(\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

Ответ: кас. пл. $\parallel Oxy$ в т-х A_1 и A_2,

$\parallel Oxz$ в т-х B_1 и B_2,

ни в одной точке не $\parallel Oyz$,

где $A_1\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$,

$A_2\left(\sqrt{5}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$,

$B_1\left(-\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,

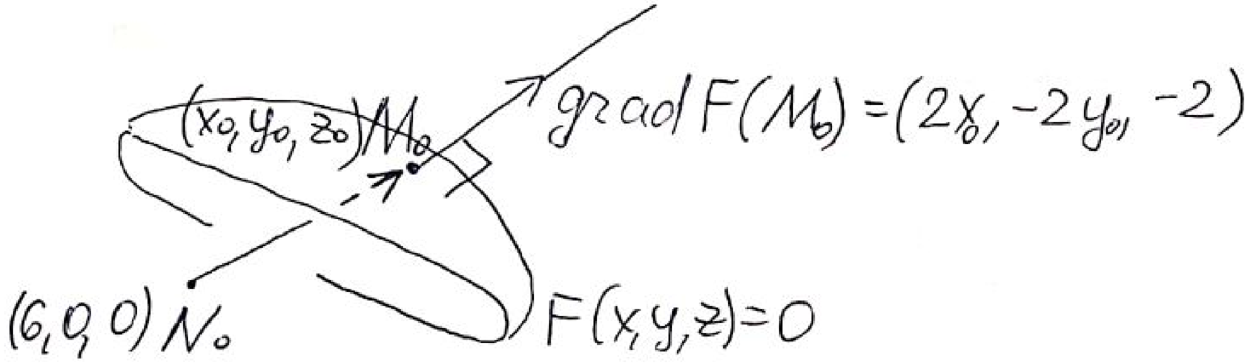
$B_2\left(\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

№3

Найти те нормали к пов-ти $x^2-y^2=2z$, которые проходят через точку $(6,0,0)$.

Решение.

Точка $N_0(6,0,0) \notin$ пов-ти, т.к. $6^2-0^2 \neq 2\cdot 0$.



$$\overrightarrow{N_0M_0}=(x_0-6,\ y_0,\ z_0)$$

Найдём все точки M_0 на пов-ти: grad M_0 пропорц. $\overrightarrow{N_0M_0}$:

$$\frac{2x_0}{x_0-6}=\frac{-2\cancel{y_0}}{\cancel{y_0}}=\frac{-2}{z_0}$$

$$\frac{x_0}{x_0-6}=-1=-\frac{1}{z_0}$$

$$\begin{cases} x_0=3 \\ y_0-\text{любое} \\ z_0=1 \end{cases} \Rightarrow M_0(3,y_0,1),\ y_0\in\mathbb{R}$$

Найдём y_0 из усл, что $M_0 \in$ пов-ти: $\boxed{7}$

$$3^2 - y_0^2 = 2 \cdot 1$$

$$9 - 2 = y_0^2$$

$$y_0 = \pm\sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad M_{01}(3, \sqrt{7}, 1)$$

$$M_{02}(3, -\sqrt{7}, 1)$$

Тогда $\operatorname{grad} F(M_{0i}) = (6, \mp 2\sqrt{7}, -2)$;

пропорционален

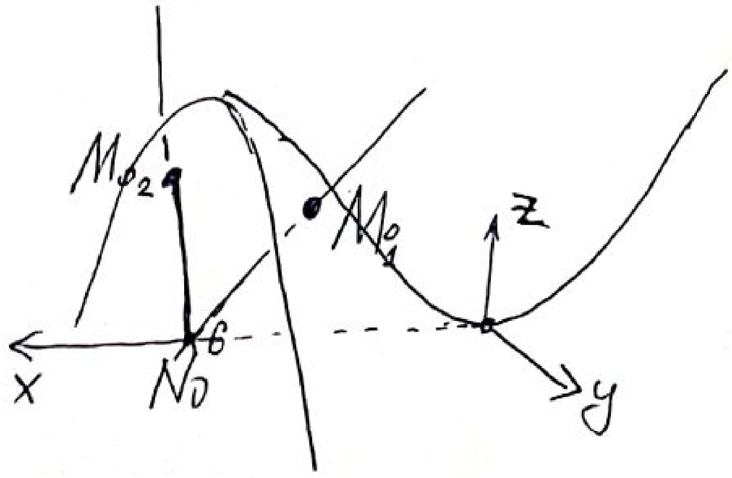
$(3, \mp\sqrt{7}, -1)$

Ур-е нормалей:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y \mp \sqrt{7}}{\mp\sqrt{7}} = \frac{z-1}{-1}$$

Ответ: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-\sqrt{7}}{-\sqrt{7}} = \frac{z-1}{-1}$

$\frac{x-3}{3} = \frac{y+\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{z-1}{-1}$



Задачи на усл. экстремум и наиб. и наим. значения.

№1.

На поверхности $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$ найти точку, наиболее удалённую от точки $M_0(0,0,3)$.

Решение. Пов-ть явл. эллипсоидом.

Пусть $M(x,y,z)$ – искомая точка.

Расстояние $\rho(M_0,M)=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}$ достигает наибольшего значения $\Leftrightarrow$ квадрат этого расстояния $\rho^2(M_0,M)=$ $=x^2+y^2+(z-3)^2$ достигает наибольшего значения.

Исследуем ф-ю $f(x,y,z)=x^2+y^2+(z-3)^2$ на наибольшее значение при условии, что $x^2+2y^2+4z^2-8=0$ (мы преобразовали ур-е пов-ти). Это усл. озн, что $M\in$ пов-ти.

① Составим ф-ю Лагранжа и найдём её стационарные точки:

$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+(z-3)^2+\lambda(x^2+2y^2+4z^2-8)$

$L'_x=2x+2\lambda x$

$L'_y=2y+4\lambda y$

$L'_z=2(z-3)+8\lambda z$

$L'_\lambda=x^2+2y^2+4z^2-8$

Решим систему ур-ий: $\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ L'_z=0 \\ L'_\lambda=0 \end{cases}$

Получим решения: (попробуйте её решить!)

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\pm\sqrt{2} \\ \lambda=-\frac{1}{4}\pm\frac{3\sqrt{2}}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=0 \\ z=-1 \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

Получим 4 точки, „подозрительные" на точки условного экстремума:

$A_{1,2}=(0,0,\pm\sqrt{2})$, $B_{1,2}(\pm 2,0,-1)$.

② Не выясняя хар-р точек, найдём в них значения ф-ции (эллипсоид – компактное мн-во, f^2 – непр. ф-я ⇒ ⇒ достигает своих наиб. и наим. значений)

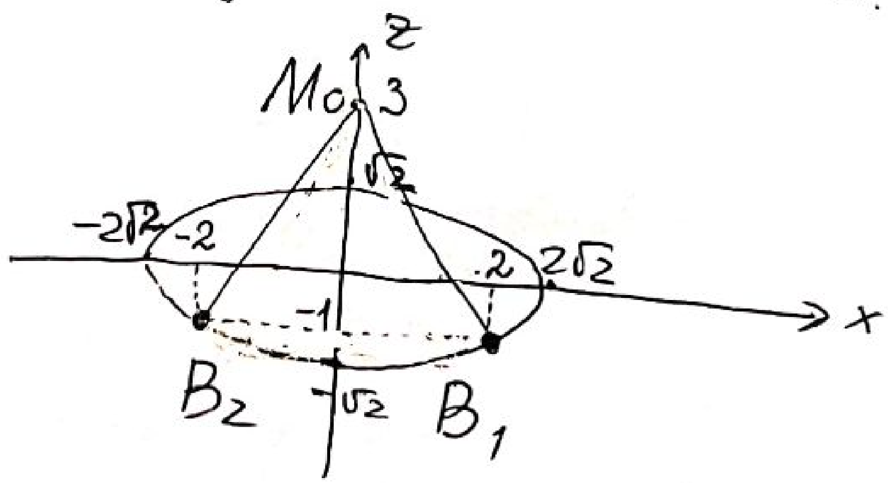
$f(A_{1,2})=0^2+0^2+(\pm\sqrt{2}-3)^2=11\pm6\sqrt{2}$

$f(B_{1,2})=(\pm2)^2+0^2+(-1-3)^2=20$

След., $f_{\text{наибольшее}}(\pm2,0,-1)=20$

Ответ: $(\pm2,0,-1)$

Рис. сечение эллипсоида плоскостью Oxz.



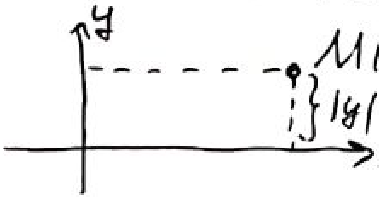
№2.

На кривой $9x^2+4y^2-36x-24y+36=0$ найти точку, наиболее удалённую от оси Ox.

Решение.

Зам. Задачу легко решить геометрически, нарисовав кривую. Не будем это делать и решим в общем виде.

Пусть $M(x,y)$ — искомая точка.
Расстояние от т. M до оси Ox равно $|y|$.



Модуль, т.к. возм., $y<0$.

Исследуем ф-ю $f(x,y)=|y|$ на наибольшее значение при условии, что

$$9x^2+4y^2-36x-24y+36=0.$$

① Составим ф-ю Лагранжа и найдём её стационарные точки:

$$L(x,y,\lambda)=|y|+\lambda(9x^2+4y^2-36x-24y+36)$$

$$L'_x=18\lambda x-36\lambda=18\lambda(x-2)$$

$$L'_y=\pm1+8\lambda y-24\lambda=\pm1+8\lambda(y-3)$$

$$L'_\lambda=9x^2+4y^2-36x-24y+36$$

Решим сист. ур-ий $\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ L'_\lambda=0 \end{cases}$

Получим решение

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ \lambda = \dfrac{1}{24} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ \lambda = -\dfrac{1}{24} \end{cases}$$

Получим 2 точки „подозрит." на точки условного экстремума

$A(2,0)$ и $B(2,6)$.

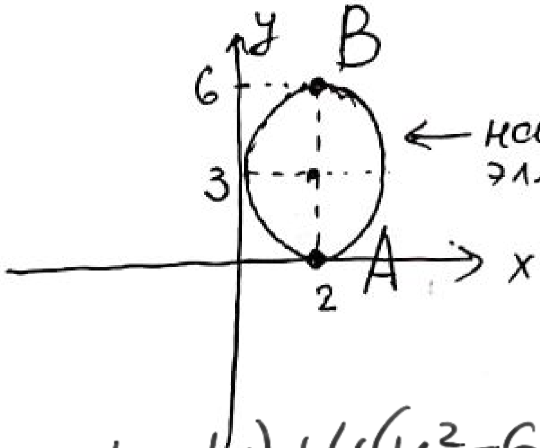
(2) Найдём значения ф-ции в этих т-х и сравним их. (кривая явл. эллипсом (см. Замечание) ф-я $f(x,y)=|y|$ непрерывна $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ достигает своих наиб. и наим. значений)

$f(A)=|0|=0$, $f(B)=|6|=6$.

След, $f_{наиб}(2,6)=6$.

Ответ: $(2,6)$.

Зам.



← наша кривая явл эллипсом

см.

$$9(x^2-4x+4-4)+4(y^2-6y+9-9)+36=0$$
$$9(x-2)^2-36+4(y-3)^2-\cancel{36}+\cancel{36}=0$$
$$9(x-2)^2+4(y-3)^2=36 \quad |:36$$
$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

№3.

Среди касательных плоскостей к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$$

найти ту, которая отсекает от октанта $x<0, y<0, z<0$ тетраэдр наименьшего объёма.

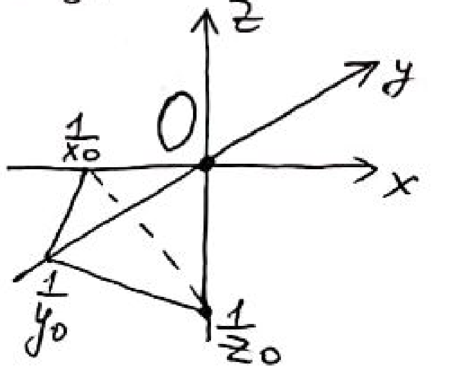
Решение.

1) Ур-е касат. плоскости к эллипсоиду

$$\frac{xx_0}{1^2}+\frac{yy_0}{2^2}+\frac{zz_0}{3^2}=1$$ (выведите сами)

Запишем это ур-е как ур-е плоскости „в отрезках":

$$\frac{x}{\frac{1}{x_0}}+\frac{y}{\frac{4}{y_0}}+\frac{z}{\frac{9}{z_0}}=1$$



„Измерения" тетраэдра:

$a=-\frac{1}{x_0}$, $b=-\frac{4}{y_0}$, $c=-\frac{9}{z_0}$.

Объём тетраэдра $V_{тетр}=\frac{1}{6}abc=-\frac{36}{x_0y_0z_0}$.

Исследуем ф-ю

$$f(x,y,z)=-\frac{36}{xyz}$$ на наименьшее

значение при условии связи

$36x^2+9y^2+4z^2-36=0$ (мы преобразовали ур-е эллипсоида)

2) Составим ф-ю Лагранжа и найдём её стационарные точки:

$$L(x,y,z) = -\frac{36}{xyz} + \lambda \underbrace{(36x^2+9y^2+4z^2-36)}_{\varphi(x,y,z)}$$

$$L'_x = \frac{36}{x^2yz} + 72\lambda x$$

$$L'_y = \frac{36}{xy^2z} + 18\lambda y$$

$$L'_z = \frac{36}{xyz^2} + 8\lambda z$$

$$L'_\lambda = 36x^2+9y^2+4z^2-36$$

Решим сист. ур-ий:

$$\begin{cases} L'_x = 0 & (1) \\ L'_y = 0 & (2) \\ L'_z = 0 & (3) \\ L'_\lambda = 0 & (4) \end{cases}$$

Получим из (1), (2), (3):

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2x^3yz} \\ \lambda = -\dfrac{2}{xy^3z} \\ \lambda = -\dfrac{9}{2xyz^3} \end{cases}$$

Приравняем λ и умн. на xyz:

$$\frac{1}{2x^2} = \frac{2}{y^2} = \frac{9}{2z^2}$$

Выразим, напр., x^2:

$$y^2 = 4x^2, \quad z^2 = 9x^2$$

Подставим в (4):

$$36\cdot x^2 + 9\cdot 4x^2 + 4\cdot 9x^2 - 36 = 0 \quad |:36$$

$$3x^2 - 1 = 0 \quad \left(\Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}},\ z = \pm\sqrt{3}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$y^2 = \frac{4}{3}, \quad z^2 = 3$$

Мы рас. октант $x<0, y<0, z<0$ по усл. След, получим точку

$$M_0(x_0,y_0,z_0) = M_0\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right).$$

Для найденной точки $\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

3) Т.к. найдена единств. точка, то надо проверить, явл. ли она точкой лок. min.

$\varphi'_x = 72x, \ \varphi'_y = 18y, \ \varphi'_z = 8z$

$\varphi'_x(M_0) = -\frac{72}{\sqrt{3}}, \ \varphi'_y(M_0) = -\frac{36}{\sqrt{3}}, \ \varphi'_z(M_0) = -8\sqrt{3}$

$L''_{xx} = -\frac{2\cdot 36}{x^3yz} + 2\cdot 36 x\cdot\lambda \Rightarrow L''_{xx}(M_0) =$

$L''_{yy} = -\frac{2\cdot 36}{xy^3z} + 2\cdot 9\, y\cdot\lambda \Rightarrow L''_{yy}(M_0) =$

$L''_{zz} = -\frac{2\cdot 36}{xyz^3} + 2\cdot 8\, z\cdot\lambda \Rightarrow L''_{zz}(M_0) =$

$L''_{xy} = \ldots \Rightarrow L''_{xy}(M_0) =$

$L''_{xz} = \ldots \Rightarrow L''_{xz}(M_0) =$

$L''_{yz} = \ldots \Rightarrow L''_{yz}(M_0) =$

надо подсчитать

Найдём

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) & \varphi'_z(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & L_{xx}(M_0) & L_{xy}(M_0) & L_{xz}(M_0) \\ \varphi'_y(M_0) & L_{xy}(M_0) & L_{yy}(M_0) & L_{yz}(M_0) \\ \varphi'_z(M_0) & L_{xz}(M_0) & L_{yz}(M_0) & L_{zz}(M_0) \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \text{т. min}$$

След, искомая касат. плоскость

$$\frac{x\cdot x_0}{1}+\frac{y y_0}{4}+\frac{z z_0}{9}=1$$

$$\parallel$$

$$x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{y\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{4}+\frac{z\left(-\sqrt{3}\right)}{9}=1 \qquad |\cdot\left(-\sqrt{3}\right)$$

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=-\sqrt{3} \qquad |\cdot 6$$

$$6x+3y+2x-6\sqrt{3}=0$$

Ответ: ↑

Ребята, если действие 2 написать без вычислений в общем виде (т.к. мало времени), то задача будет зачтена, но не на полный балл.

№4.

Среди эллипсоидов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, проходящих через точку $M_0(3,2,1)$, найти тот, который имеет наименьший объём.

Решение. Объём V эллипсоида с полуосями $a,b,c = \frac{4}{3}\pi abc$.

Исслед. на наименьшее значение
← от коэф-та наим. знач. не завис.
ф-ю $f(a,b,c)= abc$ при условии связи $\frac{3^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}+\frac{1^2}{c^2}=1$

① Составим ф-ю Лагранжа и найдём её стационарные точки.

$L(a,b,c,\lambda)=abc+\lambda\left(\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1\right)$.

$L'_a=bc-\frac{18\lambda}{a^3}$

$L'_b=ac-\frac{8\lambda}{b^3}$

$L'_c=ab-\frac{2\lambda}{c^3}$

$L'_\lambda=\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1$

Решим сис. ур-ий:
$$\begin{cases} L'_a=0 & (1)\\ L'_b=0 & (2)\\ L'_c=0 & (3)\\ L'_\lambda=0 & (4)\end{cases}$$

Из (1),(2),(3) =>

$2\lambda=\frac{a^3bc}{9}=\frac{ab^3c}{4}=abc^3 \quad /:abc$

$$\frac{a^2}{9}=\frac{b^2}{4}=c^2 \Rightarrow b^2=\frac{4}{9}a^2,\quad c^2=\frac{a^2}{9}$$

Подставим в (4):

$$\frac{9}{a^2}+\frac{4}{\frac{4}{9}a^2}+\frac{1}{\frac{a^2}{9}}=1$$

$$\frac{9}{a^2}+\frac{9}{a^2}+\frac{9}{a^2}=1$$

$$a^2=27 \Rightarrow a=3\sqrt{3}$$

$$b^2=\frac{4}{9}\cdot 27=12 \Rightarrow b=2\sqrt{3}$$

$$c^2=\frac{27}{9}=3 \Rightarrow c=\sqrt{3}$$

$$\lambda=\frac{abc^3}{2}=\frac{3\sqrt{3}\cdot\cancel{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}^3}{\cancel{2}}=27\sqrt{3}$$

Мы получили точку $M_0(a,b,c)=(3\sqrt{3},2\sqrt{3},\sqrt{3})$ при $\lambda=27\sqrt{3}$.

② Пров., явл. ли точка M_0 точкой усл. min.

Найдем

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_a & \varphi'_b & \varphi'_c \\ \varphi'_a & L''_{aa} & L''_{ab} & L''_{ac} \\ \varphi'_b & L''_{ab} & L''_{bb} & L''_{bc} \\ \varphi'_c & L''_{ac} & L''_{bc} & L''_{cc} \end{vmatrix}\Bigg|_{M_0(3\sqrt{3},2\sqrt{3},\sqrt{3})}.$$

$$\varphi'_a = -\frac{2\cdot 9}{a^3} \Rightarrow \varphi'_a(M_0) = -\frac{2\sqrt{3}}{3^3}$$

$$\varphi'_b = -\frac{2\cdot 4}{b^3} \Rightarrow \varphi'_b(M_0) = -\frac{\sqrt{3}}{3^2}$$

$$\varphi'_c = -\frac{2}{c^3} \Rightarrow \varphi'_c(M_0) = -\frac{2\sqrt{3}}{3^2}$$

Подст. $\lambda = 27\sqrt{3}$ в L'_a, L'_b, L'_c:

$$L'_a = bc - \frac{18\cdot 27\sqrt{3}}{a^3} \Rightarrow L''_{aa} = \frac{3\cdot 18\cdot 27\sqrt{3}}{a^4} \Rightarrow L''_{aa}(M_0) = 2\sqrt{3}$$

$$L'_b = ac - \frac{8\cdot 27\sqrt{3}}{b^3} \Rightarrow L''_{bb} = \frac{3\cdot 8\cdot 27\sqrt{3}}{b^4} \Rightarrow L''_{bb}(M_0) = \frac{3^2\sqrt{3}}{2}$$

$$L'_c = ab - \frac{2\cdot 27\sqrt{3}}{c^3} \Rightarrow L''_{cc} = \frac{3\cdot 2\cdot 27\sqrt{3}}{c^4} \Rightarrow L''_{cc}(M_0) = 2\cdot 3^5\sqrt{3}$$

$$L''_{ab} = \sqrt{3}, \quad L''_{ac} = 2\sqrt{3}, \quad L''_{bc} = 3\sqrt{3}.$$

След.,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3^3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3^2} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3^3} & \sqrt{3} & \frac{3^2\sqrt{3}}{2} & 3\sqrt{3} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3^2} & 2\sqrt{3} & 3\sqrt{3} & 2\cdot 3^2\sqrt{3} \end{vmatrix} = 3^8\cdot 4^2\cdot 1367 > 0$$

нашли, исп. св-ва определителя

$\Downarrow$

M_0 — точка min

След, искомый эллипсоид

$$\frac{x^2}{(3\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{3})^2} = 1.$$

Ответ:

№5.

Среди эллипсоидов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, касающихся плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ найти тот, который имеет наибольший объём.

Решение. $V_{\text{эллипсоида}}=\frac{4}{3}\pi abc$.

Напишем в общем виде ур-е касат. плоскости к эллипсоиду:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1}_{F(x,y,z)}=0.$$

$$\operatorname{grad} F=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$$

Пусть (x_0,y_0,z_0) – точка касания.

Тогда $\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$

ур-е касат. плоскости.

$$\frac{2x_0}{a^2}x+\frac{2y_0}{b^2}y+\frac{2z_0}{c^2}z=\frac{2x_0^2}{a^2}+\frac{2y_0^2}{b^2}+\frac{2z_0^2}{c^2}$$

Зам. Можно сразу исп. это ур-е без вывода →

$$\boxed{\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1 \quad \text{ур-е касат. пл.}}$$ $|:2$

Сравним с ур-ем касат. пл., получим

$$\frac{a^2}{x_0}=2,\ \frac{b^2}{y_0}=3,\ \frac{c^2}{z_0}=4$$

$a^2=2x_0$, $b^2=3y_0$, $c^2=4z_0$.

Рас. ф-ю объема $f(a,b,c)=\frac{4}{3}\pi abc=\frac{4}{3}\pi\sqrt{2x_0\cdot 3y_0\cdot 4z_0}=$

$=\frac{4}{3}\pi\sqrt{24}\sqrt{x_0y_0z_0}$

Вместо неё рас. $g(a,b,c)=\sqrt{x\cdot y\cdot z}$ и исслед. её на наиб. значение при условии, что $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$

(1) Рас. ф-ю Лагранжа и найдём её стац. точки

$$L(x,y,z,\lambda)=\sqrt{xyz}+\lambda\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}-1\right)$$

$$L'_x=\frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}}+\frac{\lambda}{2}$$

$$L'_y=\frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}}+\frac{\lambda}{3}$$

$$L'_z=\frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}}+\frac{\lambda}{4}$$

$$L'_\lambda=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}-1$$

Решим сис. ур-ий
$$\begin{cases} L'_x=0 & (1)\\ L'_y=0 & (2)\\ L'_z=0 & (3)\\ L'_\lambda=0 & (4)\end{cases}$$

Получим из (1), (2), (3): $\lambda=-\sqrt{\frac{yz}{x}}=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{xz}{y}}=-2\sqrt{\frac{xy}{z}}$

$$\frac{yz}{x}=\frac{9xz}{4y}=\frac{4xy}{z}$$

$4y^2=9x^2$; $9z^2=16y^2$

$z^2=4x^2$

След. $y^2=\frac{9}{4}x^2$

$z^2=4x^2$

Подст. в (4):

$\frac{x}{2} + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{x}{3}}_{y} + \frac{2x}{4_2} = 1$ || Знаки x, y, z выбираем по смыслу задачи (располож. касат. плоск.) (14)

$\frac{3}{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} = 1$

$z = 2\cdot\frac{3}{2} = 3$

$\lambda = -\sqrt{\frac{1\cdot 3}{\frac{2}{3}}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Получим $M_0\left(\frac{2}{3}, 1, 3\right)$ при $\lambda = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(2) Пров, что M_0 явл. точкой лок. max.

(3) След, $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2}{3}, 1, 3\right)$ — точка касания

$\Rightarrow a^2 = 2x_0 = \frac{4}{3}$, $b^2 = 3y_0 = 3$, $c^2 = 4z_0 = 12$

Ур-е эллипсоида:

$$\frac{x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{12} = 1$$

Ответ: ↑

Д/З: Подготовка к РК2, часть Б.

Внимательно читайте, за что ставятся баллы.

Часть Б засчит. только, если сделана задача (или есть продвижение).

Если сделана только теория (без задачи), то часть Б не засчит.