Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»

Факультет «Машиностроительные технологии»

Кафедра «Литейные технологии»

Карпенко Д. Н.

Методические указания к лабораторной работе № 4

по курсу «Основы научных исследований»

Моделирование случайных процессов методом Монте-Карло

Москва – 2016

Оглавление

Вводный раздел

Цель работы – освоение теоретико-вероятностного подхода к моделированию процессов литейного производства с использованием метода Монте-Карло, закрепление навыков автоматизации вычислений с помощью ЭВМ.

Содержание работы:

1. Ознакомиться с теоретической частью работы по настоящему указанию.
2. На основании исходных данных определить значения функции отклика или параметры работы системы (в зависимости от варианта задания) без учета случайного разброса по факторам.
3. Провести вычислительный эксперимент с использованием метода Монте-Карло с учетом случайных значений факторов. Оценить статистические характеристики функции отклика, при необходимости построить гистограмму.
4. Сравнить полученные результаты с результатом расчета по детерминистической модели. Оценить показатели качества изучаемого процесса и потери от нестабильности факторов (процент брака, коэффициент потерь и т. п.).
5. Сделать выводы.
6. Оформить отчет по работе.

1 Теоретические основы

1.1 Моделирование в условиях неопределенности

Математическое моделирование – разновидность научного моделирования, при которой исследуемый объект или процесс описывается на языке математики и исследуется теми или иными математическими методами. Таким образом, математическое моделирование, как правило, является частью теоретического исследования. В общем случае математическую модель можно представить как некий оператор $\mathbb{F}$, который осуществляет однозначное отображение множества входных величин $\Omega_X = \{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$ на множество выходных $\Omega_Y = \{y_1, y_2,\ldots, y_m\}$:

$$\mathbb{F}:\ \Omega_X \to \Omega_Y. \tag{1}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать математические модели, имеющие только один выходной параметр y, который однозначно определяется из соотношения:

$$y = F\left(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n\right), \tag{2}$$

где F также следует понимать как оператор, в качестве которого может выступать как функция (функциональный оператор), так и алгоритм, включающий в себя, например, логические условия (алгоритмический оператор).

В реальных прикладных исследованиях в качестве y довольно часто выступает некая величина, характеризующая качество изделия или процесса: прочность сплава, твердость по ладу формы, производительность технологического комплекса и т. п. В этом случае параметр y может служить критерием для оценки пригодности того или иного технологического решения.

Главной особенностью операторов (1) и (2) является то, что они детерминистичны, то есть при одних и тех же значениях входных величин мы всегда будем получать одни и те же значения выходных величин. Однако в реальном производстве параметры технологического процесса подвержены случайным возмущениям, которые приводят к отклонению результирующих показателей от ожидаемых значений. Такая неопределенность в параметрах модели называется стохастической. Подобные отклонения могу приводить к системному увеличению брака или снижению качественных характеристик процесса, таких как производительность системы.

Если параметр y является показателем качества, было бы желательно на основании модели (2) уметь предсказывать величину подобных отклонений. Разумеется, при этом нужно учитывать, что факторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в общем случае являются стохастическими случайными величинами, каждая из которых подчинена своему закону распределения: $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$ и т. д. Эти законы распределения должны быть установлены для каждого из факторов заранее на основании экспериментальной оценки.

Существуют математические методы, которые позволяют с помощью модели (2) при известных распределениях факторов $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$ и т. д. установить точный вид распределения, которому подвержена выходная величина y: $P(y)$. Однако эти методы являются весьма сложными и, как правило, применимы только при достаточно простом виде оператора (2). Поэтому в прикладных исследованиях для моделирования случайных процессов чаще всего используют методы приблизительной оценки распределения $P(y)$. Одним из самых широко распространенных методов такого рода является метод Монте-Карло.

1.2 Метод Монте-Карло

Получить приблизительное представление о распределении выходной величины y можно с помощью вычислительного эксперимента. В ходе этого эксперимента должно быть получено большое количество реализаций стохастического процесса, описываемого соотношением (2) и набором распределений $\{P_i(x_i)\}$, $i = 1 \ldots n$, после чего производится обработка результатов с помощью обычных методов математической статистики. В этом и состоит суть метода Монте-Карло.

Таким образом, метод Монте-Карло является численным методом моделирования случайных стохастических процессов и, если исходная математическая модель не является сама по себе эмпирической, лежит на стыке теоретического и экспериментального исследования.

Алгоритм метода Монте-Карло состоит из следующих этапов:

1. Задаются начальные условия: математическая модель вида (2) и распределения для случайных факторов $\{P_i(x_i)\}$, $i = 1 \ldots n$. Эти распределения могут быть как непрерывными (равномерное, нормальное и т. п.), так и задаваться гистограммой, построенной по результатам измерения. При этом некоторые из факторов могут моделироваться как детерминистические – тогда они задаются как постоянная величина.
2. Задаются точностью (величиной ε-окрестности) итогового распределения и доверительной вероятностью $p(\varepsilon)$, на основании которых вычисляют минимальное количество опытов $N_{\min}$.
3. На основании распределений $\{P_i(x_i)\}$ по каждому из факторов формируется случайная выборка объемом $N > N_{\min}$. Таким образом, мы получаем нечто вроде матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & x_{ij} & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nN} \end{pmatrix},$$

   где x_{ij} означает j-ю реализацию i-го фактора: $i = 1 \ldots n$; $j = 1 \ldots N$.
4. Полученные случайные значения факторов подставляются в модель (2) и вычисляется N значений выходной величины y, которую

в данном случае будем называть функцией отклика. Элементы матрицы X подставляются в модель по столбцам:

$$y_j = F\left(x_{1j},\ x_{2j},\ldots,\ x_{nj}\right).$$

5. Полученная выборка $\{y_j\}$, $j = 1\ldots N$, обрабатывается посредством обычных методов математической статистики, например: определяется среднее значение и дисперсия, строится гистограмма распределения, по возможности делается предположение о законе распределения, которому подвержены значения функции отклика y. Полезно также определить максимальное и минимальное значения в выборке. Результаты моделирования заносятся в таблицу вида таблицы 1.
6. На основании статистической обработки делаются выводы о показателях моделируемого процесса.

Таблица 1 – План реализации метода Монте-Карло

Эксперименты	Факторы				Функция отклика
j	x_1	x_2	• • •	x_n	y
1			• • •		
2			• • •		
3			• • •		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N			• • •		
Статистические показатели выборки					
Среднее значение	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	• • •	$\bar{x}_n$	$\bar{y}$
Стандартное отклонение	s_1	s_2	• • •	s_n	s_y
Минимальное значение			• • •		
Максимальное значение			• • •		

При генерации значений случайных факторов в некоторых случаях нужно следить за тем, чтобы они не выходили за определенные границы.

Ограничения могут накладываться физическим смыслом процесса, либо исследуемая модель (например, эмпирическая формула) справедлива только на ограниченных интервалах значений факторов. Например, процентное содержание или давление в гидросистеме не может быть отрицательным, в то время как при случайной генерации этих значений по непрерывному закону распределения может, вообще говоря, получиться любое значение, в том числе и ниже нуля.

При наличии подобных ограничений из исходной выборки по факторам следует исключить значения, которые выходят за пределы установленных интервалов, а вместо них сгенерировать новые, удовлетворяющие заявленным условиям. Другой способ борьбы с подобными выбросами заключается в том, чтобы генерировать последовательность на основании выборки или построенной на ее основе гистограммы, полученных в результате многократного измерения фактора в реальных условиях.

Как и всякий метод численного моделирования, метод Монте-Карло является приблизительным. Точность полученного закона распределения зависит от числа опытов N, следствием чего является необходимость проведения большого числа экспериментов. Обычно число опытов в методе Монте-Карло исчисляется сотнями и даже тысячами. Это делает практически невозможным реализацию данного метода без использования ЭВМ.

Точность результата в методе Монте-Карло можно оценить через вероятность попадания оцениваемой постоянной вероятности P в окрестность полученных в эксперименте значений относительной частоты с некоторой наперед заданной точностью ε. Из интегральной теоремы Муавра – Лапласа можно получить следующую оценку вероятности:

$$p\left(\left|\frac{m}{N}-P\right|\le\varepsilon\right)=2\cdot\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{N}{P(1-P)}}\right), \qquad (3)$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функция Лапласа.

Полезно знать соотношения между функцией Лапласа Ф и другими часто используемыми статистическими функциями:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\operatorname{erf}\frac{x}{\sqrt{2}} = F_{N(0,\,1)}(x) - \frac{1}{2}, \qquad (4)$$

где erf – так называемая функция ошибок;

$F_{N(0,\,1)}$ – интегральная функция стандартного нормального распределения.

В разных источниках каждую из этих трех функций могут называть именем Лапласа, так что важно понимать разницу между ними. Значения этих функций табулированы, также их можно найти в большинстве современных математических программ или с помощью онлайн-калькуляторов.

С учетом соотношений (4) можно записать выражение для вероятности (3) через две другие функции:

$$p(\varepsilon) = \operatorname{erf}\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{N}{2P(1-P)}}\right) = 2F_{N(0,\,1)}\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{N}{P(1-P)}}\right) - 1. \qquad (5)$$

Анализ функции (3) показывает, что она имеет минимум при $P = 0{,}5$ (при прочих постоянных параметрах). Это значит, что для оценки точности достаточно вычислить $p(\varepsilon)$ при этом значении вероятности. При других значениях доверительная вероятность $p(\varepsilon)$ будет заведомо больше. Таким образом, мы приходим к соотношениям для оценки точности полученного в эксперименте распределения:

$$p(\varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(2\varepsilon \cdot \sqrt{N}\right) = \operatorname{erf}\left(\varepsilon \cdot \sqrt{2N}\right) = 2 \cdot F_{N(0,\,1)}\left(2\varepsilon \cdot \sqrt{N}\right) - 1. \qquad (6)$$

Из соотношений (6) можно также получить оценку минимального числа опытов, которые нужно провести, чтобы получить требуемое распределение, лежащее в ε-окрестности с заданной вероятностью $p(\varepsilon)$:

$$N_{\min} = \left(\frac{\Phi^{-1}\left(p(\varepsilon)/2\right)}{2\varepsilon} \right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{erf}^{-1} p(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^2 = \left(\frac{F_{N(0,\,1)}^{-1}\left(\frac{p(\varepsilon)+1}{2} \right)}{2\varepsilon} \right)^2, \qquad (7)$$

где Φ^{-1}, erf^{-1} и $F_{N(0,\,1)}^{-1}$ – обратные функции для функции Лапласа, функции ошибок и интегральной функции стандартного нормального распределения соответственно.

Например, при $p(\varepsilon) = 0{,}95$ и $\varepsilon = 0{,}05$ (то есть с точностью ± 5 %) нужно провести не менее 385 опытов, а если повысить точность в два раза – до 2,5 процентов, число опытов возрастет до 1537.

1.3 Генерация случайных чисел

Главной проблемой метода Монте-Карло является генерация больших массивов случайных чисел по заданным законам распределения. Она усугубляется еще и тем, что, как было сказано выше, реализация метода Монте-Карло возможна только с помощью ЭВМ. Это означает, что генерируемые последовательности случайных чисел должны либо каким-то образом (желательно автоматически) вводиться в память компьютера, либо генерироваться самим компьютером по специальному алгоритму.

Существует два основных способа получения случайных чисел:

- аппаратные генераторы случайных чисел (ГСЧ);
- генераторы псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Действие аппаратных ГСЧ построено на анализе показателей случайных физических процессов: радиоактивный распад, шумы различной природы, квантовые явления и т. п. – либо на использовании характеристик самой вычислительной системы, которые в каждый конкретный момент времени носят случайный характер: показатели производительности системы, время нажатия на клавиши клавиатуры, данные сети и интернета и т. п. Аппаратные ГСЧ дают так называемые истинно случайные числа.

Однако их применение весьма ограничено по ряду причин: некоторые из них необходимо интегрировать с компьютером, их свойства могут быть нестабильными, генерируемые последовательности являются невоспроизводимыми, а генерация больших последовательностей может занимать значительное время. Поэтому для решения задач моделирования случайных процессов в большинстве случаев применяются генераторы псевдослучайных чисел.

Генератор псевдослучайных чисел – это алгоритм, позволяющий получать последовательности чисел, которые по своим свойствам мало отличаются от последовательностей истинно случайных чисел. Интересной особенностью подобного алгоритма является его детерминистичность, то есть любую последовательность всегда можно восстановить по известным исходным данным. Строго говоря, генерируемые последовательности не являются случайными, несмотря на то, что по своим свойствам они практически не отличимы от таковых. Именно по этой причине их и называют псевдослучайными.

Во многих случаях ГПСЧ представляет собой рекуррентное соотношение, формирующее регулярные последовательности псевдослучайных чисел в некотором диапазоне. Наиболее известным и распространенным является линейный конгруэнтный метод, при котором последовательность генерируется в соответствии с соотношением:

$$r_k = \left(a \cdot r_{k-1} + c\right) \operatorname{mod} m,\ r_0 \le m, \tag{8}$$

где a, c, m – определенные константы: $0 \le a < m$, $0 \le c < m$, $m \le 2$;

r_0 – начальное число последовательности;

mod – операция вычисления остатка от деления.

Начальное значение r_0 либо определяется случайно (например, с помощью аппаратного ГСЧ), либо назначается исследователем. Выбор начального значения при прочих равных полностью определяет ход последовательности. Если при каждой генерации задавать одно и то же значение r_0, мы будем получать одни и те же последовательности псевдослучайных чисел. Поэтому волевое задание параметра r_0 может служить для обеспечения воспроизводимости результатов моделирования методом Монте-Карло.

Константы a, c и m подбираются специальным образом, поскольку при неправильном выборе генерируемая последовательность не будет удовлетворять требованиям, которые накладываются на истинно случайные числа.

При правильном выборе параметров формула (8) дает последовательность из m целых псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на интервале от 0 до m. Не сложно заметить, что после генерации m значений, последовательность начнет повторяться. Поэтому величина m должна быть достаточно велика: в некоторых ГПСЧ она может достигать значения 2^{64}.

Из последовательности, генерируемой соотношением (8), легко получить последовательность псевдослучайных чисел, равномерно распределенную на интервале от 0 до 1:

$$R_k(0,\ 1) = {r_k}/{m}. \tag{9}$$

Формирование случайного числа из последовательности (9) является стандартной функцией рандомизации, включенной во все математические программы, языки программирования и даже некоторые карманные калькуляторы.

Последовательность (9) может быть использована для получения последовательности псевдослучайных чисел с любым наперед заданным непрерывным распределением. Поэтому случайные величины, равномерно распределенные на интервале от 0 до 1, еще называют базовыми случайными величинами. Например, из них легко получить последовательность случайных величин, равномерно распределенных на интервале от a до b:

$$R_k(a,\ b) = a + (b-a) R_k(0,\ 1). \tag{10}$$

Для построения псевдослучайной последовательности, подчиненной стандартному нормальному закону распределения обычно используют преобразование Бокса – Мюллера, при котором две базовые случайные величины преобразуются в две нормально распределенные случайные величины. Один из вариантов подобного преобразования выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} N_k(0,\ 1) &= \cos\left(2\pi \cdot R_k(0,\ 1)\right)\sqrt{-2\ln R_{k+1}(0,\ 1)}; \\ N_{k+1}(0,\ 1) &= \sin\left(2\pi \cdot R_k(0,\ 1)\right)\sqrt{-2\ln R_{k+1}(0,\ 1)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Если необходимо получить последовательность, распределенную по нормальному закону $N(\mu,\ \sigma)$ с заданным математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, можно воспользоваться следующей формулой:

$$N_k(\mu,\ \sigma) = \mu + \sigma N_k(0,\ 1). \tag{12}$$

Формулы, аналогичные (11) и (12), существуют и для других непрерывных распределений.

Большинство существующих математических программ позволяют генерировать большие последовательности псевдослучайных величин с заданным законом распределения. В частности, в *Microsoft Office Excel* для этого предназначена функция «Генерация случайных чисел» из пакета «Анализ данных», подключаемого к основной программе в качестве надстройки. Специализированные математические программы (такие как *MATLAB* или *Wolfram Mathematica*) позволяют генерировать последовательности в соответствии с широким набором функций распределения и методов генерации псевдослучайных чисел.

1.4 Обработка результатов вычислительного эксперимента и анализ качества

Результатом вычислительного эксперимента, проведенного с помощью метода Монте-Карло на модели (2) является набор значений функции отклика $\{y_j\}$, $j = 1 \ldots N$, который, по сути, моделирует случайный разброс выходного параметра y. Первичная обработка полученных значений проводится стандартными статистическими методами. Так, можно определить среднее значение функции отклика

$$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j \tag{13}$$

и дисперсию значений функции отклика

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\left(y_j - \overline{y}\right). \tag{14}$$

В данном случае определяется несмещенная дисперсия, поскольку величина выборки ограничена.

Кроме этого, может быть построена гистограмма распределения величины y, по которой можно судить о виде закона распределения. Гистограмма – это столбчатая диаграмма, характеризующая частоту попадания случайной величины в различные интервалы значений.

Для того чтобы построить гистограмму, например, по выборке $\{y_j\}$, $j = 1 \ldots N$, нужно разбить область значений y на равные интервалы и посчитать, какое количество значений из $\{y_j\}$ попадает в каждый из них. Это количество называется абсолютной частотой попадания y в заданный интервал. Абсолютная частота, отнесенная к общему объему выборки, называется относительной частотой. При этом должно быть соблюдено условие нормировки: сумма относительных частот по всем интервалам должна быть равна единице.

Гистограмму распределения по выборке предпочтительно строить в относительных частотах. Границы интервалов следует выбирать с учетом минимального и максимального значений таким образом, чтобы в крайние интервалы попадало как можно меньше значений функции отклика.

После первичной обработки значений функции отклика необходимо оценить показатели, которые будут определять качество исследуемого объекта или процесса. Чаще всего эта оценка ведется по величинам, характеризующим потерю качества либо отклонение параметров объекта от ожидаемых значений, вызванные стохастичностью процесса. В зависимости от моделируемого процесса в качестве таких показателей могут выступать:

- ожидаемый процент брака;
- коэффициент потерь производительности;
- величина отклонения от значений, предсказанных детерминистической моделью.

Степень нестабильности любого фактора (в том числе и функции отклика) может быть оценена с помощью коэффициента стабильности:

$$\psi_y = \frac{s}{y} \cdot 100\% , \tag{15}$$

где $s = \sqrt{s^2}$ – стандартное отклонение значений функции отклика.

Функция отклика y может быть критерием качества, для которого задано некое критическое значение $y_{кр}$, служащее границей, отделяющей качественное изделие от бракованного (при этом само $y_{кр}$ в ряде случаев может быть случайной величиной). В этом случае можно посчитать, какой процент значений функции отклика удовлетворяет критерию качества $y_{кр}$ (например, больше или меньше его), а исходя из этого мы можем определить ожидаемый процент брака.

Например, если в качестве функции отклика выступает прочность на разрыв образцов из серого чугуна, для нее можно установить минимальное значение $\sigma_{B\ кр}$, ниже которого будет фиксироваться брак. Если по результатам моделирования 25 % значений функции отклика оказались ниже установленного критического значения, можно ожидать, что в реальном производстве при реализации тех же случайных отклонений, которые закладывались в модель, будет фиксироваться близкий по величине процент образцов с прочностью ниже необходимой.

В ряде задач (как правило, это задачи, построенные на алгоритмическом операторе) функция отклика y определяет производительность системы. Например, в широком классе моделей выходной величиной является время цикла некоего технологического комплекса, состоящего из нескольких модулей. В таких системах случайные отклонения во времени работы отдельных модулей приводят к увеличению общего времени цикла и снижению производительности по сравнению с идеальной системой без отклонений. В этом случае оценка эффективности системы проводится на основании сравнения с идеальной системой, например с помощью коэффициента производительности:

$$h = \frac{T_ц}{\overline{T}}, \qquad (16)$$

где $T_ц$ – значение времени цикла для идеальной системы;

$\overline{T} = \overline{y}$ – оценка среднего времени цикла моделируемой системы.

Поскольку время цикла идеальной системы заведомо меньше, чем у системы с потерями, коэффициент h всегда меньше единицы. Отсюда можно определить и коэффициент потерь производительности:

$$\Delta Q = (1 - h) \cdot 100\ \%. \qquad (17)$$

В каждом из рассмотренных случаев моделирование методом Монте-Карло позволяет оценить потери, которые может понести производство при случайных отклонениях параметров технологического процесса. Это позволяет точнее предсказывать поведение технологической системы.

Также описанные выше показатели качества могут быть использованы в качестве критериев оптимизации. Многократное моделирование методом Монте-Карло при различных значениях управляющих параметров (в качестве которых могут выступать средние значения факторов x_i или коэффициенты модели) позволяет определить оптимальные значения этих параметров, которые будут отличаться от тех, что могли бы быть предсказаны по детерминистической модели.

2 Примеры выполнения расчетов

2.1 Моделирование параметров технологического процесса

В этом подразделе рассмотрено моделирование, осуществляемое посредством функционального оператора, в качестве которого здесь выступает эмпирическая зависимость.

Моделирование выполнено с использованием программного пакета *Microsoft Office Excel 2003*.

Задание

С помощью метода Монте-Карло определить статистические характеристики и ожидаемый процент брака по прочности на разрыв σ_B при производстве серого чугуна, если установлена эмпирическая зависимость между пределом прочности (МПа) и химическим составом чугуна (%):

$$\sigma_B = 477{,}335 - 82{,}025 \cdot C + 34{,}675 \cdot Si - 4{,}475 \cdot Mn, \qquad (18)$$

где C, Si, Mn – процентное содержание углерода, кремния и марганца соответственно.

Известно, что при производстве чугуна используют следующий химический состав: C = 3,4 %, Si = 1,8 %, Mn = 0,7 %. Экспериментальным путем установлено, что химический состав из-за неточности дозирования и других случайных возмущений подвержен случайным отклонениям, хорошо согласующимся с нормальным распределением. Стандартные отклонения для каждого из компонентов: s_C = 0,5 %; s_{Si} = 0,3 %; s_{Mn} = 0,2 %.

Пригодными считаются образцы, чья прочность на разрыв превышает $\sigma_{B\,кр}$ = 240 МПа.

Количество опытов должно обеспечить попадание полученного распределения в ε-окрестность действительной вероятности при точности ε = ± 5 % с вероятностью p = 0,97.

Решение

Прежде всего, оценим прочность на разрыв по эмпирической формуле (18) при принятом содержании компонентов сплава, без учета возможных отклонений:

$$\sigma_B^0 = 477,335 - 82,025 \cdot 3,4 + 34,675 \cdot 1,8 - 4,475 \cdot 0,7 = 257,733 \text{ (МПа)}.$$

Видно, что данная прочность удовлетворяет заявленным требованиям с запасом и обеспечивает качество сплава по данному показателю.

Моделирование методом Монте-Карло осуществляется в соответствии с алгоритмом, изложенным в подразд. 1.2.

Для моделирования с учетом случайных отклонений по химическому составу необходимо задаться законами распределения, которым будут подвержены факторы. На основании исходных данных можно принять, что содержание каждого из компонентов есть величина случайная, подчиненная нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным нормативному содержанию, используемому в производстве, и среднеквадратическим отклонением, равным стандартному отклонению по каждому из факторов. Характеристики распределений по каждому из факторов приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Характеристики распределений для случайных факторов

Характеристики	Факторы		
	C	Si	Mn
Вид распределения	нормальное		
Математическое ожидание μ	3,4	1,8	0,7
Среднеквадратическое отклонение σ	0,5	0,3	0,2

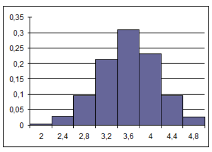
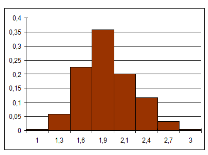
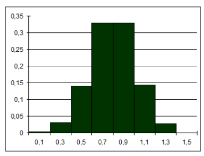
Минимальное количество опытов определяем по формуле (7), а именно с использованием последнего выражения в этой формуле:

$$N_{\min} = \left(\frac{F_{N(0,\,1)}^{-1}\left(\dfrac{p(\varepsilon)+1}{2} \right)}{2\varepsilon} \right)^2 = \left(\frac{F_{N(0,\,1)}^{-1}\left(\dfrac{0,97+1}{2} \right)}{2 \cdot 0,05} \right)^2 \approx 471.$$

Для вычисления значения функции в числителе мы воспользовались функцией **НОРМСТОБР** из программы *Microsoft Office Excel*. Примем количество опытов N = 500.

В соответствии с таблицей 2 в программе *Microsoft Office Excel* формируем три массива псевдослучайных чисел объемом 500 значений каждый. Для каждой выборки проводим статистическую обработку по формулам (13) и (14) и строим гистограмму. Полученные случайные значения факторов подставляем в формулу (18) и определяем значение функции отклика, в качестве которой здесь выступает прочность на разрыв. Данные по основному этапу метода Монте-Карло сведены в таблицу 3.

Таблица 3 – План реализации метода Монте-Карло

Эксперименты	Факторы			Функция отклика
j	*C*, %	*Si*, %	*Mn*, %	σ_B, МПа
1	2,6147	1,5534	0,3859	315,0018
2	3,3448	1,4818	0,6779	251,3292
3	3,4536	2,6799	0,7214	283,7511
• • •	• • •	• • •	• • •	• • •
500	4,1135	2,0606	0,9854	206,9642
Статистические показатели выборки				
Среднее значение	3,3920	1,7852	0,6968	257,8936
Стандартное отклонение	0,5140	0,3180	0,2056	44,8368
Минимальное значение	1,8689	0,9387	0,0876	149,6086
Максимальное значение	4,6495	2,7946	1,1998	381,3668
Гистограмма				см. рис. 1

Видно, что статистические характеристики сделанных выборок незначительно отличаются от заданных значений, что вполне ожидаемо. Среднее значение прочности мало отличается от значения, рассчитанного по детерминистической модели, и так же удовлетворяет критерию качества. Гистограмма для значений прочности представлена на рис. 1.

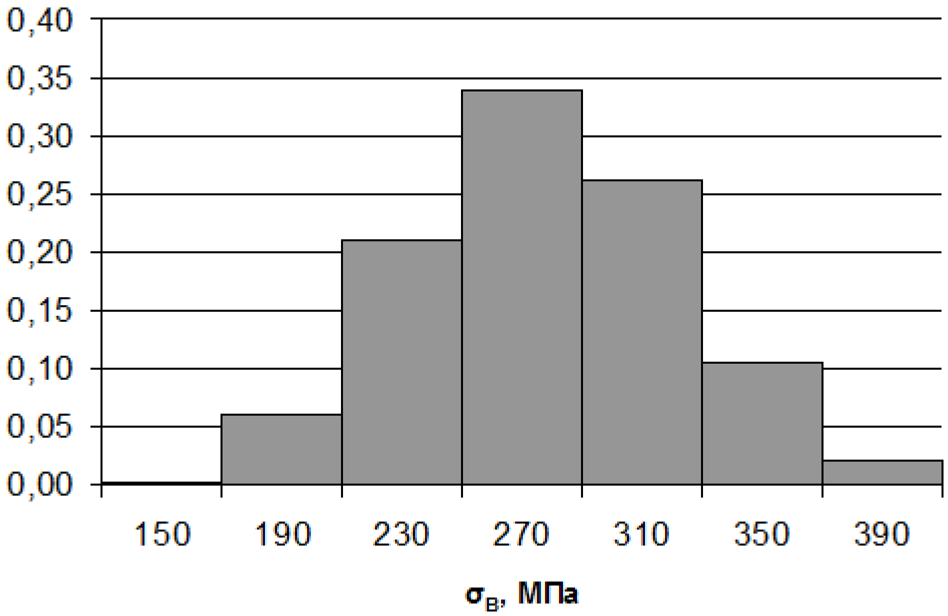


Рис. 1 – Гистограмма для значений прочности на разрыв

Из гистограммы видно, что довольно большая доля значений лежит ниже критического значения. Согласно оценке, проведенной средствами программы *Microsoft Office Excel*, доля значений меньше 240 МПа составляет 35,8 %.

Таким образом, несмотря на значительный запас по средней прочности, ожидаемая доля брака по этому показателю может достигать 35,8 %, несмотря на то что средняя прочность удовлетворяет критерию качества. Высокий процент брака при удовлетворительном среднем значении прочности вызван неточностями дозирования исходных компонентов сплава. Снижения брака можно добиться либо повышением средней прочности за счет изменения химического состава, либо повышением точности дозирования исходных компонентов.

2.2 Исследование работы интегрированного технологического комплекса

В этом подразделе рассмотрено моделирование, осуществляемое на основе алгоритмического оператора с использованием неаналитической функции.

Моделирование выполнено с использованием программы *Wolfram Mathematica 10.3*.

Задание

Определить среднее время цикла и потери производительности, связанные с интеграцией, для технологического комплекса, состоящего из трех стержневых машин, работающих в цикле параллельно. На машинах изготавливаются части сложного стержня, которые затем поступают на сборку, которая производится за пределами рассматриваемого технологического комплекса. Каждый цикл на всех машинах комплекса начинается одновременно после того, как последняя машина заканчивает предыдущий цикл.

Средняя (паспортная) производительность Π каждой из машин в отдельности одинакова и составляет 200 стержней/час. По данным хронометража установлено, что коэффициент стабильности каждой из трех машин составил: ψ_1 = 2,0 %; ψ_2 = 1,5 % и ψ_3 = 1,0 %. При моделировании принять нормальный закон распределения времени цикла.

Обеспечить попадание итогового распределения в ε-окрестность действительной вероятности с точностью ε = ± 2,5 % при доверительной вероятности p = 0,97.

Решение

Для анализа процесса в качестве исследуемых факторов примем время цикла каждой из стержневых машин. От них напрямую зависит общее время цикла технологического комплекса $T_ц$, которое и определяет общую производительность. Эта зависимость имеет вид:

$$T_ц = \max(t_1,\ t_2,\ t_3), \tag{19}$$

где t_1, t_2 и t_3 – время цикла первой, второй и третьей машины соответственно.

Если бы время цикла каждой машины было строго стабильным, то время цикла всего комплекса было бы таким же, как у машин. Следовательно, производительность комплекса равнялась бы производительности машин, и комплекс работал бы без потерь.

Однако мы знаем, что время цикла каждой машины является случайной величиной, подверженной нормальному закону распределения. Для того чтобы это смоделировать, зададимся для начала характеристиками этих распределений. В качестве математического ожидания времени цикла μ_t примем время, соответствующее средней производительности машины:

$$\mu_t = \bar{t} = \frac{3600}{П} = \frac{3600}{200} = 18\ (\text{с}).$$

Для определения среднеквадратического отклонения воспользуемся формулой (15), предположив, что оно равно стандартному отклонению по выборке:

$$\sigma_1 = \frac{\psi_1 \cdot \bar{t}}{100\,\%} = \frac{2{,}0\,\% \cdot 18}{100\,\%} = 0{,}36;$$

$$\sigma_2 = \frac{1{,}5\,\% \cdot 18}{100\,\%} = 0{,}27;$$

$$\sigma_3 = \frac{1{,}0\,\% \cdot 18}{100\,\%} = 0{,}18.$$

Характеристики распределений по каждому из факторов сведены в таблицу 4.

Таблица 4 – Характеристики распределений для случайных факторов

Характеристики	Факторы		
	t_1	t_2	t_3
Вид распределения	нормальное		
Математическое ожидание μ	18	18	18
Среднеквадратическое отклонение σ	0,36	0,27	0,18

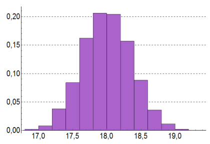
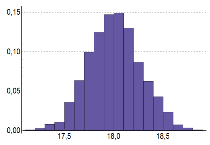
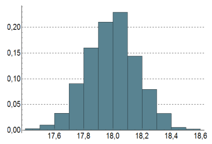
Минимальное количество опытов, необходимое для достижения требуемой точности, вычислим по формуле (7):

$$N_{\min} = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{erf}^{-1} p(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{erf}^{-1}(0,97)}{0,025}\right)^2 \approx 1884.$$

Мы приняли второе выражение, поскольку в пакете *Wolfram Mathematica* возможно вычисление значений функции, обратной к функции ошибок. Примем количество опытов N = 2000.

В соответствии с таблицей 2 в программе *Wolfram Mathematica* формируем три массива псевдослучайных чисел объемом 2000 значений каждый. Для каждой выборки проводим статистическую обработку по формулам (13) и (14) и строим гистограмму. В соответствии с соотношением (19) значение функции отклика в каждом эксперименте определяем как максимальное значение из трех. Данные по основному этапу метода Монте-Карло сведены в таблицу 5. Гистограмма распределения значений функции отклика приведена на рис. 2.

Таблица 5 – План реализации метода Монте-Карло

Эксперименты	Факторы			Функция отклика
j	t_1, с	t_2, с	t_3, с	$T_ц$, с
1	18,0729	18,0989	17,4347	18,0989
2	18,3157	17,8489	18,0351	18,3157
3	17,9660	18,0052	18,2287	18,2287
• • •	• • •	• • •	• • •	• • •
2000	17,6919	18,0367	18,0091	18,0367
Статистические показатели выборки				
Среднее значение	18,0032	18,0061	17,9921	18,2334
Стандартное отклонение	0,362028	0,266167	0,173829	0,224317
Минимальное значение	16,8890	17,1794	17,4347	17,5953
Максимальное значение	19,2394	18,8009	18,5527	19,2394
Гистограмма				см. рис. 2

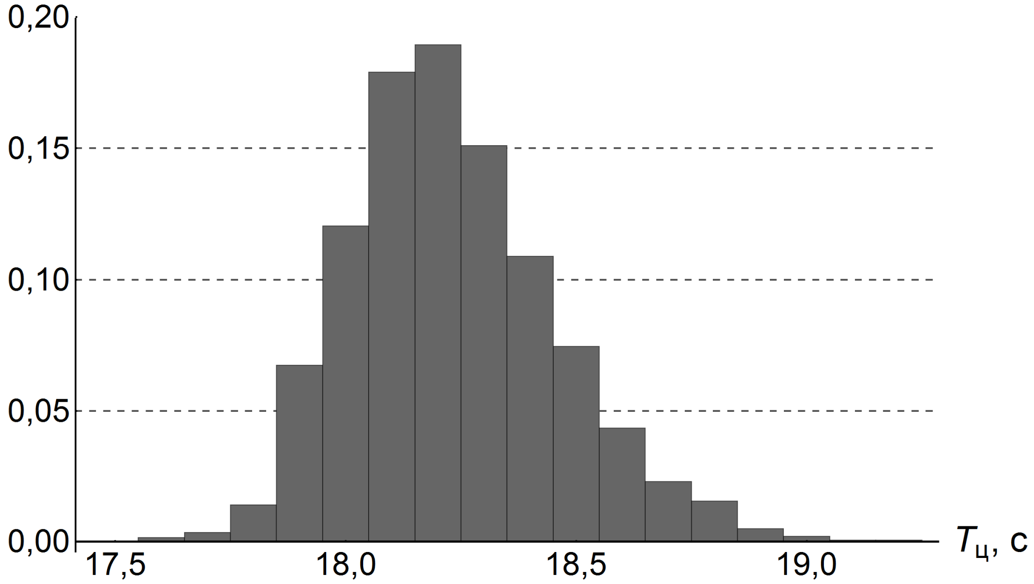


Рис. 2 – Гистограмма распределения для продолжительности цикла технологического комплекса

Видно, что статистические характеристики выборок по факторам хорошо согласуются с заданными значениями. Моделирование показывает увеличение средней продолжительности цикла для комплекса по сравнению со временем цикла отдельной машины. Причем на гистограмме хорошо видно, что распределение этого параметра уже не носит характер нормального, поскольку виден некоторый «перекос» в сторону меньших значений.

Средняя продолжительность общего цикла по результатам моделирования составила $\overline{T}_ц$ = 18,2334 с, что позволяет определить среднюю производительность технологического комплекса:

$$\overline{П} = \frac{3600}{\overline{T}_ц} = \frac{3600}{18,2334} = 197,44 \text{ (стержней/час)}.$$

Коэффициент производительности определим в соответствии с формулой (16):

$$h = \frac{\bar{t}}{\overline{T}_ц} = \frac{18}{18,2334} = 0,987,$$

откуда по формуле (17) можно определить потери производительности:

$$\Delta Q = (1 - 0,987) \cdot 100\ \% = 1,28\ \%.$$

Таким образом, интеграция нескольких технологических модулей хоть и приводит к потере производительности, но относительная величина этих потерь незначительна. Следует, однако, заметить, что это может быть связано с достаточно высокой стабильностью работы составляющих комплекс машин. При увеличении дисперсии по времени цикла на отдельных машинах можно ожидать увеличения потерь производительности.

Приложение А

Некоторые полезные функции математических программ

В приложении рассмотрены некоторые функции различных математических программ, которые могут использоваться при моделировании с использованием метода Монте-Карло.

Microsoft Office Excel

Генерация случайных чисел

Генерация последовательности случайных чисел осуществляется с помощью функции «Генерация случайных чисел» из пакета «Анализ данных». Установить пакет можно из меню «Надстройки».

В появившемся меню необходимо: ввести число переменных (как правило, одна, но может быть и больше, если некоторые факторы имеют одинаковые характеристики распределения); число случайных чисел, равное числу опытов; выбрать тип распределения и указать его параметры (например, для нормального распределения это будет среднее значение и стандартное отклонение).

В поле «Случайное рассеивание» можно ввести произвольное числовое значение, которое обеспечит воспроизводимость выборки – каждый раз при формировании выборки с одинаковыми параметрами и одинаковым значением в поле «Случайное рассеивание» будет формироваться одна и та же случайная выборка. Фактически этот параметр равносилен установке начального значения r_0 в формуле (8).

В «Параметрах вывода» удобнее указывать выходной интервал на том же листе – для этого достаточно указать первую ячейку интервала. При генерации последующих выборок нужно следить, чтобы новые значения не записывались поверх старых, каждый раз указывая новый выходной интервал.

Генерация логнормального распределения

Для проведения моделирования может понадобиться сгенерировать выборку, подчиненную логнормальному распределению, которого нет в стандартном наборе. Для того чтобы сделать это, нужно сгенерировать последовательность по нормальному распределению со средним, равным медиане логнормального распределения, и стандартным отклонением, равным стандартному отклонению логнормального распределения. Если теперь от каждого значения вычислить экспоненту, то получившаяся последовательность будет удовлетворять логнормальному распределению.

Построение гистограммы

Для построения гистограммы удобнее всего использовать функцию «Гистограмма» из того же пакета «Анализ данных». Помимо входного интервала, в качестве которого служат адреса ячеек с данными, необходимо указать так называемый «интервал карманов». Фактически это набор значений, дающих границы интервалов, по которым будет строиться гистограмма. Их нужно задать самостоятельно, исходя из максимального и минимального значений фактора и числа интервалов. Следует обратить внимание на то, что числа в «интервале карманов» представляют собой не середины, а границы интервалов. Для наглядности желательно, чтобы ширина интервалов была одинаковой, а их середины были представлены «круглыми» числами.

В параметрах функции «Гистограмма» нужно также поставить галочку напротив опции «Вывод графика».

По умолчанию гистограмма строится на основе абсолютных частот. Для того чтобы она отражала распределение по относительным частотам, столбец «Частота» следует поделить на объем выборки. Проще всего это сделать в соседнем столбце, который потом нужно указать в ряду значений, по которым строится гистограмма.

Чтобы внешний вид гистограммы был похож на рис. 1, необходимо выполнить следующие действия:

- заменить слово «Ещё» в столбце карманов на значение середины следующего интервала;
- в меню «Параметры диаграммы» удалить все заголовки, кроме оси X, в которой следует указать физическую величину и единицу ее измерения;
- там же установить основные линии сетки по оси Y и удалить легенду;
- в соответствующих меню «Формат области построения», «Формат рядов данных» и т. п. выбрать цвет фона и цвет диаграммы, стили подписей по осям и т. п.;
- чтобы столбцы прилегали друг к другу, установить ширину зазора 0 в меню «Формат рядов данных»;
- чтобы дробные числа по осям были написаны с одинаковой точностью, в меню «Формат оси» для них нужно установить числовой формат с заданной точностью.

Перед тем как вставлять гистограмму в текстовый редактор, бывает удобно сохранить ее в файле рисунка (в формате JPG, PNG и т. п.), и использовать для вставки уже этот рисунок. Для создания файла рисунка можно воспользоваться любым графическим редактором, например *Paint*.

Полезные функции

Следующие функции могут быть полезны для проведения вычислений:

- **СРЗНАЧ(число1;число2;...)** – вычисляет среднее значение указанных чисел или диапазона ячеек;
- **СТАНДОТКЛОН(число1;число2;...)** – вычисляет стандартное отклонение по выборке, то есть на основе несмещенной дисперсии;

- **МИН(число1;число2;…)** – возвращает минимальное значение из указанного набора или диапазона чисел;
- **МАКС(число1;число2;…)** – возвращает максимальное значение из указанного набора или диапазона чисел;
- **ЕСЛИ(лог_выраж;знач_если_истина;знач_если_ложь)** – проверяет истинность логического выражения (например, **A5>=12**) и, если оно истинно возвращает **знач_если_истина**, в противном случае возвращает **знач_если_ложь**;
- **СЧЁТЕСЛИ(диапазон;критерий)** – подсчитывает количество ячеек в указанном диапазоне, удовлетворяющих условию, заданному критерием (критерий записывается в кавычках, например: **"<250"** – будет подсчитано количество ячеек, в которых значение меньше 250) – данная функция очень полезна при расчете процента брака и других критериальных оценках;
- **НОРМСТРАСП(z)** – вычисляет значение интегрального стандартного нормального распределения от аргумента **z** – это та самая функция $F_{N(0,1)}$ из подраздела 1.2.
- **НОРМСТОБР(P)** – функция, обратная к **НОРМСТРАСП(z)**, то есть та самая функция $F_{N(0,1)}^{-1}$ из формулы (7) – вычисляет значение аргумента по заданному значению аргумента.

Wolfram Mathematica

Приведенные здесь функции соответствуют 10-й версии данного программного продукта. В младших версиях некоторые из указанных функций могут отсутствовать или иметь другой синтаксис.

Непрерывные распределения

- **`UniformDistribution[{min,max}]`** – равномерное распределение на интервале от `min` до `max`;

- **UniformDistribution[]** – равномерное распределение на интервале от 0 до 1;
- **NormalDistribution[μ,σ]** – нормальное распределение с математическим ожиданием μ и среднеквадратическим отклонением σ;
- **NormalDistribution[]** – стандартное нормальное распределение;
- **LogNormalDistribution[μ,σ]** – логнормальное распределение с медианой μ и среднеквадратическим отклонением σ.
- **HistogramDistribution[data]** – строит распределение по гистограмме, соответствующей выборке случайных значений `data`.

Функции для работы с распределениями

- **PDF[dist,x]** – плотность вероятности распределения `dist` как функция переменной `x`;
- **CDF[dist,x]** – интегральная функция распределения `dist` как функция переменной `x`;
- **ProbabilityDistribution[pdf,{x,x_{min},x_{max}}]** – задание собственного распределения вероятностей в соответствии с функцией плотности вероятности `pdf` на интервале переменной `x` от x_{min} до x_{max}. Функция `pdf` может быть представлена кусочной функцией **Piecewise**, что позволяет задавать распределения на основе гистограмм;
- **MixtureDistribution[{w_1,…,w_n},{$dist_1$,…,$dist_n$}]** – формирует распределение, которое является комбинацией распределений {$dist_1$,…,$dist_n$}, каждому из которых в общем распределении соответствует свой вес {w_1,…,w_n} – эту функцию

также можно использовать для создания непрерывного распределения на основе гистограммы;

- **TruncatedDistribution[{x_{min},x_{max}},dist]** – формирует распределение путем усечения распределения dist внутри интервала от x_{min} до x_{max}. При этом значения за пределами интервала отбрасываются, а новое распределение нормируется на единицу. Данную функцию можно использовать для генерации последовательностей внутри заданного интервала значений;
- **CensoredDistribution[{x_{min},x_{max}},dist]** – формирует распределение путем отбрасывания значений распределения dist, лежащих за пределами интервала от x_{min} до x_{max}. При этом итоговая функция на единицу не нормируется. Также может использоваться для моделирования выборок, лежащих внутри заданного интервала, с выбрасыванием остальных значений.

Генерация случайных чисел

- **RandomVariate[dist,n]** – формирует выборку псевдослучайных чисел объемом n в соответствии с распределением dist;
- **SeedRandom[n]** – устанавливает генератор случайных чисел в определенное состояние, что позволяет строить воспроизводимые последовательности псевдослучайных чисел – по своей сути аналогичен опции «Случайное рассеивание» функции «Генерация случайных чисел» из пакета *Microsoft Office Excel*;
- **SeedRandom[]** – возвращает генератор случайных чисел в исходное состояние, когда генерируемая последовательность инициируется случайным образом.

Функции статистической обработки

- **Probability[pred,x≈dist]** – вычисляет вероятность того, что случайная величина x, подчиненная закону распределения dist удовлетворяет предикату pred, в качестве которого может выступать логическое условие или неравенство;

- **Mean[list]** – вычисляет среднее значение по массиву list;
- **Variance[list]** – вычисляет несмещенную дисперсию по массиву list;
- **StandardDeviation[list]** – стандартное отклонение по массиву list, вычисляемое на основе несмещенной дисперсии;
- **Length[list]** – вычисляет длину массива list;
- **Total[list]** – вычисляет сумму элементов массива list;
- **Select[list,crit]** – формирует массив из элементов массива list, которые удовлетворяют критерию crit, в качестве которого может выступать логическое условие или неравенство.
- **Min[list]** – возвращает минимальное значение из массива list;
- **Max[list]** – возвращает максимальное значение из массива list.

Другие полезные функции

- **Piecewise[{{val$_1$,cond$_1$},{val$_2$,cond$_2$},…}]** - формирует кусочную функцию, значения которой val$_i$ задаются на интервалах значений переменной, задаваемых соответствующими условиями cond$_i$;
- **Join[list$_1$,list$_2$,…]** – объединяет массивы list$_i$ в один;
- **Transpose[list]** – транспонирует матрицу, заданную массивом list;
- **Erf[z]** – функция ошибок erf(z);
- **InverseErf[s]** – функция, обратная к функции ошибок, вычисляет z такое, что erf(z) = s.

- **Histogram[list,bspec,hspec,opt]** – строит гистограмму по массиву данных `list` с учетом спецификаций `bspec` (определяет вид гистограммы) и `hspec` (определяет ширину и количество интервалов) и опций `opt`, определяющих внешний вид гистограммы.
- **Import[“file.xls”]** – импорт данных, содержащихся в файле `file.xls`, с их представлением в виде списка.
- **Export[“file.xls”,expr]** – экспорт выражения `expr` в файл `file.xls`.

Приложение Б

Варианты заданий

Задание

Для заданной математической модели и исходных данных провести моделирование методом Монте-Карло с требуемой точностью. Сравнить результаты моделирования со значениями, полученными по детерминистической модели. На основании указанного критерия сделать выводы о пригодности описанного процесса и возможных путях его улучшения (при необходимости).

Величину доверительной вероятности $p(\varepsilon)$ принять равной 0,95.

Вариант 1

Установлено, что предел прочности серого чугуна σ_B (кгс/мм^2) зависит от его химического состава в соответствии со следующим эмпирическим уравнением:

$$\sigma_B = 28,2 - 0,23 \cdot C - 1,15 \cdot Si - 0,17 \cdot Mn,$$

где C, Si и Mn – процентное содержание углерода, кремния и марганца соответственно.

При производстве чугуна используют следующий химический состав: C = 3,20 %; Si = 1,44 %; Mn = 0,77 %. Итоговое содержание указанных компонентов в сплаве определяется влиянием случайных факторов и характеризуется нормальным распределением. Стандартное отклонение для компонентов составляет: углерод – s_C = 0,57 %; кремний и марганец – $s_{Si} = s_{Mn}$ = 0,2 %.

Требуется определить процент брака по пределу прочности, вызванного колебаниями химического состава, если бракованными считаются образцы с прочностью ниже $\sigma_{B\,кр}$ = 25 кгс/мм^2.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 4,0 %.

Вариант 2

Комплекс по изготовлению стержней состоит из трех автоматических стержневых машин, которые работают параллельно в цикловом режиме. Цикл работы считается завершенным, когда готовы все три стержня. Время цикла комплекса $T_ц$ в каждом случае определяется следующим соотношением:

$$T_ц = \max(t_1, t_2, t_3),$$

где t_1, t_2, t_3 – соответствующие времена циклов изготовления каждого стержня.

Время изготовления каждого стержня считается случайной нормально распределенной величиной. При этом среднее время изготовления для первого стержня составляет $\overline{t_1}$ = 20 с, для второго – $\overline{t_2}$ = 15 с, для третьего – $\overline{t_3}$ = 18 с. Коэффициент стабильности всех стержневых машин одинаковый и равен ψ = 10 %.

Требуется определить потери производительности комплекса по производству стерней, вызванные несогласованностью работы отдельных машин. Потери производительности определяются относительно самого длинного цикла изготовления стержня.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 4,0 %.

Вариант 3

Конечная плотность песчано-глинистой формы ρ (кг/м^3) при прессовании может быть определена с помощью эмпирического уравнения О. А. Беликова:

$$\rho = \rho_{0,1} + n\left(1 + \lg p_{пр}\right),$$

где $\rho_{0,1}$ – плотность смеси при давлении 0,1 МПа, кг/м^3;

n – коэффициент уплотняемости, кг/м^3;

$p_{пр}$ – давление прессования, МПа.

При выполнении задания принять, что $\rho_{0,1}$ – нормальная случайная величина со средним значением 1380 кг/м^3 и стандартным отклонением 50 кг/м^3, а n = 400 кг/м^3 – постоянная величина. Давление прессования также подвержено случайным колебаниям с нормальным законом распределения: среднее давление $\overline{p}_{пр}$ = 1,2 МПа, стандартное отклонение σ_p = = 0,15 МПа.

Требуется определить процент брака по изготовлению форм, если бракованной считается форма с плотностью менее 1800 кг/м^3.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 5,0 %.

Вариант 4

Газопроницаемость G (м^2/(Па·с)) сухого формовочного песка определяется его удельной поверхностью $S_ф$ (м^2/кг):

$$G = \left(K \cdot \frac{e \cdot \sqrt{e}}{(1-e) \cdot S_ф} \right)^2,$$

где K = 0,0419 – постоянный коэффициент;

e – пористость песка:

$$e = 1 - \frac{\rho}{\rho_s},$$

где ρ – плотность песчаного массива;

ρ_s = 2650 кг/м^3 – плотность материала песчинок – кварца.

Удельная поверхность – это отношение суммарной площади поверхности частиц к их общей массе. Если предположить сферичность частиц, удельная поверхность будет вычисляться по следующей формуле:

$$S_ф = \frac{\sum S_i}{\sum m_i} = \frac{\sum S_i}{\rho_s \cdot \sum V_i} = \frac{6 \cdot \sum d_i^2}{\rho_s \cdot \sum d_i^3},$$

где d_i, V_i, S_i и m_i – диаметр, объем, площадь поверхности и масса i-ой частицы соответственно.

При этом известно, что размер частиц песка в массиве подчинен лог-нормальному распределению со средним μ и стандартным отклонением s.

Требуется определить теоретическую газопроницаемость для песка с плотностью ρ = 1800 кг/м^3 и гранулометрическим составом, имеющим следующие характеристики: средний размер частиц $d_{ср}$ = 0,2 мм (μ = = –1,6094); стандартное отклонение s = 0,22. Сравнить полученное значение с газопроницаемостью, рассчитанной по среднему диаметру без учета разброса размеров частиц.

Точность распределения размеров не менее ε = 2,5 %.

Вариант 5

Конечная плотность песчано-глинистой формы ρ (кг/м^3) при прессовании может быть определена с помощью эмпирического уравнения О. А. Беликова:

$$\rho = \rho_{0,1} + n\left(1 + \lg p_{пр}\right),$$

где $\rho_{0,1}$ – плотность смеси при давлении 0,1 МПа, кг/м^3;

n – коэффициент уплотняемости, кг/м^3;

$p_{пр}$ – давление прессования, МПа.

При выполнении задания принять, что $\rho_{0,1}$ = 1400 кг/м^3 – постоянная величина, а n – случайная нормально распределенная величина со средним значением 320 кг/м^3 и стандартным отклонением 10 кг/м^3. Давление прессования также подвержено случайным колебаниям с нормальным законом распределения: среднее давление $\overline{p}_{пр}$ = 0,9 МПа, стандартное отклонение σ_p = 0,1 МПа.

Требуется определить процент брака по формам, если бракованной считается форма с плотностью менее 1700 кг/м^3.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 2,5 %.

Вариант 6

Конечная плотность песчано-глинистой формы ρ (кг/м^3) при прессовании может быть определена с помощью эмпирического уравнения О. А. Беликова:

$$\rho = \rho_{0,1} + n\left(1 + \lg p_{пр}\right),$$

где $\rho_{0,1}$ – плотность смеси при давлении 0,1 МПа, кг/м^3;

n – коэффициент уплотняемости, кг/м^3;

$p_{пр}$ – давление прессования, МПа.

При выполнении задания принять, что $\rho_{0,1}$ – нормальная случайная величина со средним значением 1450 кг/м^3 и стандартным отклонением 50 кг/м^3, а n – нормальная случайная величина со средним 420 кг/м^3 и стандартным отклонением 15 кг/м^3. Давление прессования также подвержено случайным колебаниям с нормальным законом распределения: среднее давление $\overline{p}_{пр}$ = 0,8 МПа, стандартное отклонение σ_p = 0,15 МПа.

Требуется определить процент брака по изготовлению форм, если бракованной считается форма с плотностью менее 1800 кг/м^3.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 3,0 %.

Вариант 7

Установлено, что предел прочности серого чугуна σ_B (МПа) зависит от его химического состава в соответствии со следующим эмпирическим уравнением:

$$\sigma_B = 481{,}8 - 52{,}6 \cdot C - 37{,}8 \cdot Si + 14{,}4 \cdot Mn + 334{,}2 \cdot Cr,$$

где C, Si, Mn и Cr – процентное содержание углерода, кремния, марганца и хрома соответственно.

При производстве чугуна используют следующий химический состав: C = 3,80 %; Si = 1,85 %; Mn = 0,82 %; Cr = 0,21 %. Итоговое содержание указанных компонентов в сплаве определяется влиянием случайных факторов и характеризуется нормальным распределением. Стандартное отклонение по каждому из элементов: углерод и кремний – $s_C = s_{Si} =$ $= 0{,}10$ %; марганец и хром – $s_{Mn} = s_{Cr} = 0{,}03$ %.

Требуется определить процент брака по пределу прочности, вызванного колебаниями химического состава, если бракованными считаются образцы с твердостью ниже $\sigma_{B\,кр} = 285$ МПа.

Точность распределения функции отклика не менее $\varepsilon = 5{,}0$ %.

Вариант 8

Автоматический формовочный комплекс изготавливает формы и выставляет их на непрерывно движущийся конвейер. Тележки конвейера приходят на позицию формовки через равные интервалы времени, определяемые скоростью конвейера. При этом если к приходу тележки, очередная форма еще не готова, тележка уходит с позиции формовки пустой.

Таким образом, время $T_ц$, затрачиваемое линией на изготовление одной формы, задается следующим соотношением:

$$T_ц = \begin{cases} T_{ЛК}, & T_{ФК} < T_{ЛК}; \\ 2T_{ЛК}, & T_{ФК} > T_{ЛК}. \end{cases}$$

где $T_{ФК}$ – время цикла формовочного комплекса.

$T_{ЛК}$ – темп конвейера – время между приходами двух последовательных тележек на позицию формовки.

Можно принять, что время цикла формовочного комплекса распределено по нормальному закону, а темп конвейера – управляемая постоянная величина.

Требуется определить потери производительности формовочной линии вызванные несогласованной работой конвейера и формовочного комплекса, если известно, что:

- формовочный комплекс имеет среднюю производительность $П = 320$ форм/ч и коэффициент стабильности $\psi = 15$ %;
- темп конвейера превышает средний темп работы формовочного комплекса: $T_{ЛК} = 1{,}1 \cdot \overline{T_{ФК}}$.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 3,0 %.

Вариант 9

Установлено, что твердость по Бринеллю серого чугуна *HB* зависит от его химического состава в соответствии со следующим эмпирическим уравнением:

$$HB = 252 - 14,6 \cdot C - 37,8 \cdot Si + 8,8 \cdot Mn + 141 \cdot Cr,$$

где C, Si, Mn и Cr – процентное содержание углерода, кремния, марганца и хрома соответственно.

При производстве чугуна используют следующий химический состав: C = 3,28 %; Si = 1,98 %; Mn = 0,88 %; Cr = 0,22 %. Итоговое содержание указанных компонентов в сплаве определяется влиянием случайных факторов и характеризуется нормальным распределением. Стандартное отклонение по каждому из элементов: углерод – s_C = 0,06 %; кремний – s_{Si} = 0,067 %; марганец и хром – $s_{Mn} = s_{Cr}$ = 0,042 %.

Требуется определить процент брака по твердости, вызванного колебаниями химического состава, если бракованными считаются образцы с твердостью ниже $HB_{кр}$ = 165.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 2,0 %.

Вариант 10

Автоматический формовочный комплекс изготавливает формы и выставляет их на непрерывно движущийся конвейер. Тележки конвейера приходят на позицию формовки через равные интервалы времени, определяемые скоростью конвейера. При этом если к приходу тележки, очередная форма еще не готова, тележка уходит с позиции формовки пустой.

Таким образом, время $T_ц$, затрачиваемое линией на изготовление одной формы, задается следующим соотношением:

$$T_ц = \begin{cases} T_{ЛК}, & T_{ФК} < T_{ЛК}; \\ 2T_{ЛК}, & T_{ФК} > T_{ЛК}. \end{cases}$$

где $T_{ФК}$ – время цикла формовочного комплекса.

$T_{ЛК}$ – темп конвейера – время между приходами двух последовательных тележек на позицию формовки.

Можно принять, что время цикла формовочного комплекса распределено по нормальному закону, а темп конвейера – управляемая постоянная величина.

Требуется определить потери производительности формовочной линии вызванные несогласованной работой конвейера и формовочного комплекса, если известно, что:

- формовочный комплекс имеет среднюю производительность $П$ = 240 форм/ч и коэффициент стабильности ψ = 5 %;
- скорость конвейера настроена по средней производительности формовочного комплекса: $T_{ЛК} = \overline{T_{ФК}}$.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 4,5 %.

Вариант 11

Автоматический формовочный комплекс изготавливает формы и выставляет их на непрерывно движущийся конвейер. Тележки конвейера приходят на позицию формовки через равные интервалы времени, определяемые скоростью конвейера. При этом если к приходу тележки, очередная форма еще не готова, тележка уходит с позиции формовки пустой.

Таким образом, время $T_ц$, затрачиваемое линией на изготовление одной формы, задается следующим соотношением:

$$T_ц = \begin{cases} T_{ЛК}, & T_{ФК} < T_{ЛК}; \\ 2T_{ЛК}, & T_{ФК} > T_{ЛК}. \end{cases}$$

где $T_{ФК}$ – время цикла формовочного комплекса.

$T_{ЛК}$ – темп конвейера – время между приходами двух последовательных тележек на позицию формовки.

Можно принять, что время цикла формовочного комплекса распределено по нормальному закону, а темп конвейера – управляемая постоянная величина.

Требуется определить потери производительности формовочной линии вызванные несогласованной работой конвейера и формовочного комплекса, если известно, что:

- формовочный комплекс имеет среднюю производительность $П$ = 300 форм/ч и коэффициент стабильности ψ = 10 %;
- скорость конвейера настроена по средней производительности формовочного комплекса: $T_{ЛК} = \overline{T_{ФК}}$.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 2,5 %.

Вариант 12

Формовочный комплекс состоит из двух автоматических формовочных машин, которые работают параллельно в цикловом режиме, изготавливая полуформы верха и низа. Цикл работы считается завершенным, когда готовы обе полуформы. Время цикла комплекса $T_ц$ в каждом случае определяется следующим соотношением:

$$T_ц = \max\left(t_1, t_2\right),$$

где t_1, t_2 – соответствующие времена циклов изготовления каждой из полуформ.

Время изготовления полуформы считается случайной нормально распределенной величиной. При этом среднее время изготовления полуформы верха составляет $\overline{t_1}$ = 15 с, полуформы низа – $\overline{t_2}$ = 18 с. Коэффициент стабильности обеих машин одинаковый и равен ψ = 15 %.

Требуется определить потери производительности комплекса по производству стерней, вызванные несогласованностью работы отдельных машин. Потери производительности определяются относительно самого длинного цикла изготовления, то есть по полуформе низа.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 2,5 %.

Вариант 13

Установлено, что предел прочности серого чугуна σ_B (МПа) зависит от его химического состава в соответствии со следующим эмпирическим уравнением:

$$\sigma_B = 481{,}8 - 52{,}6 \cdot C - 37{,}8 \cdot Si + 14{,}4 \cdot Mn + 334{,}2 \cdot Cr,$$

где C, Si, Mn и Cr – процентное содержание углерода, кремния, марганца и хрома соответственно.

При производстве чугуна используют следующий химический состав: C = 3,37 %; Si = 2,16 %; Mn = 0,38 %; Cr = 0,18 %. Итоговое содержание указанных компонентов в сплаве определяется влиянием случайных факторов и характеризуется нормальным распределением. Стандартное отклонение по каждому из элементов: углерод и кремний – $s_C = s_{Si}$ = = 0,03 %; марганец и хром – $s_{Mn} = s_{Cr}$ = 0,01 %.

Требуется определить процент брака по пределу прочности, вызванного колебаниями химического состава, если бракованными считаются образцы с твердостью ниже $\sigma_{B\ кр}$ = 280 МПа.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 2,5 %.

Вариант 14

Установлено, что предел прочности серого чугуна σ_B (кгс/мм^2) зависит от его химического состава в соответствии со следующим эмпирическим уравнением:

$$\sigma_B = 70{,}77 - 13{,}312 \cdot C + 2{,}375 \cdot Si - 2{,}175 \cdot Mn,$$

где C, Si и Mn – процентное содержание углерода, кремния и марганца соответственно.

При производстве чугуна используют следующий химический состав: C = 3,50 %; Si = 1,27 %; Mn = 0,85 %. Итоговое содержание указанных компонентов в сплаве определяется влиянием случайных факторов и характеризуется нормальным распределением. Стандартное отклонение для компонентов сплава составляет: углерод и кремний – $s_C = s_{Si}$ = 0,4 %; марганец – s_{Mn} = 0,2 %.

Требуется определить процент брака по пределу прочности, вызванного колебаниями химического состава, если бракованными считаются образцы с прочностью ниже $\sigma_{B\ кр}$ = 25 кгс/мм^2.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 3,0 %.

Вариант 15

Формовочный комплекс состоит из двух автоматических формовочных машин, которые работают параллельно в цикловом режиме, изготавливая полуформы верха и низа. Цикл работы считается завершенным, когда готовы обе полуформы. Время цикла формовочного комплекса $T_ц$ в каждом случае определяется следующим соотношением:

$$T_ц = \max\left(t_1, t_2\right),$$

где t_1, t_2 – соответствующие времена циклов каждой из машин.

Машины обладают идентичными характеристиками, а именно:

- средняя производительность $П$ = 320 полуформ/ч;
- коэффициент стабильности ψ = 10 %.
- распределение времени цикла принимается нормальным.

Требуется определить потери производительности формовочного комплекса, вызванные несогласованностью работы отдельных машин.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 2,0 %.

Вариант 16

Газопроницаемость G (м^2/(Па·с)) сухого формовочного песка определяется его удельной поверхностью $S_ф$ (м^2/кг):

$$G = \left(K \cdot \frac{e \cdot \sqrt{e}}{\left(1-e\right) \cdot S_ф} \right)^2,$$

где K = 0,0419 – постоянный коэффициент;

e – пористость песка:

$$e = 1 - \frac{\rho}{\rho_s},$$

где ρ – плотность песчаного массива;

ρ_s = 2650 кг/м^3 – плотность материала песчинок – кварца.

Удельная поверхность – это отношение суммарной площади поверхности частиц к их общей массе. Если предположить сферичность частиц, удельная поверхность будет вычисляться по следующей формуле:

$$S_{ф} = \frac{\sum S_i}{\sum m_i} = \frac{\sum S_i}{\rho_s \cdot \sum V_i} = \frac{6 \cdot \sum d_i^2}{\rho_s \cdot \sum d_i^3},$$

где d_i, V_i, S_i и m_i – диаметр, объем, площадь поверхности и масса i-ой частицы соответственно.

При этом известно, что размер частиц песка в массиве подчинен логнормальному распределению со средним μ и стандартным отклонением s.

Требуется определить теоретическую газопроницаемость для песка с плотностью ρ = 1750 кг/м^3 и гранулометрическим составом, имеющим следующие характеристики: средний размер частиц $d_{ср}$ = 0,16 мм (μ = = –1,83258); стандартное отклонение s = 0,5. Сравнить полученное значение с газопроницаемостью, рассчитанной по среднему диаметру без учета разброса размеров частиц.

Точность распределения размеров не менее ε = 2,0 %.

Вариант 17

Установлено, что твердость по Бринеллю серого чугуна HB зависит от его химического состава в соответствии со следующим эмпирическим уравнением:

$$HB = 252 - 14{,}6 \cdot C - 37{,}8 \cdot Si + 8{,}8 \cdot Mn + 141 \cdot Cr,$$

где C, Si, Mn и Cr – процентное содержание углерода, кремния, марганца и хрома соответственно.

При производстве чугуна используют следующий химический состав: C = 3,60 %; Si = 1,55 %; Mn = 0,75 %; Cr = 0,18 %. Итоговое содержание указанных компонентов в сплаве определяется влиянием случайных факторов и характеризуется нормальным распределением. Стандартное отклонение по каждому из элементов: углерод – s_C = 0,12 %; кремний – s_{Si} = 0,08 %; марганец – s_{Mn} = 0,08 %; хром – s_{Cr} = 0,05 %.

Требуется определить процент брака по твердости, вызванного колебаниями химического состава, если бракованными считаются образцы с твердостью ниже $HB_{кр}$ = 170.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 4,5 %.

Вариант 18

Условие целостности цилиндрического «болвана» в песчано-глинистой форме при проведении вытяжки определяется соотношением:

$$h \cdot \rho \cdot g + \frac{4h \cdot \tau_{тр}}{d} \le \sigma_{см},$$

где d и h – диаметр и высота «болвана»;

ρ – плотность смеси;

g = 9,81 м/с^2 – ускорение свободного падения;

$\tau_{см}$ – интенсивность силы трения по поверхности «болвана»;

$\sigma_{см}$ – предел прочности смеси на растяжение.

Требуется определить процент брака по изготовлению форм с «болваном» диаметром 250 мм и высотой 300 мм. Другие параметры принять следующими:

- плотность смеси – случайная величина, подверженная нормальному закону распределения с математическим ожиданием 1750 кг/м^3 и среднеквадратическим отклонением 75 кг/м^3;
- интенсивность силы трения – случайная величина, подверженная равномерному закону распределения на интервале от 2,7 до 3,3 кПа;

- предел прочности смеси – случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с математическим ожиданием 20 кПа и среднеквадратическим отклонением 1,0 кПа.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 3,5 %.

Вариант 19

Условие целостности цилиндрического «болвана» в песчано-глинистой форме при проведении вытяжки определяется соотношением:

$$h \cdot \rho \cdot g + \frac{4h \cdot \tau_{тр}}{d} \leq \sigma_{см},$$

где d и h – диаметр и высота «болвана»;

ρ – плотность смеси;

g = 9,81 м/с^2 – ускорение свободного падения;

$\tau_{см}$ – интенсивность силы трения по поверхности «болвана»;

$\sigma_{см}$ – предел прочности смеси на растяжение.

Требуется определить процент брака по изготовлению форм с «болваном» диаметром 200 мм и высотой 350 мм. Другие параметры принять следующими:

- плотность смеси – случайная величина, подверженная нормальному закону распределения с математическим ожиданием 1800 кг/м^3 и среднеквадратическим отклонением 50 кг/м^3;
- интенсивность силы трения – случайная величина, подверженная равномерному закону распределения на интервале от 2,5 до 3,0 кПа;
- предел прочности смеси – случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с математическим ожиданием 27 кПа и среднеквадратическим отклонением 1,5 кПа.

Точность распределения функции отклика не менее ε = 4,0 %.