Семинар 6

Исаева А.А.

Определение квадратичной формы

- Однородный многочлен второй степени от $\underline{\underline{n}}$ переменных с действительными коэффициентами

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j, \quad a_{ij}\in\mathbb{R} \qquad (*)$$

называют **квадратичной формой**.

Квадратичная форма представляет собой способ задания некоторой функции векторного аргумента, определенной в $\underline{\underline{n}}$-мерном линейном пространстве L. Если в этом пространстве выбрать какой-либо базис, то квадратичную форму $f(x)$ $(*)$ можно рассмотреть как функцию, значение которой определено через координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ вектора $\overline{x}$.

- Матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей квадратичной формы**.
Матрица A является симметрической ($a_{ij}=a_{ji},\ i\ne j$)

- Квадратичную форму $f(x)$ $(*)$ можно записать в матричном виде:

$f(x)=x^T A x$,

где $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ – столбец, составленный из переменных.

• Ранг матрицы A квадратичной формы называют **рангом квадратичной формы**. Если матрица A имеет максимальный ранг, равный числу переменных $\underline{\underline{n}}$, то квадратичную форму называют **невырожденной**, а если $Rg\,A < \underline{\underline{n}}$, то ее называют **вырожденной**.

Составление матрицы квадратичной формы

• На главной диагонали будут находиться коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ - это коэффициенты при $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$.

• Коэффициенты при произведениях $x_i x_j$ нужно разделить на 2 и они будут соответствовать элементам $a_{ij} = a_{ji}$ (т.к. матрица A симметрическая)

Пример 1 Дано квадратичная форма $x_1^2 + 4x_1x_3$

а) составить матрицу квадратичной формы A.

б) Является эта квадратичная форма вырожденной?

в) Записать эту кв. форму в матричном виде.

а) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 = 1 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_1x_3$

Матрица A имеет порядок 3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{=1} & a_{12}^{=0} & a_{13}^{=2} \\ a_{21}^{=0} & a_{22}^{=0} & a_{23}^{=0} \\ a_{31}^{=2} & a_{32}^{=0} & a_{33}^{=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

б)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(3)-2(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \overset{(2)\leftrightarrow(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2):4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$RgA = 2 < 3 \Rightarrow$ эта квадратичная форма является вырожденной

$\downarrow$

это $\underline{\underline{n}}$

в) Матричная запись кв. формы: $f(x) = x^T A x$ (см. стр. 1)

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Перемножим, чтобы убедиться, что у нас получится исходная запись $\underline{x_1^2 + 4x_1x_3}$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underset{1\times 3}{(x_1, x_2, x_3)}\underset{3\times 3}{\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right)}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \underset{1\times 3}{(x_1 + 2x_3, 0, 2x_1)}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_3x_1 + 2x_1x_3 =$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_3 = \underline{x_1^2 + 4x_1x_3}$$

Пример 2 Составить матрицу квадратичной формы (то есть матрицу A).

делим на 2

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2x_3}_{\text{это дано}} = 1 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_1x_2 + 1 \cdot x_2x_3$$

|| Смотрим правило на стр. 2 и как выглядит матрица A на стр. 1.

Матрица A имеет порядок 3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{''1} & a_{12}^{''2} & a_{13}^{''0} \\ a_{21}^{''2} & a_{22}^{''0} & a_{23}^{''0,5} \\ a_{31}^{''0} & a_{32}^{''0,5} & a_{33}^{''0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 3 Составить матрицу квадратичной формы.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3$$

Матрица **A** имеет опять порядок 3.

$$A = \begin{pmatrix} \overset{=3}{a_{11}} & \overset{=3}{a_{12}} & \overset{=-2}{a_{13}} \\ \overset{=3}{a_{21}} & \overset{=2}{a_{22}} & \overset{=0}{a_{23}} \\ \overset{=-2}{a_{31}} & \overset{=0}{a_{32}} & \overset{=-1}{a_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример 4 Записать квадратичную форму, если ее матрица имеет вид (обратное задание).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & -5 & -6 \\ 8 & -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{x_1^2}{\overset{=0}{a_{11}}} & \underset{x_1 \cdot x_2}{\overset{=3}{a_{12}}} & \underset{x_1 \cdot x_3}{\overset{=8}{a_{13}}} \\ \underset{x_2 \cdot x_1}{\overset{=3}{a_{21}}} & \underset{x_2^2}{\overset{=-5}{a_{22}}} & \underset{x_2 \cdot x_3}{\overset{=-6}{a_{23}}} \\ \underset{x_3 \cdot x_1}{\overset{=8}{a_{31}}} & \underset{x_3 \cdot x_2}{\overset{=-6}{a_{32}}} & \underset{x_3^2}{\overset{=1}{a_{33}}} \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = -5x_2^2 + x_3^2 + 3x_1 \cdot x_2 + 8x_1 \cdot x_3 + 3x_2 \cdot x_1 - 6x_2 \cdot x_3 + 8x_3 \cdot x_1 -$$

$$- 6x_3 \cdot x_2 = -5x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 16x_1x_3 - 12x_2x_3$$

Пример 5 Записать квадратичную форму, если ее матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{x_1^2}{\overset{=1}{a_{11}}} & \underset{x_1 \cdot x_2}{\overset{=0}{a_{12}}} & \underset{x_1 \cdot x_3}{\overset{=-2}{a_{13}}} \\ \underset{x_2 \cdot x_1}{\overset{=0}{a_{21}}} & \underset{x_2^2}{\overset{=3}{a_{22}}} & \underset{x_2 \cdot x_3}{\overset{=3}{a_{23}}} \\ \underset{x_3 \cdot x_1}{\overset{=-2}{a_{31}}} & \underset{x_3 \cdot x_2}{\overset{=3}{a_{32}}} & \underset{x_3^2}{\overset{=5}{a_{33}}} \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \cdot x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + \underbrace{0 \cdot x_1x_2}_{0} - 2x_1x_3 + \underbrace{0 \cdot x_2x_1}_{0} + 3x_2x_3 -$$

$$- 2x_3x_1 + 3x_3x_2 = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$$

Ⓣ (Критерий Сильвестра)

Для того чтобы квадратичная форма от $\underline{\underline{n}}$ переменных была <u>положительно определена</u>, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0$

Следствие 1

Для того чтобы кв. форма $\underline{\underline{n}}$ переменных была <u>отрицательно определена</u>, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $-\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, -\Delta_3 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$ (знаки угловых миноров чередуются начиная с минуса)

Следствие 2 Невырожденная квадратичная форма <u>знакопеременна</u> $\Longleftrightarrow$ когда для матрицы кв. формы выполнено хотя бы одно из условий:

- один из угловых миноров равен нулю;
- один из угловых миноров четного порядка отрицателен;
- два угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки.

Задачи из (LA_ZADACHNIK.pdf)

Определить, какие кв. формы являются положительно либо отрицательно определенными, а какие нет.

№ 4.218, 4.220, 4.222, 4.224

СТРАНИЦА 190

Критерий Сильвестора

Квадратичную форму $f(x)=x^T A x$, $x=(x_1,\dots,x_n)^T$, будем называть:

- положительно (отрицательно) определенной, если для любого ненулевого столбца x выполняется неравенство $f(x)>0$ $(f(x)<0)$;
- неотрицательно (неположительно) определенной, если $f(x)\geq 0$ $(f(x)\leq 0)$ для любого столбца x, причем существует ненулевой столбец x, для которого $f(x)=0$;
- знакопеременной (неопределенной), если существуют такие столбцы x и y, что $f(x)>0$ и $f(y)<0$

• Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

матрица квадратичной формы.

Определители

$$\Delta_1=|a_{11}|=a_{11}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называют угловыми минорами матрицы A.

№ 4.218

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = a_{11} = 1 > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{vmatrix} = 26 - 25 = 1 > 0$$

$\Rightarrow$ квадратичная форма положительно определена

№ 4.220

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = a_{11} = 1 > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -15 \end{vmatrix} = -15 - 4 = -19 < 0$$

стр. 6
один из угловых миноров четного порядка отрицателен

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -15 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -15 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -9 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot (6 - 15) = -9 - 6 + 9 = -6 < 0$$

$\Rightarrow$ кв. форма знакопеременная

№4.222

$$f(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 6 & 6 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 9 > 0$

$\Delta_2 = 18 > 0$

$\Delta_3 = 9 > 0$

$\Rightarrow$ кв. форма положительно определена

№4.224

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} \overset{=1}{a_{11}} & \overset{=0}{a_{12}} & \overset{=0}{a_{13}} & \overset{=0}{a_{14}} \\ \overset{=0}{a_{21}} & \overset{=4}{a_{22}} & \overset{=0}{a_{23}} & \overset{=4}{a_{24}} \\ \overset{=0}{a_{31}} & \overset{=0}{a_{32}} & \overset{=4}{a_{33}} & \overset{=0}{a_{34}} \\ \overset{=0}{a_{41}} & \overset{=4}{a_{42}} & \overset{=0}{a_{43}} & \overset{=8}{a_{44}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1 > 0$

$\Delta_2 = 4 > 0$

$\Delta_3 = 16 > 0$

$\Delta_4 = 64 > 0$

$\Rightarrow$ кв. форма положительно определена.

6.2. Преобразование квадратичных форм

Пусть дана *квадратичная форма* $x^{\mathrm{T}}Ax$, где $x = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^{\mathrm{T}}$. В *n-мерном линейном пространстве* $\mathcal{L}$ с фиксированным *базисом* $\boldsymbol{b}$ она определяет функцию $f(\boldsymbol{x}) = x_b^{\mathrm{T}}Ax_b$, заданную через *координаты* x_b *вектора* $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{b}$. Найдем представление этой же функции в некотором другом базисе $\boldsymbol{e}$. Пусть U — *матрица перехода* от $\boldsymbol{b}$ к $\boldsymbol{e}$. Тогда координаты x_b вектора $\boldsymbol{x}$ в старом базисе $\boldsymbol{b}$ и координаты x_e того же вектора в новом базисе $\boldsymbol{e}$ будут связаны соотношением

$$x_b = Ux_e. \tag{6.3}$$

Функция $f(\boldsymbol{x})$ в новом базисе будет выражаться через новые координаты вектора $\boldsymbol{x}$ следующим образом:

$$x_b^{\mathrm{T}}Ax_b = (Ux_e)^{\mathrm{T}}A(Ux_e) = x_e^{\mathrm{T}}(U^{\mathrm{T}}AU)x_e = x_e^{\mathrm{T}}A'x_e.$$

Итак, функция f в новом базисе также записывается при помощи квадратичной формы, причем матрица A' этой квадратичной формы связана с матрицей A исходной квадратичной формы соотношением

$$A' = U^{\mathrm{T}}AU. \tag{6.4}$$

Преобразование матрицы квадратичной формы вызывается заменой переменных (переходом от переменных x_b к переменным x_e) в соответствии с формулой (6.3).

Замечание 6.1. Замену переменных вида (6.3) с произвольной матрицей U называют ***линейной***. Изменение базиса в линейном пространстве приводит к линейной замене переменных с невырожденной матрицей.

Пример 6.2. Квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

преобразуем к новым переменным y_1, y_2, y_3, где

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \ \ y_2 + \ \ y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_1 + \ \ y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Эта замена переменных в матричной записи имеет вид $x = Uy$, где

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно (6.4) имеем

$$A' = U^{\mathrm{T}}AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и квадратичная форма принимает вид

$$f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2,$$

т.е. все коэффициенты при попарных произведениях переменных обнуляются и остаются слагаемые с квадратами переменных.