

Программа для подготовки к рубежному контролю № 1  
по линейной алгебре

ИУ (кроме ИУ-9), РЛ, БМТ; 2019–2020 уч. год

*Теоретические вопросы*

(как они сформулированы в билетах рубежного контроля)

**Часть А**

1. Дать определение линейного (векторного) пространства.
2. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.
3. Дать определение базиса и размерности линейного пространства.
4. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому.
5. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.
6. Дать определение подпространства линейного пространства и линейной оболочки системы векторов.
7. Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.
8. Записать неравенства Коши-Буняковского и треугольника.
9. Дать определение ортогональной системы векторов и ортонормированного базиса евклидова пространства.
10. Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов.
11. Дать определение линейного оператора и матрицы линейного оператора.
12. Записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
13. Дать определение характеристического уравнения, собственного числа и собственного вектора линейного оператора.
14. Сформулировать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям.
15. Дать определение самосопряжённого линейного оператора на евклидовом пространстве и сформулировать теорему о виде матрицы самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе.
16. Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряжённого оператора.

17. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряжённого оператора, отвечающих различным собственным значениям.
18. Сформулировать теорему о существовании для самосопряжённого оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид.
19. Дать определение ортогонального линейного оператора и ортогональной матрицы.
20. Дать определение квадратичной формы, матрицы и канонического вида квадратичной формы.
21. Записать формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.
22. Дать определение положительно определённой, отрицательно определённой и неопределённой квадратичной формы.
23. Сформулировать критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы и следствия для отрицательно определённых и неопределённых форм.
24. Сформулировать закон инерции квадратичных форм.

**Часть Б**

1. Вывести формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.
2. Доказать неравенства Коши-Буняковского и треугольника.
3. Вывести формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
4. Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.
5. Доказать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям.
6. Вывести формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

*Примеры задач*

**Часть А**

1. Найти какой-нибудь базис и размерность линейной оболочки системы векторов  $\mathbf{a}_1 = (7, -6, 3)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1, -9, 3)^T$ ,  $\mathbf{a}_3 = (2, 1, 2)^T$ ,  $\mathbf{a}_4 = (1, 10, 5)^T$  пространства  $\mathbb{R}^3$ .

2. Найти ортогональный базис линейной оболочки системы векторов  $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 0, 1)^T$ ,  $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 0)^T$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^4$  (скалярное произведение стандартное).

3. В базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  пространства  $\mathbb{R}^2$  квадратичная форма  $Q$  записывается как  $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2$ . Найти выражение  $Q(y_1, y_2)$  этой квадратичной формы в базисе  $\mathbf{e}'_1 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}'_2 = 5\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2$ .

4. Базис  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$  получается из правого ортонормированного базиса  $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  пространства  $V_3$  поворотом на  $90^\circ$  против часовой стрелки вокруг вектора  $\mathbf{k}$ . Базис  $\mathcal{B}'' = \{\mathbf{i}'', \mathbf{j}'', \mathbf{k}''\}$  получается из базиса  $\mathcal{B}'$  поворотом на  $90^\circ$  против часовой стрелки вокруг вектора  $\mathbf{j}'$ . Найти матрицу перехода от базиса  $\mathcal{B}$  к базису  $\mathcal{B}''$ .

5. Линейный оператор  $A$ , действующий на некотором двумерном пространстве, в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ .

6. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , заданного матрицей  $\begin{pmatrix} 12 & -22 \\ 11 & -21 \end{pmatrix}$ .

7. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму  $9x^2 + 24xy + 16y^2$  к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

8. Привести квадратичную форму  $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 9x_2x_3$  к сумме квадратов методом Лагранжа. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

## Часть Б

1. В линейном пространстве многочленов степени не выше 3 найти матрицу перехода от базиса  $\mathcal{B} = \{1, t - 1, (t - 1)^2, (t - 1)^3\}$  к базису  $\mathcal{B}' = \{1, t + 1, (t + 1)^2, (t + 1)^3\}$ .

2. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму  $3x^2 - 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz$  к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат.

## Примерный вариант билета рубежного контроля

### Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;  
оценка 21 балл

### Теория

1. Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.

2. Сформулировать теорему о существовании для самосопряжённого оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид.

### Задачи

3. Вектор  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$  имеет координаты  $(1, -2)^T$  в базисе  $\mathbf{a}_1 = (3, 1)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1, 1)^T$ . Найти его координаты в базисе  $\mathbf{b}_1 = (3, 2)^T$ ,  $\mathbf{b}_2 = (5, 4)^T$ .

4. В базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  пространства  $\mathbb{R}^2$  квадратичная форма  $Q$  записывается как  $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ . Найти выражение  $Q(y_1, y_2)$  этой квадратичной формы в базисе  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ .

5. Найти матрицу линейного оператора  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  в стандартном базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , если  $A$  переводит векторы  $\mathbf{a}_1 = (8, -5)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (-3, 2)^T$  в векторы  $\mathbf{b}_1 = (-5, 4)^T$ ,  $\mathbf{b}_2 = (7, -3)^T$  соответственно.

6. С помощью критерия Сильвестра определить, является ли квадратичная форма  $-2x_1^2 + 2x_1x_4 - 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2 - 2x_4^2$  положительно определённой, отрицательно определённой, неопределённой.

### Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;  
необходимо решить задачу; оценка 5–14 баллов

### Теория

7. Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.

### Задача

8. Привести кривую  $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y = 0$  к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат. Построить кривую в исходной системе координат.