Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»

Факультет «Машиностроительные технологии»

Кафедра «Литейные технологии»

Отчет по лабораторной работе № 3

по курсу «Основы научных исследований»

Оптимизация процессов с помощью эксперимента

Вариант 40

Выполнил: студент гр. МТ5–17
Карпенко Д. Н.

Проверил: асс. каф. МТ5
Карпенко Д. Н.

Москва – 2016

Оглавление

Введение

Цель работы – овладение методами экспериментальной оптимизации.

Содержание работы:

1. Ознакомиться по методическим указаниям с порядком оптимизации симплекс-методом и методом крутого восхождения.
2. Для начальной точки с определенным содержанием углерода, кремния и марганца подготовить исходные данные для реализации симплекс-метода.
3. Провести оптимизацию химического состава симплекс-методом с учетом заданного значения критерия оптимизации. Определить статистические характеристики функции отклика в итоговой точке.
4. Для заданной начальной точки подготовить исходные данные для оптимизации методом крутого восхождения: провести дробнофакторный эксперимент (ДФЭ), рассчитать компоненты градиента функции отклика и определить шаги по каждой из переменных.
5. Провести оптимизацию химического состава методом крутого восхождения с учетом заданного критерия оптимизации. Определить статистические характеристики функции отклика в итоговой точке.
6. На основании комплексного анализа полученных результатов обосновать выбор одного из составов чугуна.
7. Оформить отчет.

1 Теоретическая часть

1.1 Постановка задачи

В экспериментальной и производственной практике часто требуется определить условия, при которых исследуемый процесс протекает в оптимальных условиях. Особенностью такой постановки задачи является наличие параметра (критерия) оптимизации и нескольких входных переменных, при определенном значении которых параметр оптимизации принимает наилучшее значение. С математической точки зрения такие задачи состоят в отыскании значений независимых переменных x_i, при которых функция отклика y принимает минимальное или максимальное значение. Когда известна функциональная зависимость $y = f\ (x_1, x_2, \dots ,\ x_n\ )$, задача сводится к определению экстремума функции нескольких переменных методами математического анализа. Когда эта зависимость неизвестна, оптимум находят с помощью эксперимента.

В данной работе необходимо с помощью симплекс-метода и метода крутого восхождения найти оптимальный состав серого чугуна СЧ 25, определяемый процентным содержанием углерода (C), кремния (Si) и марганца (Mn). Критерием оптимальности является прочность образцов на растяжение σ_B. Оптимальным считается состав, который обеспечивает среднюю по нескольким образцам прочность больше 25 кгс/мм^2.

Компоненты химического состава в эксперименте могут меняться в следующих пределах:

- углерод: C = 2,3…4,3 %;
- кремний: Si = 1,0…2,1 %;
- марганец: Mn = 0,4…1,1 %.

Для проведения моделирования результатов механических испытаний серого чугуна с целью определения прочности используется программа «Eisen». Число параллельных опытов должно быть не менее 10.

1.2 Симплекс-метод оптимизации

Симплексом называется простейшая выпуклая геометрическая фигура, образованная множеством $(n + 1)$ точек в n-мерном пространстве независимых переменных x_i (i =1, 2,… , n) и обладающая минимальным количеством вершин. Вершинами называются точки, образующие симплекс.

Порядок оптимизации с помощью симплекс-метода в случае, когда необходимо найти значения переменных x_1, x_2,… , x_n, при которых функция отклика y имеет максимум, осуществляется в такой последовательности.

1. Выбирается исходная точка в пространстве заданных переменных $\left(x_1^o, x_2^o, \dots x_n^o\right)$, которая принимается за центр симплекса.

2. Выбирается величина интервала варьирования по каждому фактору: Δx_1, Δx_2,…, Δx_n.

3. Производится преобразование переменных x_i в кодированные переменные X_i по следующей формуле:

$$X_i = \frac{x_i - x_i^o}{\Delta x_i}. \qquad (1)$$

В кодированных переменных X_i центр симплекса имеет координаты $X_i = 0$ (i = 1, 2,..., n), т.е. центр симплекса помещен в начало координат.

4. По табл.1 координат вершин симплекса определяется план эксперимента в кодированных переменных X_i^k (k = 1, 2,…, n, n + 1). На основании приведенной таблицы составляется план эксперимента для переменных в натуральном масштабе, для этого переход к натуральным переменным осуществляется по формуле, обратной (1):

$$x_i^k = x_i^o + X_i^k \cdot \Delta x_i, \qquad (2)$$

где индекс i обозначает номер переменной (i = 1, 2,..., n), а индекс k - номер вершины симплекса (k = 1, 2,…, n, n + 1).

Таблица 1 – Кодовые координаты вершин регулярного симплекса

Вершина k	Координаты				
	X_1^k	X_2^k	…	X_{n-1}^k	X_n^k
1	$-R_0$	$-R_0$	…	$-R_0$	$-R_0$
2	R_1	$-R_2$	…	$-R_2$	$-R_2$
3	$-R_2$	R_1	…	$-R_2$	$-R_2$
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
n	$-R_2$	$-R_2$	…	R_1	$-R_2$
$n+1$	$-R_2$	$-R_2$	…	$-R_2$	R_1

Здесь R_0, R_1 и R_2 – радиусы вписанных в симплекс и описанных вокруг него гиперсфер:

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{2\cdot(n+1)}};$$
$$R_1 = \frac{(n-1)\cdot\sqrt{n+1}+1}{n\cdot\sqrt{2\cdot(n+1)}}; \tag{3}$$
$$R_2 = \frac{\sqrt{n+1}-1}{n\cdot\sqrt{2\cdot(n+1)}},$$

где n – число факторов.

5. После расчета значений переменных во всех вершинах симплекса, то есть после составления плана эксперимента, значение функции отклика определяется экспериментально в каждой вершине. Условия проведения эксперимента (план эксперимента) и наблюдаемое значение функции отклика сводятся в таблицу.

6. После проведения эксперимента определяют «худшую» вершину, в которой прочность чугуна наименьшая. Если в двух вершинах симплекса получены статистически близкие величины предела прочности (отличающиеся менее чем на 0,1 кгс/мм^2), то для надежного определения худшей вершины необходимо повторить опыты в этих вершинах, увеличив число параллельных опытов.

«Худшую» вершину зеркально отражают относительно противоположной грани, координаты новой (зеркально отраженной) вершины $x_i^{ном}$ определяют по формуле:

$$x_i^{нов} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} x_i^k - \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot x_i^j, \tag{4}$$

где x_i^j – i-я координата «худшей» вершины.

7. В новой точке проводят эксперимент и определяют значение функции отклика. Отображение считается успешным, если значение функции отклика в новой точке лучше, чем оно было в последней «худшей» точке. Процедуру, описанную в пп. 6–7, повторяют до тех пор, пока в очередной точке не будет получено оптимальное значение функции отклика.

8. Если в какой-либо точке приведенное выше условие не выполняется, отображение считается неуспешным. В этом случае следует прибегнуть к процедуре сжатия или расширения симплекса, при которой новые координаты вычисляются по формулам (5) и соответственно:

$$x_i^{нов} = (1 + \beta) \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_i^k\right) - \beta \cdot x_i^j, \tag{5}$$

где β – коэффициент сжатия, который лежит в интервале от –1 до 0;

$$x_i^{нов} = (1 + \gamma) \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_i^k\right) - \gamma \cdot x_i^j, \tag{6}$$

где γ – коэффициент расширения ($\gamma > 1$).

Рекомендуемые значения этих коэффициентов: $\beta = –0{,}5$; $\gamma = 2$.

1.3 Метод крутого восхождения

Если оптимумом функции отклика y является ее максимальное значение, то геометрически оптимум соответствует вершине «холма» в (n + 1)-мерном пространстве. Наиболее короткий путь к вершине определяется направлением градиента функции отклика. Градиент непрерывной функции отклика есть вектор

$$\operatorname{grad} y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\vec{j} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\vec{k}, \qquad (7)$$

где $\operatorname{grad} y$ – градиент функции отклика;

$\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ – частная производная функции отклика по i-ой переменной;

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы.

Изменяя независимые переменные в направлении градиента функции, мы будем двигаться к вершине по самому короткому пути. Для метода крутого восхождения необходимо знать аналитический вид функции отклика $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в окрестности точки, где производится определение градиента. Для определения функции отклика используется метод ДФЭ, который позволяет описывать функцию отклика в окрестности центра эксперимента $\left(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o\right)$ в виде линейной функции:

$$y = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + \ldots + b_n \cdot X_n, \qquad (8)$$

где X_0, X_1, X_2,…, X_n – кодовые значения переменных x_0, x_1, x_2,…, x_n в плане ДФЭ;

b_0, b_1, b_2,…, b_n – коэффициенты линейного уравнения регрессии, которые находятся по следующим формулам:

$$b_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} y_j; \qquad b_i = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} X_{ij} \cdot y_j; \quad i = 1, \ldots n, \qquad (9)$$

где $N = 2^{n-1}$ – число опытов ДФЭ.

Оптимизация с помощью метода крутого восхождения в случае, когда необходимо найти значения переменных x_1, x_2,…, x_n, при которых функция отклика имеет максимум, осуществляется в следующей последовательности.

1. Выбирается исходная точка $\left(x_1^o, x_2^o, ... x_n^o\right)$ в пространстве заданных переменных, которая принимается за центр эксперимента.

2. Выбираются величины интервалов варьирования по каждому из факторов: Δx_1, $\Delta x_2, \ldots$, Δx_n.

3. Строится план ДФЭ. Кодированные переменные в ДФЭ принимают значение «+1» или «–1», а переменные в натуральном масштабе соответственно равны значениям на верхнем уровне: $\overline{x}_i = x_i^o + \Delta x_i$ – или на нижнем уровне: $\underline{x}_i = x_i^0 - \Delta x_i$.

4. Реализуется ДФЭ в соответствии с матрицей планирования и по формуле (9) определяются коэффициенты уравнения регрессии b_0, b_1, $b_2, \ldots$, b_n.

5. Производится расчет составляющих градиента для переменных в натуральном масштабе. Для этого определяются с учетом знака произведения $b_i \cdot \Delta x_i$.

6. Определяется базовая переменная x_j, для которой произведение $b_j \cdot \Delta x_j$ по абсолютной величине максимально. Для базовой переменной x_j из практических соображений выбирается шаг изменения δ_j, затем рассчитываются шаги для остальных переменных x_i:

$$\delta_i = \frac{b_i \cdot \Delta x_i}{\lambda}, \tag{10}$$

где λ определяется следующим образом:

$$\lambda = \frac{b_j \cdot \Delta x_j}{\delta_j}. \tag{11}$$

7. С учетом знака коэффициентов b_i осуществляется прибавление к основному уровню x_i^o составляющих градиентов δ_i. Таким образом, получают серию опытов крутого восхождения. Эти опыты часто называют мысленными. Обычно рассчитывают 5–10 мысленных опытов.

8. После расчета мысленных опытов производится реализация части опытов. В предположении, что модель (8) адекватна, реализацию начинают с тех опытов, значения факторов которых выходят за область ДФЭ хотя бы по одному фактору. Причем все намеченные к реализации опыты ставятся либо одновременно, либо последовательно по некоторой программе. Последовательный принцип заключается в том, что вначале ставятся 2–3 опыта, анализируются результаты и принимается решение о постановке новых опытов.

9. Если значение выходной величины перестало расти, и затем стало систематически уменьшаться, из всех реализованных опытов выбирается тот, который дал лучший результат, и его условия принимаются за основной уровень факторов в следующей серии опытов. Таким образом, вся процедура, описанная в пп. 1–8 повторяется для нового центра эксперимента. При этом рекомендуется принять меньшие значения интервалов варьирования.

1.4 Оценка результатов оптимизация

Оценка результатов работы может вестись по нескольким критериям.

1. Трудоемкость оптимизации. Трудоемкость выполнения оптимизации тем или иным методом, как правило, определяется количеством экспериментов, которые необходимо провести для получения результата.

Данный критерий имеет ценность только для экспериментатора, проводящего оптимизацию: на основании сравнения трудоемкости, он может сделать вывод о правильности выбора таких произвольных значений, как величина исходного симплекса или величины интервалов варьирования при реализации плана ДФЭ и шага при движении по градиенту.

Тем не менее, для условного «заказчика» критерий трудоемкости не несет особой ценности, поскольку, как правило, его в большей степени интересует результат, а не пути его достижения. Мы же в данной работе получаем два результата (два разных хим. состава), каждый из которых удовлетворяет заявленному требованию по средней прочности образцов. Следующие два критерия позволяют оценить пригодность каждого из них для использования в реальной производственной практике и на освновании этого выбрать лучший из двух вариантов.

2. Ширина зоны оптимума. В некоторых случаях на основании анализа пути, по которому мы пришли в конечную точку, можно сделать осторожные выводы о ширине зоны оптимальности. Так, при реализации симплекс-метода может получиться так, что точка с требуемым значением функции отклика была достигнута «внезапно», когда во всех точках, предшествующих итоговой, среднее значение функции отклика было далеко от оптимального. В этом случае можно предположить, что зона оптимума, по крайней мере с той стороны, откуда мы к ней подходили, обрывается достаточно резко.

Возможна и оборатная ситуация, когда перед получением точки с требуемым значением функции отклика, мы долго «топтались» вокруг нее, применив при этом несколько раз процедуру сужения сиплекса. В этом случае тоже можно говорить об узкой зоне оптимальности, причем уже без оговорки о направлении подхода. В каждом из этих случаев необходимо убедиться, что величина симплекса изначально не была выбрана слишком большой, потому что тогда полученные результаты будут следствием не малой ширины зоны оптимума, а необоснованно завышенных значений.

Наличие узкой зоны оптимальности в окресности итоговой точки снижает ценность полученного результата, поскольку небольшие отклонения от оптимального хим. состава, которые неизбежны в реальном производстве, будут приводить к получению сплава с пониженной прочностью, что в конечном итоге выльется в высокий процент брака. Гарантировать качество в этом случае можно только путем чрезвычайно точного дозирования компонентов сплава, что не всегда целесообразно.

3. Статистические показатели. К статистическим показателям, с помощью которых можно оценить «качество» полученных результатов, относятся среднее значение функции отклика по нескольким образцам и величина разброса значений, характеризуемая дисперсией.

Наиболее очевидным методом выбора из двух полученных оптимальных хим. составов является сравнение средних значений прочности, полученных при каждом из них: тот состав, при котором достигнуто большее среднее значение, и является наилучшим. Эти значения определяются еще на стадии оптимизации и служат главным критерием оптимальности соответствующих хим. составов:

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j , \qquad (12)$$

где m – число параллельных опытов.

Для оценки величины разброса вычисляют несмещенную дисперсию значений прочности для каждой конечной точки:

$$s^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(y_j - \overline{y}\right)^2 . \qquad (13)$$

При близости средних значений следует выбрать тот хим. состав, который обеспечивает меньший разброс значений, то есть меньшую дисперсию.

2 Практическая часть

2.1 Задание

Найти оптимальный состав чугуна СЧ 25 с помощью симплекс-метода и метода крутого восхождения, при условии что исходной точке соответствует чугун со следующим содержанием элементов:

- углерод: $C = 2{,}8$ %;
- кремний: $Si = 1{,}8$ %;
- марганец: $Mn = 0{,}6$ %.

Для удобства примем следующие обозначения:

- содержание углерода $C = x_1$ – фактор 1;
- содержание кремния $Si = x_2$ – фактор 2;
- содержание марганца $Mn = x_3$ – фактор 3;
- прочность образцов на растяжение $\sigma_B = y$ – функция отклика.

2.2 Оптимизация симплекс-методом

Прежде всего, выберем интервалы варьирования по каждому из факторов. При этом будем использовать регулярный симплекс:

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0{,}15$ %.

Для расчета кодовых переменных из табл. 1 необходимо вычислить радиусы R_0, R_1 и R_2 по формулам (3):

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{2\cdot(3+1)}} = 0{,}353553;$$

$$R_1 = \frac{(3-1)\cdot\sqrt{3+1}+1}{3\cdot\sqrt{2\cdot(3+1)}} = 0{,}589256;$$

$$R_2 = \frac{\sqrt{3+1}-1}{3\cdot\sqrt{2\cdot(3+1)}} = 0{,}117851.$$

На основании этого по табл. 1 определим координаты вершин регулярного симплекса в кодовых переменных и занесем их в табл. 2.

Таблица 2 – Кодовые координаты вершин регулярного симплекса в трехмерном пространстве

Номер вершины	Координаты		
	X_1	X_2	X_3
1	–0,353553	–0,353553	–0,353553
2	0,589256	–0,117851	–0,117851
3	–0,117851	0,589256	–0,117851
4	–0,117851	–0,117851	0,589256

На основании табл. 2 по формуле (2) рассчитаем координаты вершин начального симплекса в натуральном масштабе и занесем их в табл. 3. В каждой из полученных точек проводится эксперимент с 10 параллельными измерениями прочности, после чего среди четырех точек начального симплекса выбирается точка с наименьшей прочностью. В нашем случае это точка 3 – она отбрасывается и по формуле (4) рассчитываются координаты новой точки, в которой также проводится эксперимент. Среди оставшихся четырех точек опять выбирается «худшая» и вся процедура повторяется до тех пор, пока не будет получена точка с оптимальным значением.

План оптимизации симплекс-методом представлен в табл. 3. В предпоследней колонке показан порядок, в котором выбрасывались точки.

Таблица 3 – Ход оптимизации химического состава симплекс-методом

Номер точки	Координаты			σ_B, кгс/мм^2	Порядок выбывания	Примечания
	C, %	Si, %	Mn, %			
	Исходный симплекс					
1	2,747	1,747	0,547	21,213	2	
2	2,888	1,782	0,582	22,896	5	
3	2,782	1,888	0,582	20,150	1	
4	2,782	1,782	0,688	21,566	3	
	Движение к оптимуму					
5	2,829	1,653	0,629	22,404	4	
6	2,920	1,731	0,720	23,210	6	
7	2,976	1,662	0,599	23,663	8	
8	3,027	1,798	0,638	23,312	7	
9	3,146	1,626	0,793	24,443	11	Расширение (γ = 2)
10	3,179	1,659	0,634	24,058	9	
11	3,174	1,500	0,712	24,767		
12	3,357	1,529	0,826	24,681		
13	3,272	1,444	0,921	23,807	10	Сжатие (β = –0,5)
14	3,249	1,498	0,849	24,915		По 30 опытам
15	3,374	1,392	0,799	24,592		
15′	3,203	1,568	0,794	25,219		По 30 опытам

После проведения эксперимента в 8-й точке видно, что движение к оптимуму идет весьма медленно, что связано с тем, что точки исходного симплекса находились достаточно далеко от зоны оптимума, а также, вероятно, с тем, что был выбран слишком маленький интервал варьирования. Поэтому было решено расширить симплекс (с коэффициентом γ = 2) и рассчитывать координаты 9-й точки по формуле (6).

Отражение, при котором были получены координаты 13-й точки, признано неудачным, поскольку значение прочности в этой точке хуже, чем в 10-й точке, которая в этом расчете была «худшей». В этом случае расчет координат следующей точки по формуле (4) не даст нового результата. Значения прочности в других точках довольно далеки от значения в 10-й точке, поэтому представляется нецелесообразным брать в качестве «худшей» одну из них. Применение расширения также нецелесообразно, поскольку мы находимся близко к оптимуму. Поэтому было решено координаты 14-й точки рассчитывать по формуле (5) со сжатием симплекса (β = –0,5), приняв точку 13 в качестве «худшей».

В результате в точке 14 получилось требуемое значение средней прочности: 25,045 кгс/мм^2 (рис. 1), однако такое превышение слишком небольшое. Поэтому необходимо проверить этот результат на большем числе опытов. С этой целью в точке с теми же координатами было проведено дополнительно 20 опытов (рис. 2). Средняя прочность по результатам всех 30 опытов в точке 14 оказалась меньше необходимой (см. табл. 3), так что данная точка не может быть признана оптимальной.

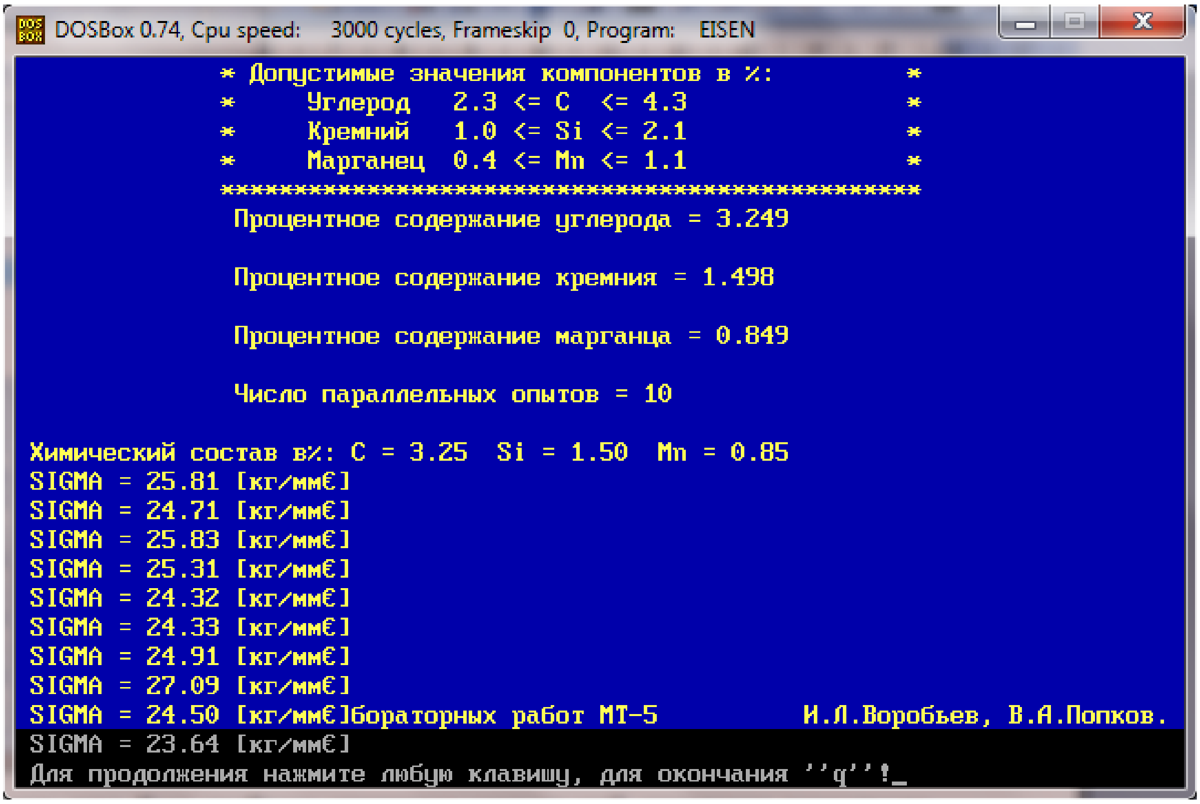

Рис. 1 – Результаты первого эксперимента в точке 14

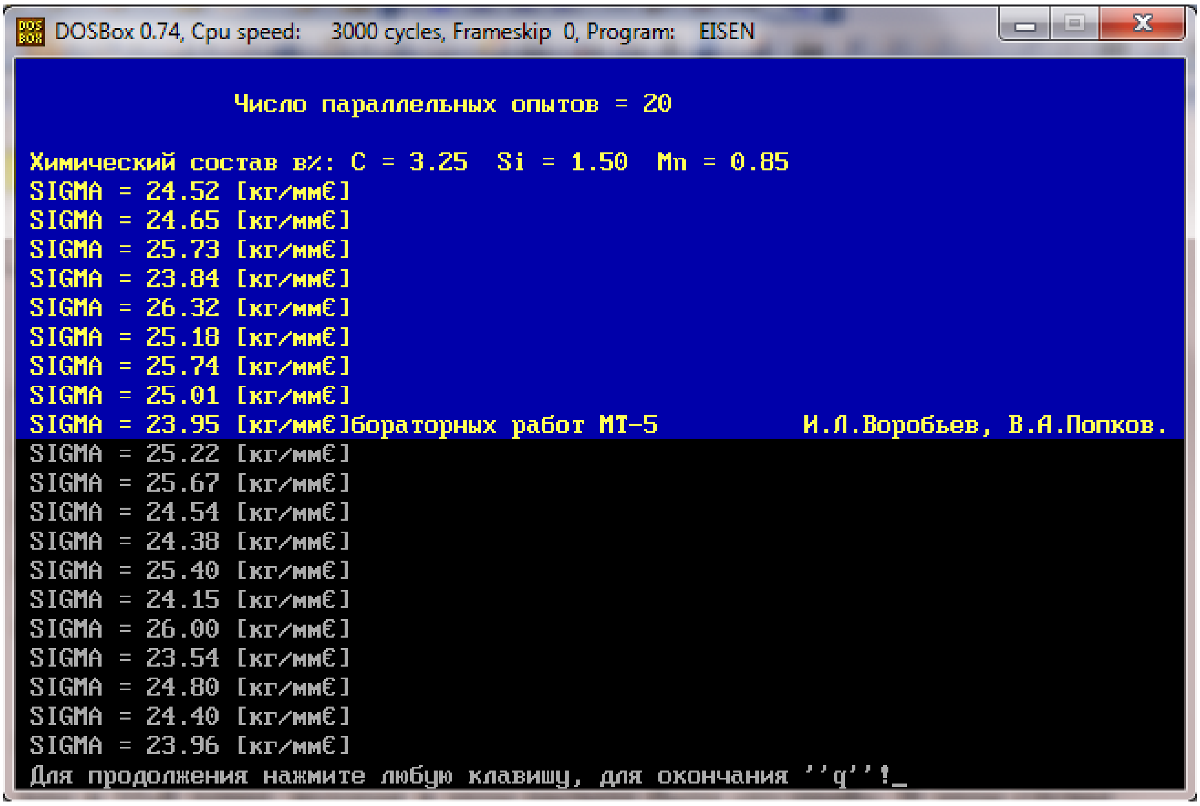

Рис. 2 – Результаты второго эксперимента в точке 14

Новая 15-я точка, координаты которой были рассчитаны по формуле (4), снова оказалась «худшей». Вероятно, это является следствием того, что симплекс слишком широкий, а так же с тем, что в точке 14 мы уже достаточно близко подошли к зоне оптимума. Поэтому будет разумно пересчитать координаты точки 15, но уже по формуле (5), со сжатием симплекса (β = –0,5). Полученную точку обозначим номером 15′, поскольку ее координаты рассчитаны по тем же точкам, что и для точки 15.

Эксперимент в точке 15′ дал среднюю прочность 25,146 кг/мм^2 (рис. 3). Для проверки с тем же составом чугуна проведено еще 20 опытов (рис. 4). Средняя прочность по результатам 30 опытов значительно превышает минимально необходимое значение (см. табл. 3).

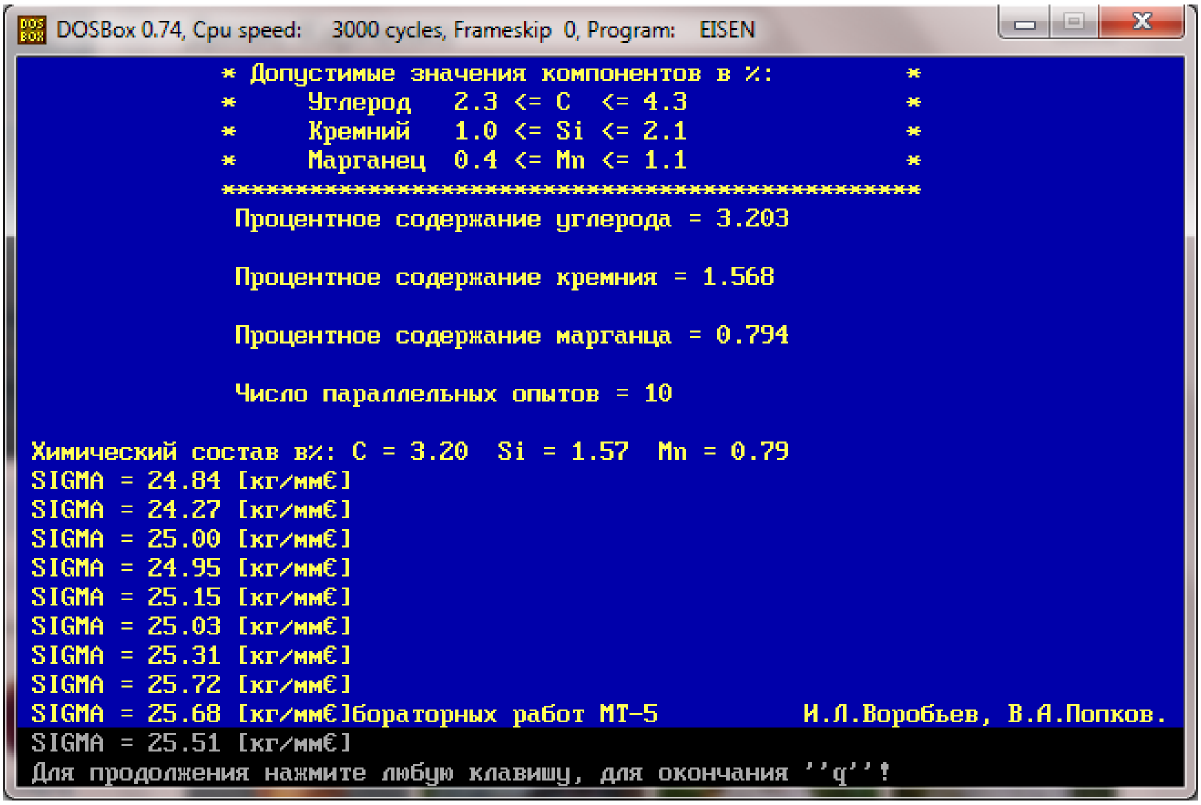

Рис. 3 – Результаты первого эксперимента в точке 15′

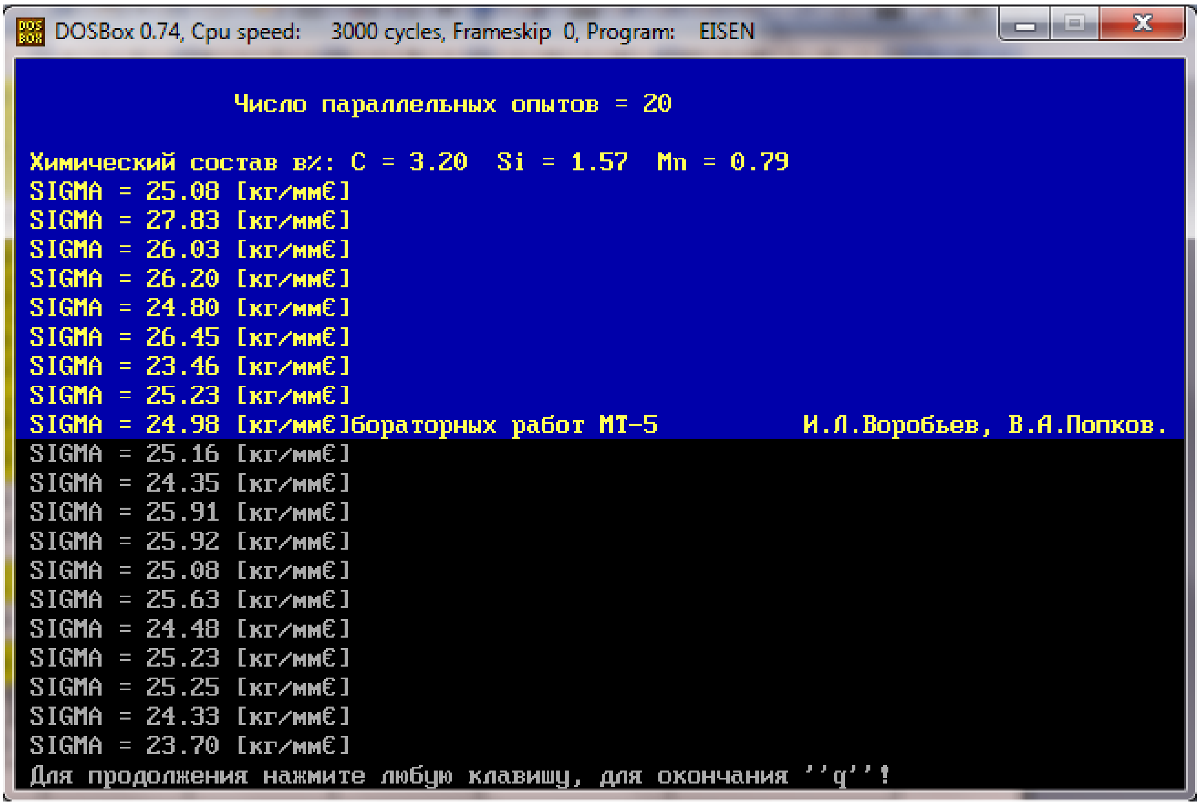

Рис. 4 – Результаты второго эксперимента в точке 15′

Определим по формуле (13) дисперсию прочности по результатам всех 30 опытов в итоговой точке:

$$s_1^2 = \frac{1}{30-1} \cdot \left(\left(24,84 - 25,219 \right)^2 + \ldots + \left(23,7 - 25,219 \right)^2 \right) = 0,711.$$

Таким образом, результатом оптимизации симплекс-методом является следующий состав чугуна:

- C = 3,203 %;
- Si = 1,568 %;
- Mn = 0,794 %,

дающий среднюю прочность σ_{B1} = 25,219 кгс/мм^2 с дисперсией, равной 0,711 (кгс/мм^2)^2.

2.3 Оптимизация методом крутого восхождения

Прежде всего, необходимо построить вокруг исходной точки план ДФЭ для определения компонентов градиента. Поэтому необходимо задаться интервалами варьирования по каждой из переменной. Примем следующие значения:

- Δx_1 = 0,2 %;
- Δx_2 = 0,1 %;
- Δx_3 = 0,1 %.

План и результаты ДФЭ представлены в табл. 4. В каждой точке плана проводилось по 10 опытов.

Рассчитаем значения коэффициентов по формулам (9):

$$b_0 = \frac{1}{4} \cdot \left(21,425 + 22,847 + 19,22 + 21,121 \right) = 21,1533;$$

$$b_1 = \frac{1}{4} \cdot \left(21,425 + 22,847 - 19,22 - 21,121 \right) = 0,98275;$$

$$b_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(21,425 - 22,847 + 19,22 - 21,121 \right) = -0,83075;$$

$$b_3 = \frac{1}{4} \cdot \left(21,425 - 22,847 - 19,22 + 21,121 \right) = 0,11975.$$

Таблица 4 – Ход оптимизации методом крутого восхождения

<table>
<tr><td colspan="6">План ДФЭ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Характеристики плана</td><td colspan="3">Координаты</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Примечания</td></tr>
<tr><td>x_1, %</td><td>x_2, %</td><td>x_3, %</td></tr>
<tr><td>x_i^o</td><td>2,8</td><td>1,8</td><td>0,6</td><td rowspan="4"></td><td></td></tr>
<tr><td>Δx_i</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td></td></tr>
<tr><td>$\underline{x}_i$</td><td>2,7</td><td>1,7</td><td>0,5</td><td></td></tr>
<tr><td>$\overline{x}_i$</td><td>2,9</td><td>1,9</td><td>0,7</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Номер опыта ДФЭ</td><td colspan="3">Кодированные значения</td><td rowspan="2">y: σ_B, кгс/мм^2</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>X_1</td><td>X_2</td><td>X_3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>+1</td><td>+1</td><td>+1</td><td>21,425</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>+1</td><td>–1</td><td>–1</td><td>22,847</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>–1</td><td>+1</td><td>–1</td><td>19,220</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>–1</td><td>–1</td><td>+1</td><td>21,121</td><td></td></tr>
<tr><td>b_i</td><td>0,98275</td><td>–0,83075</td><td>0,11975</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Крутое восхождение</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Условия движения</td><td colspan="3">Факторы</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td></tr>
<tr><td>$b_i \cdot \Delta x_i$</td><td>0,196550</td><td>–0,083075</td><td>0,011975</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>δ_i, %</td><td>0,1500</td><td>–0,0634</td><td>0,0091</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Номер шага</td><td colspan="3">Значения переменных</td><td rowspan="2">σ_B, кгс/мм^2</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>C, %</td><td>Si, %</td><td>Mn, %</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2,950</td><td>1,737</td><td>0,609</td><td>23,476</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>3,100</td><td>1,673</td><td>0,618</td><td>24,642</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>3,250</td><td>1,610</td><td>0,627</td><td>25,039</td><td>По 30 опытам</td></tr>
</table>

Для реализации крутого восхождения по градиенту, определим базовую переменную:

$$b_1 \cdot \Delta x_1 = 0,98275 \cdot 0,2 = 0,19655;$$

$$b_2 \cdot \Delta x_2 = -0,83075 \cdot 0,1 = -0,083075;$$

$$b_3 \cdot \Delta x_3 = 0,11975 \cdot 0,1 = 0,011975.$$

Видно, что произведение $b_1 \cdot \Delta x_1$ максимально по абсолютной величине, следовательно, переменная x_1 будет базовой при реализации крутого восхождения. Выберем для нее шаг δ_1 = 0,15 %. Такой выбор шага обоснован значением основного уровня (2,8 %) и верхней границей (4,3 %) по углероду: предполагается, что число опытов крутого восхождения не превысит 10.

Рассчитаем по формулам (11) и (10) шаги по двум другим переменным:

$$\lambda = \frac{0,19655}{0,15} = 1,31033;$$

$$\delta_2 = \frac{-0,083075}{1,31033} = -0,0633999;$$

$$\delta_3 = \frac{0,011975}{1,31033} = 0,0091389.$$

Результаты вычислений занесены в табл. 4.

Для расчета координат точек крутого восхождения к координатам исходной точки последовательно прибавляется по одному шагу. Результаты расчетов координат представлены в табл. 4.

Реализацию крутого восхождения начинаем уже с точки 1, поскольку в ней значения по углероду выходят за границы области ДФЭ. В каждой точке проводили по 10 параллельных опытов.

Уже в точке 3 было получено среднее значение прочности 25,04 кгс/мм^2 (рис. 5). Однако это весьма слабое превышение над минимально необходимым значением. Поэтому были проведены дополнительные 20 опытов для подтверждения полученного результата. Средняя прочность по 30 опытам составила 25,039 кгс/мм^2 (рис. 6), что является приемлемым результатом.

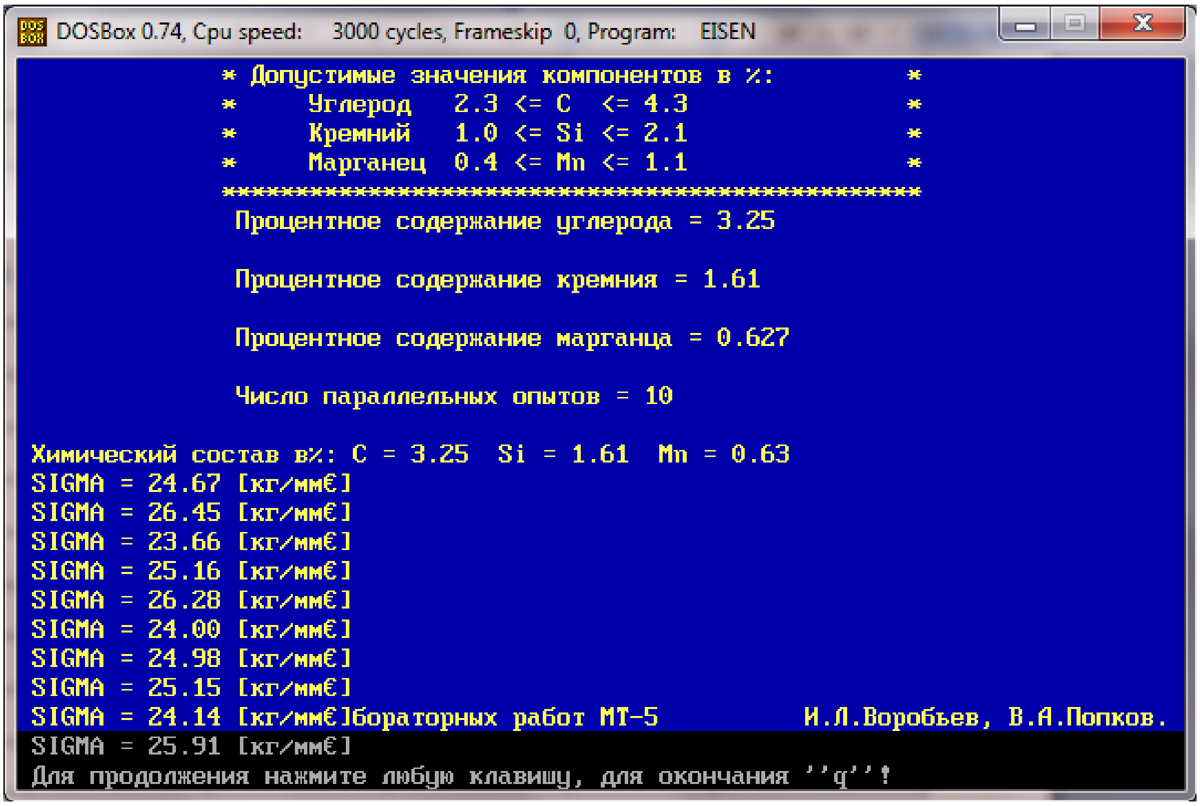

Рис. 5 – Результат первого эксперимента в точке 3

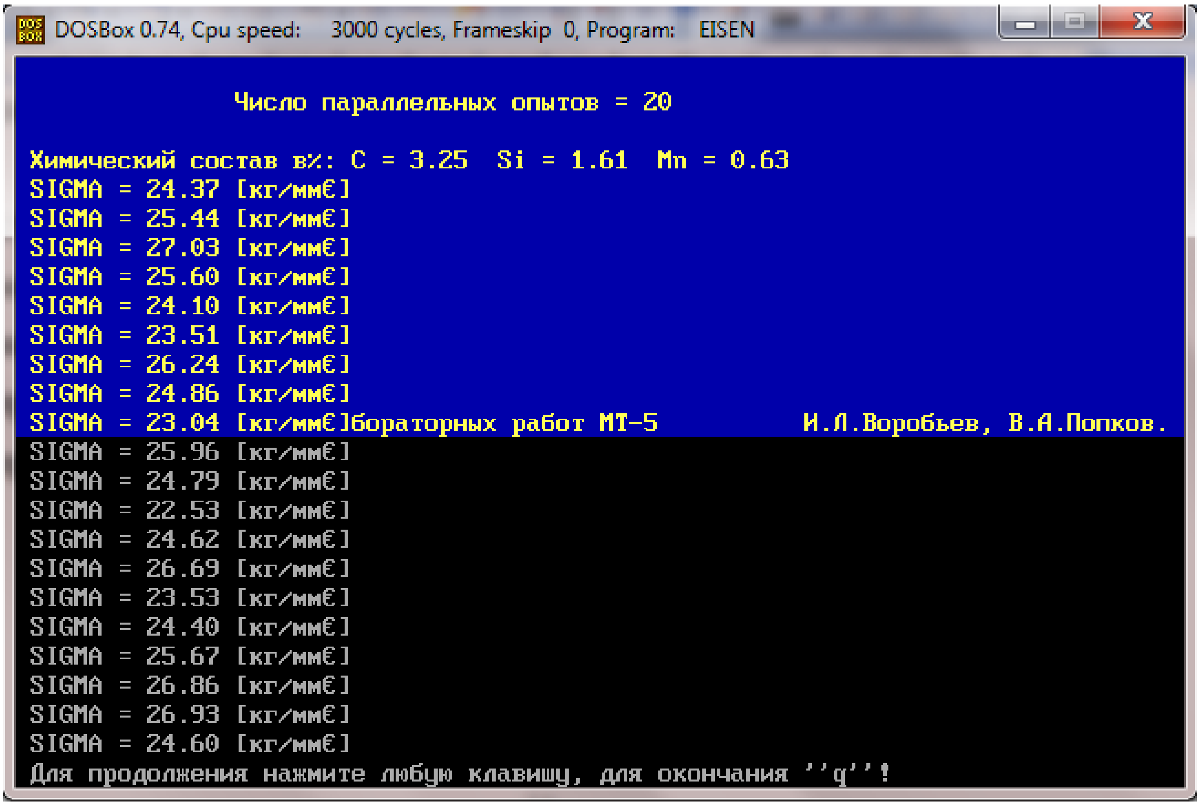

Рис. 6 – Результат второго эксперимента в точке 3

Рассчитаем по формуле (13) дисперсию прочности в точке 3 по всем 30 опытам:

$$s_2^2 = \frac{1}{30-1} \cdot \left(\left(24,67 - 25,039 \right)^2 + \ldots + \left(24,6 - 25,039 \right)^2 \right) = 1,452 .$$

Таким образом, результатом оптимизации методом крутого восхождения является следующий состав чугуна:

- C = 3,250 %;
- Si = 1,610 %;
- Mn = 0,627 %,

дающий среднюю прочность σ_{B2} = 25,039 кгс/мм^2 с дисперсией, равной 1,452 (кгс/мм^2)^2.

3 Выводы

1. Трудоемкость симплекс-метода в данном случае оказалась значительно выше, чем метода крутого восхождения: в первом случае потребовалось проведение 16 экспериментов основной серии и 2 проверочных, в то время как второй метод потребовал всего 7 основных экспериментов (включая опыты ДФЭ) и 1 проверочный. Это можно объяснить не вполне удачным выбором размеров начального симплекса и необходимостью их корректировки по ходу движения. Шаг движения по градиенту, напротив, был выбран удачно, что позволило значительно быстрее получить требуемый результат.

2. Если сравнить координаты обеих оптимальных точек, можно заметить, что эти точки достаточно близки в факторном пространстве. Это может свидетельствовать о наличии значительной зоны в этом районе факторного пространства, где могут находиться точки со значениями функции отклика, близкими к оптимальным. Косвенным показателем этого также является то, что при реализации обоих методов при подходе к оптимальной точке наблюдались весьма высокие значения прочности (см. табл. 3 и 4). На основании этого можно рекомендовать дополнительные исследования функции отклика в этой области с целью выявления ширины зоны оптимума.

3. Сравнивая статистические характеристики полученных результатов, можно заметить, что химический состав, полученный методом крутого восхождения, дает в среднем меньшую прочность, чем оптимальный состав, полученный симплекс-методом. Разница почти в 0,2 кгс/мм^2 является весьма существенной, что заставляет предпочесть состав, полученный симплекс-методом. Дополнительным свидетельством в пользу этого состава является дисперсия, которая является мерой разброса значений прочности: для него она почти в 2 раза меньше. Понятно, что химический

состав, который дает большую среднюю прочности при меньшем разбросе позволит обеспечить существенно больший выход годного. Таким образом, для практического использования рекомендует состав, полученный симплекс-методом:

- $C = 3{,}203$ %;
- $Si = 1{,}568$ %;
- $Mn = 0{,}794$ %.