



*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования*

«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

Проектирование элементов колесных машин из композиционных материалов

Лекция 4 «Основы механики композитов»

Составил доцент кафедры «Колесные машины», к.т.н.

Карташов Александр Борисович



4.1 Особенности применения ПКМ в колесных машинах

При использовании новых конструкционных материалов в узлах и агрегатах колесных машин, свойства которых значительно отличаются от свойств традиционных конструкционных материалов, необходим иной подход ко многим вопросам проектирования изделий:

- 1) выбору силовой схемы изделия;
- 2) конфигурированию (оформлению и составлению) сборочных единиц;
- 3) определению толщины стенок корпусных деталей;
- 4) соединению деталей и т. д.

Рассмотрим основные особенности механических свойств конструкционных ПКМ.



Структурные особенности композитов

Рассмотрим типовые структуры композитов, образованные в результате совмещения описанных выше армирующих элементов и матриц. К таким структурам условно можно отнести:

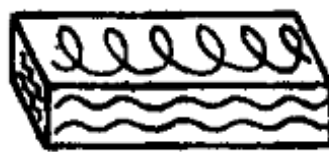
- 1) ориентированные материалы, армированные прямолинейными волокнами (а);
- 2) композиты, армированные тканями (б);
- 3) материалы, хаотически армированные непрерывными волокнами (в);
- 4) материалы, хаотически армированные дискретными волокнами (г);
- 5) пространственно армированные системы (д).



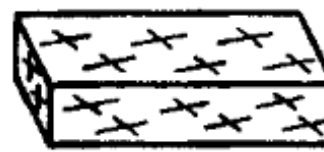
а)



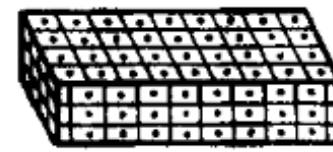
б)



в)



г)



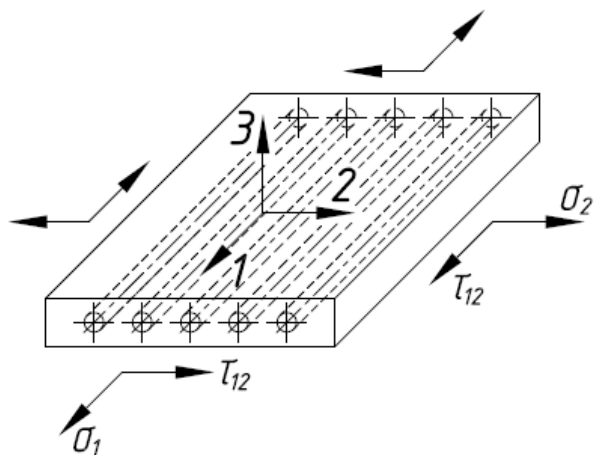
д)



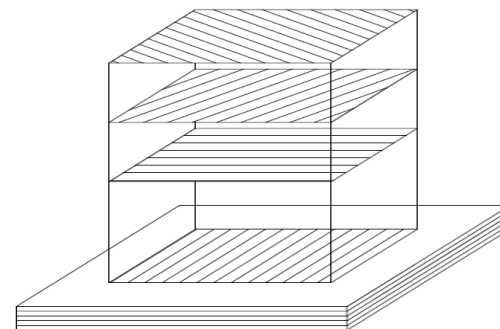
Уровни неоднородности композитов

Композиции обладают двумя уровнями неоднородности:

1) микroneоднородность – уровень, связанный с наличием двух фаз (волокон и матрицы);



2) макroneоднородность – уровень, связанный с наличием в материале различным образом ориентированных микroneоднородных слоев.



При расчете и проектировании конструкций обычно учитывают только второй уровень неоднородности материала, т. е. считается, что он состоит из совокупности квазиоднородных слоев, свойства которых известны.



4.2 Микромоделли композитов

Анализ зависимости свойств микрослоев композита от характеристик исходных компонентов и их содержания в композиции является предметом микромеханики композитов, основная задача которой заключается в определении эффективных модулей упругости, т. е. коэффициентов, связывающих усредненные по объему напряжения и деформации.

К настоящему времени разработано большое число микромоделей композитов, армированных прямолинейными волокнами, которые можно разделить на 5 групп.



Микромодели композитов (2)

1) модели, учитывающие только упругие свойства и объемные содержания компонентов;

В этой группе микромоделей для случая длинных нитей справедливо соотношение под названием «Формула смеси»:

$$E_2 = E_H V_H + E_C V_C,$$

где E_H и E_C – модули упругости нитей и связующего; V_H и V_C – соответственно их объемные доли в композите. Если наполнитель состоит из коротких нитевидных кристаллов, формула дает завышенные значения E_2 . Возникает также погрешность вследствие различия коэффициентов Пуассона для нитей и матрицы, но она незначительна. Формулы для определения других упругих констант композита существенно сложнее только что приведенной, но не настолько, чтобы это серьезно затрудняло вычисления.

Для скалярных величин, таких как плотность, применяется простая формула

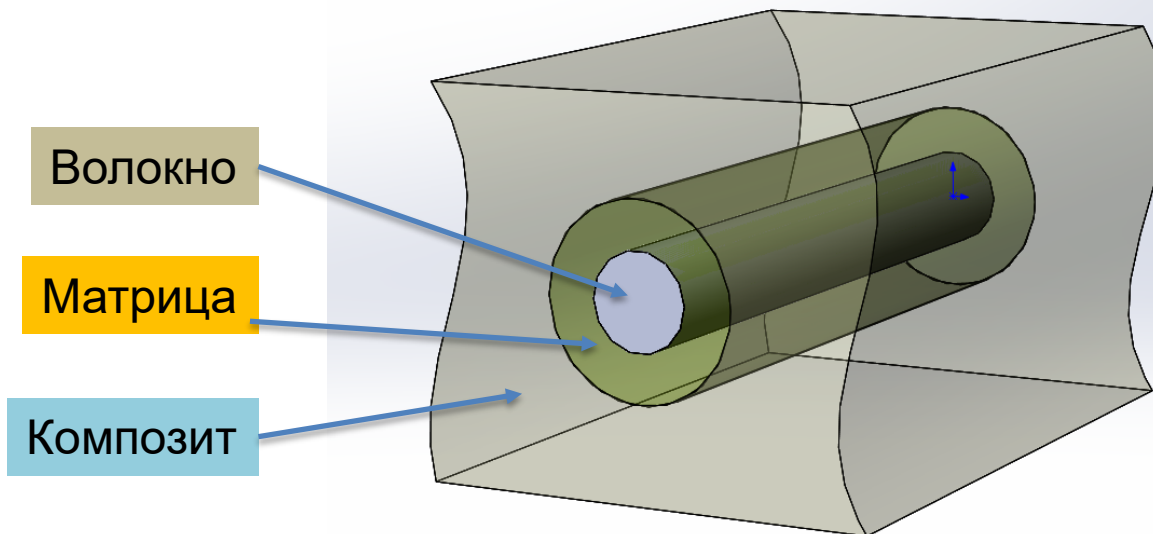
$$\rho = \sum_{k=1}^n \rho_k V_k, \quad (3.1)$$

где ρ_k – плотность k -ой фазы; V_k – относительное объемное содержание k -ой фазы, равное отношению объема, занятого данной фазой, к объему всего материала; n – число фаз.



Микромодели композитов (3)

2) самосопряженные модели, где композит представляется в виде одного волокна, окруженного бесконечной средой, которая обладает свойствами композита, вариант этой модели представляет собой три concentric cylinders, причем внутренний цилиндр имеет свойства волокна, средний - матрицы, наружный - композита.

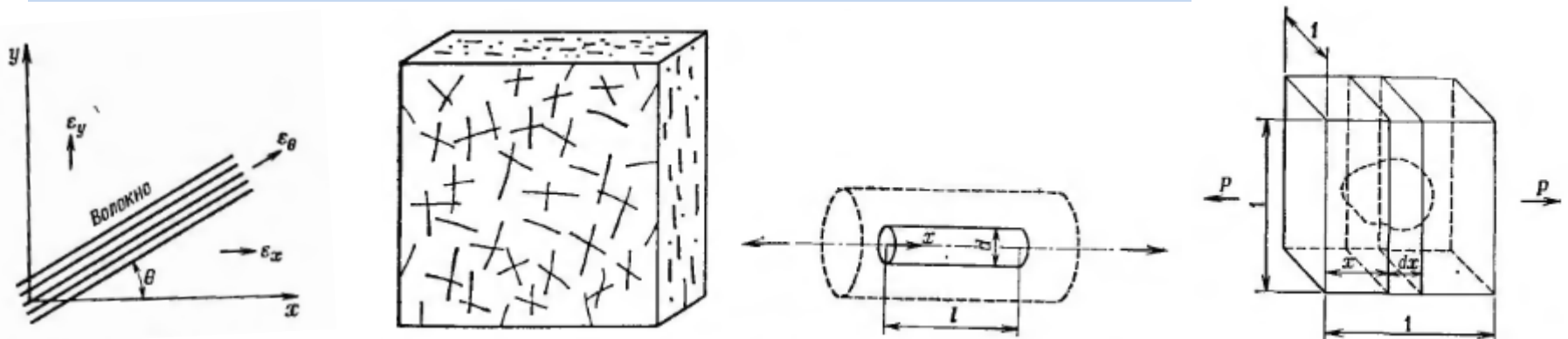




Микромодели композитов (4)

3) модели, учитывающие форму и предполагающие регулярное расположение волокон, модели такого рода исследуются различными методами, основанными на:

- упрощенных предположениях о напряженном состоянии матрицы;
- точных решениях плоской задачи теории упругости для изотропного пространства (матрицы) с периодической системой включений (волокон);
- приближенных или численных решениях задачи теории упругости для повторяющегося элемента структуры, содержащего одно или несколько волокон;
- анализе напряженного состояния матрицы методами фото-упругости.





Микромодели композитов (5)

4) энергетические модели, основанные на аппроксимации распределения напряжений и перемещений матрицы и использовании вариационных принципов, позволяющих получить верхнюю и нижнюю границу для эффективных упругих постоянных;

Принцип Лагранжа

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV = A^e(\vec{v}) + A_{\Sigma_i}(\vec{v}),$$

Принцип Кастильяно

$$\int_V \varepsilon_{ij} \tau_{ij} dV = A_{\Sigma_i}(\underline{\tau}, \vec{u}^0).$$

Новый вариационный принцип

$$\int_V (E_{ijk,k} + Y_{ij}) \delta \sigma_{ij} dV = A \int_{\Sigma} (\sigma_{ij,i} + X_i) \delta \sigma_{ik,k} d\Sigma + \\ + B \int_{\Sigma} (\sigma_{ij} n_j - S_i^0) \delta \sigma_{ik} n_k d\Sigma.$$

Принцип Хашина - Штрикмана

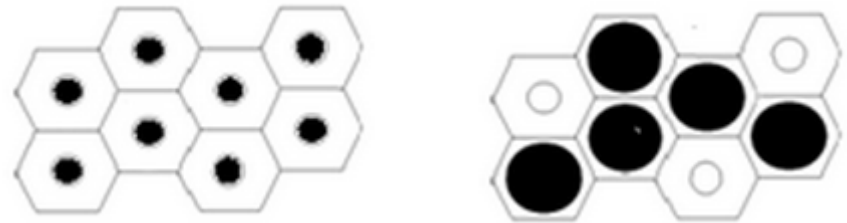
$$\text{Div } \underline{\underline{\sigma}}(\vec{u}, \vec{x}) = 0, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathcal{F}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \vec{x}),$$



Микромодели композитов (6)

5) статистические модели, основанные на предположении о случайном распределении волокон и решении задач теории упругости микroneоднородных сред, структура которых описывается корреляционными функциями различного порядка.

$$k_{11}(\rho) = \frac{1}{D_{11}} \langle i'_1(\mathbf{r}) i'_1(\mathbf{r}_1) \rangle$$



$$k_{11}(\rho) \approx p k_{11}^p(\rho) + (1-p) k_{11}^{sc}(\rho)$$





Микромодели, описывающие тканые КОМПОЗИТЫ

Особенности моделей, описывающие композиты, армированные тканями:

- 1) в этих моделях дополнительно учитывают искривления волокон, связанные с переплетением нитей основы и утка ткани;
- 2) в этих моделях для анализа хаотически армированных материалов осуществляют их осреднение по углу ориентации волокон;
- 3) пространственноармированные композиты рассматривают как совокупность ортогональных и взаимно проникающих слоев из прямолинейных или искривленных волокон.



Выводы по микромоделям композитов

1. Соотношения микромеханики основаны на некоторых априорных предположениях о структуре композита, т. е. на идеализированных моделях, приближенно отражающих реальную структуру материала и часто не учитывающих не поддающиеся формальному описанию особенности материала, связанные с реализуемыми в конкретных условиях параметрами технологического процесса.

2. Соотношения микромеханики в основном предназначены для ориентировочных оценок и качественного анализа влияния микроструктурных параметров на свойства композитов, необходимых для решения задач материаловедения, связанных с модификацией свойств и разработкой новых материалов.



Выводы по микромоделям композитов (2)

3. Для задач расчета элементов колесных машин из композитных материалов более подходящим представляется экспериментальный подход, согласно которому упругие постоянные и пределы прочности композита с типовой структурой определяют при соответствующих испытаниях плоских, кольцевых или трубчатых образцов, изготовленных тем же технологическим методом, что и рассматриваемая конструкция. В этом случае получаемые экспериментально характеристики позволяют учесть все особенности изготовления материала: качество пропитки; натяжение ленты; давление прессования и т. д.



Закон Гука для изотропного материала

Для тонкого растяжимого стержня закон Гука имеет вид:

$$F = k\Delta l.$$

Здесь F — сила, которой растягивают (сжимают) стержень, Δl — абсолютное удлинение (сжатие) стержня, а k — *коэффициент упругости* (или жёсткости).

Коэффициент упругости зависит как от свойств материала, так и от размеров стержня.

Можно выделить зависимость от размеров стержня (площади поперечного сечения S и длины L) явно, записав коэффициент упругости как

$$k = \frac{ES}{L}.$$



Закон Гука для изотропного материала

Величина E называется *модулем упругости первого рода или модулем Юнга* и является механической характеристикой материала.

Если ввести относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{L}$$

и нормальное напряжение в поперечном сечении

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

то закон Гука для относительных величин запишется как

$$\sigma = E\varepsilon .$$

В такой форме он справедлив для любых малых объёмов материала.

Также при расчёте прямых стержней применяют запись закона Гука в относительной форме

$$\Delta l = \frac{FL}{ES}.$$



Обобщенный закон Гука

Для линейно упругого изотропного тела:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_z$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_z$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_y$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ — модуль

сдвига.



Модуль упругости

Модуль упругости — общее название нескольких **физических величин**, характеризующих способность **твёрдого тела** (материала, вещества) **упруго деформироваться** (то есть не постоянно) при приложении к нему **силы**. В области упругой деформации модуль упругости тела в общем случае зависит от напряжения и определяется **производной** (градиентом) зависимости напряжения от деформации, то есть тангенсом угла наклона **диаграммы напряжений-деформаций**:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

где:

- E — модуль упругости;
- σ — **напряжение**, вызываемое в образце действующей силой (равно силе, делённой на площадь приложения силы);
- ε — **упругая деформация** образца, вызванная напряжением (равна отношению изменения размера образца после деформации к его первоначальному размеру).

В наиболее распространенном случае зависимость напряжения и деформации линейная (закон Гука):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$



Гомогенные материалы

Гомогенные и изотропные материалы (твердые), обладающие линейными упругими свойствами, полностью описываются двумя модулями упругости, представляющими собой пару любых модулей. Если дана пара модулей упругости, все другие модули могут быть получены по формулам, представленным в таблице ниже.

В невязких течениях не существует сдвигового напряжения, поэтому сдвиговый модуль всегда равен нулю. Это влечёт также и равенство нулю модуля Юнга.

Модули упругости (E) для некоторых веществ:

Материал	E, МПа	E, кгс/см ²
Алюминий	70000	713 800
Вода	2030	20300
Дерево	10000	102 000
Кость	30000	305 900
Медь	100000	1 020 000
Резина	5	50
Сталь	200000	2 039 000
Стекло	70000	713 800



Гомогенные материалы

Формулы преобразования

[скрыть]

Упругие свойства гомогенных изотропных линейно-упругих материалов uniquely определяются любыми двумя модулями упругости. Таким образом, имея два модуля, остальные можно вычислить по следующим формулам:

	(λ, G)	(E, G)	(K, λ)	(K, G)	(λ, ν)	(G, ν)	(E, ν)	(K, ν)	(K, E)
$K =$	$\lambda + \frac{2G}{3}$	$\frac{EG}{3(3G - E)}$			$\lambda \frac{1 + \nu}{3\nu}$	$\frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$		
$E =$	$G \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G}$		$9K \frac{K - \lambda}{3K - \lambda}$	$\frac{9KG}{3K + G}$	$\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$	$2G(1 + \nu)$		$3K(1 - 2\nu)$	
$\lambda =$		$G \frac{E - 2G}{3G - E}$		$K - \frac{2G}{3}$		$\frac{2G\nu}{1 - 2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{3K\nu}{1 + \nu}$	$\frac{3K(3K - E)}{9K - E}$
$G =$			$3 \frac{K - \lambda}{2}$		$\lambda \frac{1 - 2\nu}{2\nu}$		$\frac{E}{2 + 2\nu}$	$3K \frac{1 - 2\nu}{2 + 2\nu}$	$\frac{3KE}{9K - E}$
$\nu =$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$	$\frac{E}{2G} - 1$	$\frac{\lambda}{3K - \lambda}$	$\frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$					$\frac{3K - E}{6K}$
$M =$	$\lambda + 2G$	$G \frac{4G - E}{3G - E}$	$3K - 2\lambda$	$K + \frac{4G}{3}$	$\lambda \frac{1 - \nu}{\nu}$	$G \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}$	$E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$3K \frac{1 - \nu}{1 + \nu}$	$3K \frac{3K + E}{9K - E}$



Диаграмма растяжения

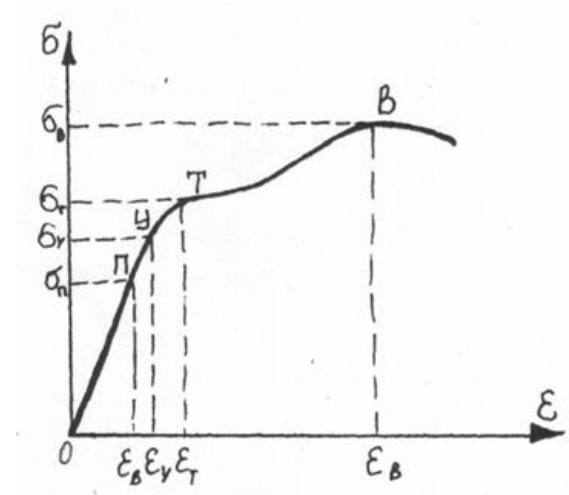
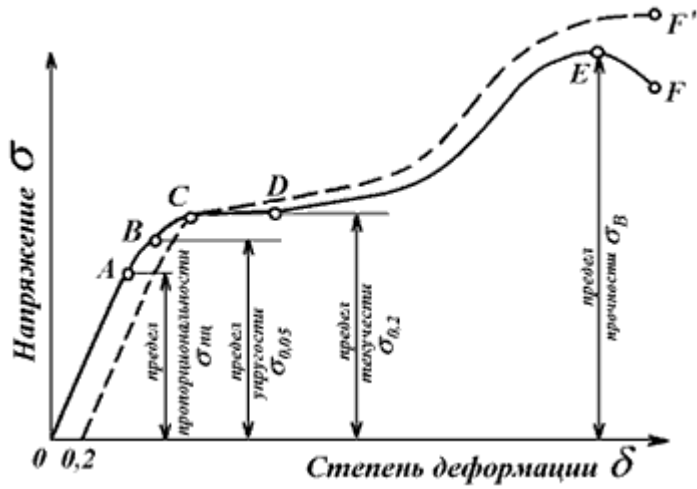




Диаграмма растяжения

F - продольная растягивающая сила, [Н];

Δl - абсолютное удлинение рабочей части образца, [мм]

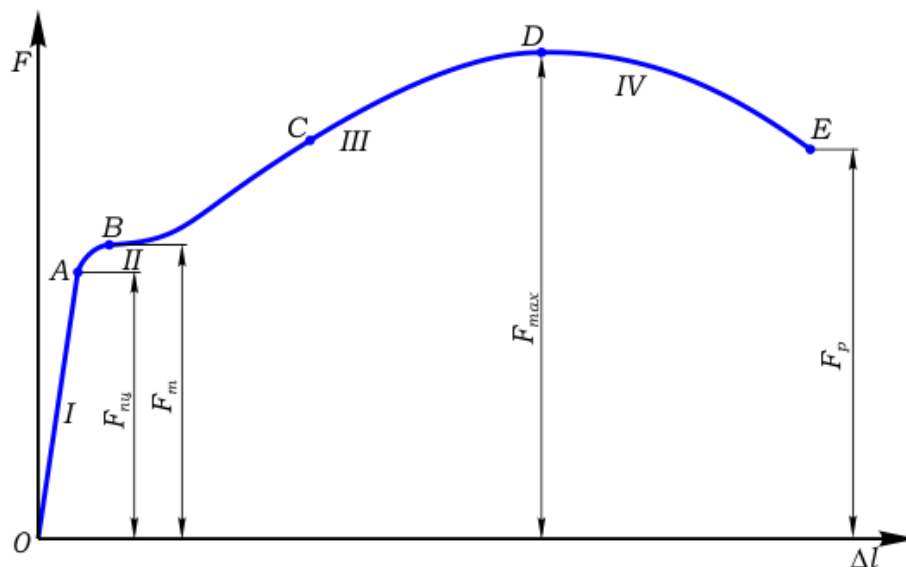


Рис. 1 Диаграмма растяжения стального образца

Как видно из рисунка, диаграмма имеет четыре характерных участка:

I - участок пропорциональности;

II - участок текучести;

III - участок самоупрочнения;

IV - участок разрушения.



Диаграмма растяжения

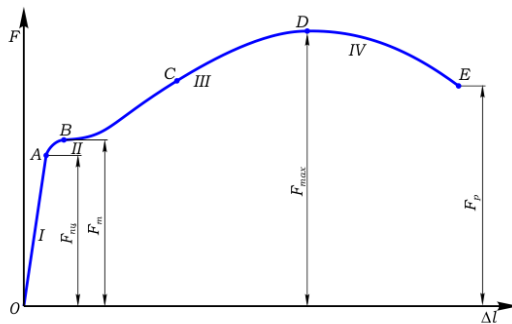


Рис. 1 Диаграмма растяжения стального образца

На участке *I* до точки *A* диаграмма вычерчивается в виде прямой линии. Это говорит о том, что на данном отрезке диаграммы, деформации стержня Δl растут пропорционально увеличивающейся нагрузке F .

После прохождения точки *A* диаграмма резко меняет свое направление и на участке *II* начинающемся в точке *B* линия какое-то время идет практически параллельно оси Δl , то есть деформации стержня увеличиваются при практически одном и том же значении нагрузки.

В этот момент в металле образца начинают происходить необратимые изменения. Перестраивается кристаллическая решетка металла. При этом наблюдается эффект его самоупрочнения.

После повышения [прочности](#) материала образца, диаграмма снова "идет вверх" (участок *III*) и в точке *D* растягивающее усилие достигает максимального значения. В этот момент в рабочей части испытуемого образца появляется локальное утоньшение (рис. 2), так называемая "шейка", вызванное нарушениями структуры материала (образованием пустот, микротрещин и т.д.).





Растяжение образца



Рис. 2 Стальной образец с "шейкой"

Вследствие утоньшения, и следовательно, уменьшения площади поперечного сечения образца, растягивающее усилие необходимое для его растяжения уменьшается, и кривая диаграммы "идет вниз".

В точке E происходит разрыв образца. Разрывается образец конечно же в сечении, где была образована "шейка"

Работа затраченная на разрыв образца W равна площади фигуры образованной диаграммой. Ее приближенно можно вычислить по формуле:

$$W = 0,8 F_{max} \cdot \Delta l_{max}$$

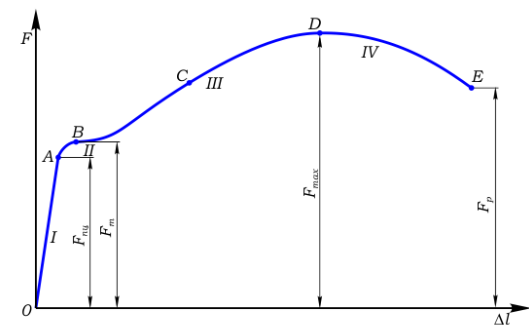
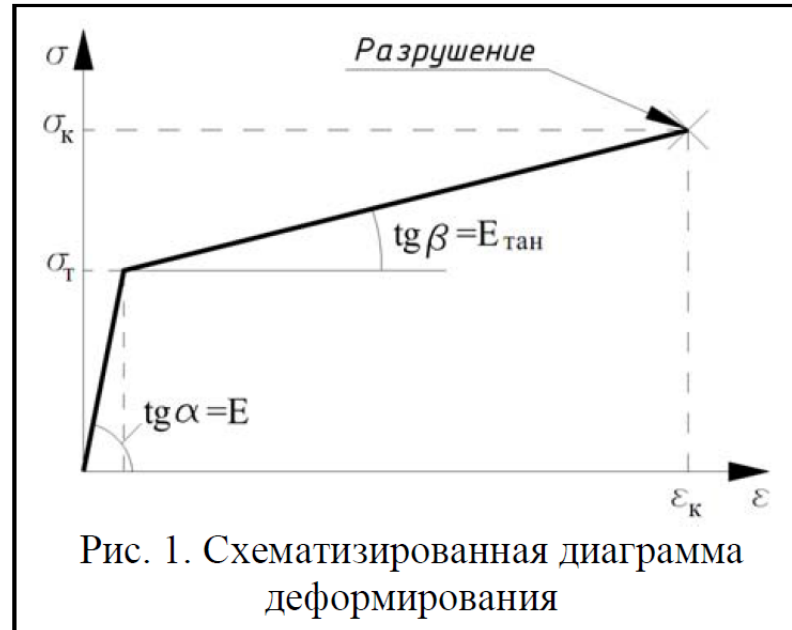


Рис. 1 Диаграмма растяжения стального образца



Модель с билинейным упрочнением



Пример характеристик углеродистой стали

mp, ex, 1, 2e11

! модуль Юнга

mp, dens, 1, 7800

! плотность

tb, bkin, 1

! модель с билинейным упрочнением

tbdatt, 1, 252e6

! предел текучести

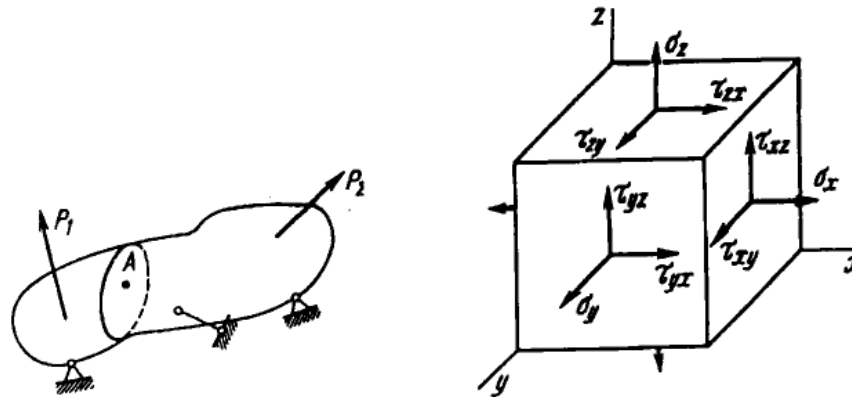
tbdatt, 2, 104e7

! касательный модуль упругости



Основы теории напряженного и деформированного состояния

Положим, имеется некоторое тело (не обязательно упругое), нагруженное произвольной системой сил. При переходе от точки к точке напряженное состояние меняется достаточно медленно и всегда имеется возможность выбрать в окрестности произвольно взятой точки A такую достаточно малую область, для которой напряженное состояние можно было бы рассматривать как однородное. Понятно, что такой подход возможен только в пределах принятой гипотезы сплошной среды, допускающей переход к предельно малым объемам.



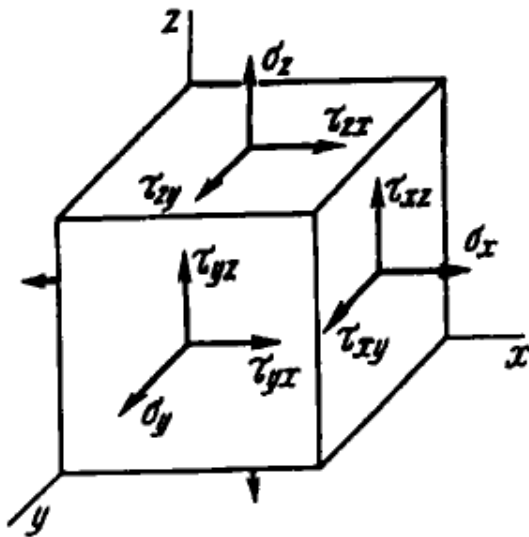
Чтобы охарактеризовать напряженное состояние в точке A , представим себе, что через нее проведены три секущие площадки и установлены возникающие в них напряжения. Затем в окрестности исследуемой точки шестью сечениями выделим элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда. Если размеры параллелепипеда уменьшать, он будет стягиваться в эту точку. В пределе все грани параллелепипеда пройдут через точку A , и напряжения в соответствующих секущих плоскостях можно рассматривать как напряжения в исследуемой точке.



Основы теории напряженного и деформированного состояния

Полное напряжение, возникающее на секущей площадке, может быть разложено на три составляющие:

- одну по нормали к площадке;
- две в плоскости сечения.



Нормальное напряжение будем обозначать по-прежнему буквой σ с индексом, соответствующим осям x , y и z . Касательное напряжение обозначим буквой τ с двумя индексами: первый соответствует оси, перпендикулярной к площадке, а второй оси, вдоль которой направлен вектор τ . Ориентация самих осей является произвольной.

Нормальные растягивающие напряжения σ будем считать положительными, сжимающие - отрицательными.



Основы теории напряженного и деформированного состояния

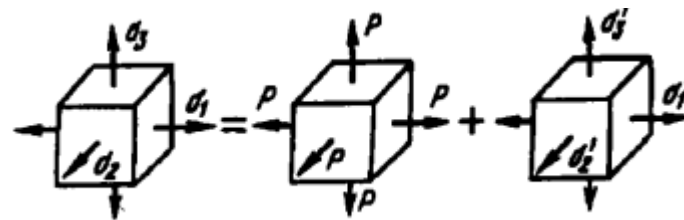
Взаимно перпендикулярные секущие площадки можно развернуть таким образом, что вектора полных напряжений будут перпендикулярно выбранным площадкам, такие нормальные напряжения называются главными.

Каждое из главных напряжений представляют в виде суммы двух величин:

$$\sigma_1 = p + \sigma'_1, \quad \sigma_2 = p + \sigma'_2, \quad \sigma_3 = p + \sigma'_3, \quad (7.25)$$

в результате чего напряженное состояние разбивается на два. Первое из них представляет собой всестороннее растяжение, а второе является дополнительным к нему до заданного напряженного состояния (рис. 7.31). Напряжения p подбирают с таким расчетом, чтобы изменение объема в дополнительном напряженном состоянии отсутствовало, т.е.

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0.$$



Шаровой тензор

Девиатор напряжений



Основы теории напряженного и деформированного состояния

Предположим, что напряженное состояние в точке тела задано тензором напряжений

$$T_{\Pi} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}.$$

Представим этот тензор в виде суммы двух тензоров:

$$T_{\Pi} = T_{\Pi}^0 + D_{\Pi},$$

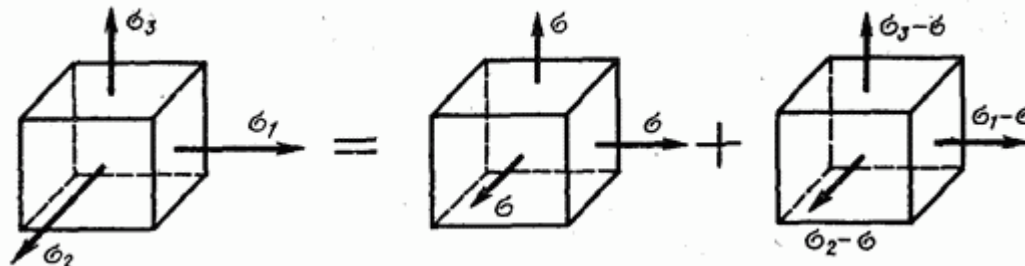
где

$$T_{\Pi}^0 = \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{Bmatrix}; \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

— так называемый шаровой тензор, а

$$D_{\Pi} = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{Bmatrix}$$

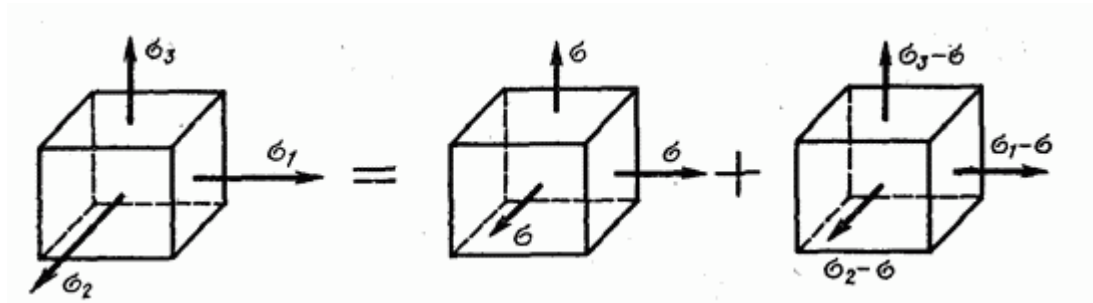
— девиатор напряжений.





Основы теории напряженного и деформированного состояния

Представление тензора напряжений в виде суммы двух тензоров равносильно представлению данного напряженного состояния (рис. 10.14) в виде суммы двух напряженных состояний, первое из которых характеризуется шаровым тензором и представляет всестороннее растяжение, а второе напряженное состояние, определяемое девиатором напряжений, показывает, насколько заданное напряженное состояние уклоняется от всестороннего растяжения.





4.2 Макроанизотропия композитов

До недавнего времени в практических задачах инженерной механики вопросы анизотропии на передний край не выдвигались, однако композиционные материалы могут иметь различную структуру и если армирующий наполнитель представляет собой уложенную в определенном порядке систему нитей или нитевидных кристаллов, композиционный материал приобретает резко выраженные свойства анизотропии, и модули упругости в различных направлениях могут различаться в несколько раз.

Не касаясь пока вопросов прочности, постараемся представить армированную структуру композита как сплошную и однородную среду с соответствующими упругими константами, позволяющими построить закон Гука в традиционной форме линейных зависимостей между компонентами напряженного и деформированного состояний. И обобщение в этом случае достаточно очевидно: каждая компонента деформированного состояния зависит от каждой из компонент напряженного состояния.



Анизотропия

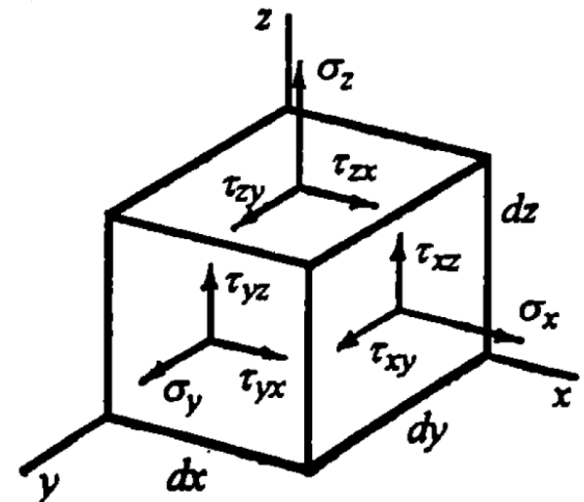
В итоге получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y + S_{13}\sigma_z + S_{14}\tau_{yz} + S_{15}\tau_{zx} + S_{16}\tau_{xy}; \\ \epsilon_y &= S_{21}\sigma_x + S_{22}\sigma_y + S_{23}\sigma_z + S_{24}\tau_{yz} + S_{25}\tau_{zx} + S_{26}\tau_{xy}; \\ \epsilon_z &= S_{31}\sigma_x + S_{32}\sigma_y + S_{33}\sigma_z + S_{34}\tau_{yz} + S_{35}\tau_{zx} + S_{36}\tau_{xy}; \\ \gamma_{yz} &= S_{41}\sigma_x + S_{42}\sigma_y + S_{43}\sigma_z + S_{44}\tau_{yz} + S_{45}\tau_{zx} + S_{46}\tau_{xy}; \\ \gamma_{zx} &= S_{51}\sigma_x + S_{52}\sigma_y + S_{53}\sigma_z + S_{54}\tau_{yz} + S_{55}\tau_{zx} + S_{56}\tau_{xy}; \\ \gamma_{xy} &= S_{61}\sigma_x + S_{62}\sigma_y + S_{63}\sigma_z + S_{64}\tau_{yz} + S_{65}\tau_{zx} + S_{66}\tau_{xy},\end{aligned}$$

где S_{ik} – коэффициенты податливости, которые определяются свойствами материала, но не являются его константами, поскольку зависят еще и от ориентации выбранной системы осей x, y, z .

Каждая компонента деформированного состояния зависит от каждой из компонент напряженного состояния.

(1)





Тензор податливости

Как напряженное и деформированное состояния являются тензорами, так в система коэффициентов податливости образует тензор, но более высокого порядка (ранга). Исследовать его свойства мы не будем, но отметим только, что этот тензор симметричный, т.е.

$$S_{ik} = S_{ki}.$$

Это вытекает из теоремы взаимности работ, т.е.

$$\sigma_x dy dz \cdot S_{12} \sigma_y dx = \sigma_y dx dz \cdot S_{21} \sigma_x dy,$$

откуда следует, что

$$S_{12} = S_{21}.$$



Особенности анизотропии

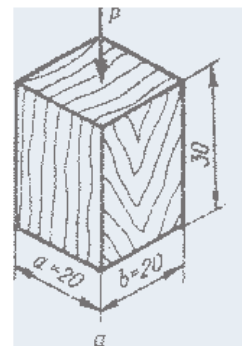
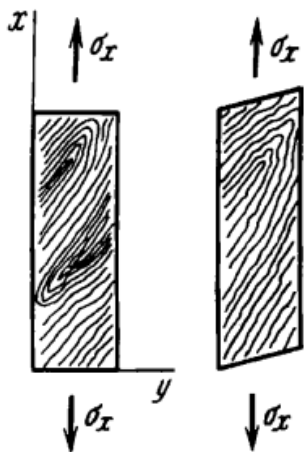
Если оси x, y, z являются главными осями напряженного состояния, то $\tau_{yx} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$.

При этом угловые деформации

$$\gamma_{yx} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy}$$

в нуль не обращаются.

Следовательно, в анизотропной среде главные оси напряженного и деформированного состояний не совпадают.





Анизотропия (2)

Соотношения (1) могут быть переписаны в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Вектор
независимых
компонентов
тензора
деформаций

Матрица податливостей [S]
(содержит 21 независимый коэффициент)

Вектор
независимых
компонентов
тензора
напряжений



Изотропия

Наиболее простой вид матрица податливости приобретает, естественно, в случае полной изотропии:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

ИЛИ

$$\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$



Описание изотропии в форме обобщенного закона Гука

Обобщенный закона Гука для изотропной среды

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G};$$



Описание изотропии в форме обобщенного закона Гука (2)

Сложив левые и правые части равенств для ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , получим выражение объемной деформации композита в виде:

$$e = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

При $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$ получим $e = 3 \frac{1 - 2\mu}{E} p.$

При положительном p изменение объема e должно быть также положительным, а при отрицательном p отрицательным. Это возможно только в том случае, если $\mu > 1/2$. Следовательно, значение коэффициента Пуассона для изотропного материала не может превышать 0,5.



Описание изотропии в форме обобщенного закона Гука (3)

Напомним, что для изотропного материала справедливо соотношение:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние изотропного тела характеризуется двумя (2!!!) независимыми упругими постоянными.



Матрица жесткости

Обобщенный закон Гука можно записать и в виде линейной зависимости напряжений от деформаций:

$$\{\sigma\} = [G] \{\varepsilon\}, \quad (2)$$

где $[G]$ — матрица жесткости материала размером 6×6 .

Компоненты матрицы $[G]$ можно выразить через компоненты матрицы податливости $[S]$, решая систему уравнений (1) относительно напряжений $\{\sigma\}$.

Возможность перехода от записи закона Гука в виде (1) к выражению (2) достаточно очевидна, так как в упругом теле по определению существует взаимно однозначная связь между напряжениями и деформациями.



Замечание к анизотропии композитов

Анизотропия самого общего вида у реальных материалов, когда матрица коэффициентов податливости содержит 21 независимый коэффициент — явление редкое.

Обычно структура материала такова, что его упругие свойства в некоторых направлениях идентичны. В этих случаях число независимых коэффициентов в матрице коэффициентов податливости (и, следовательно, в матрице коэффициентов жесткости) уменьшается, и при надлежащем выборе системы координат упрощается запись закона Гука.



Плоскость упругой симметрии

Если в анизотропном теле его упругие свойства идентичны в любых двух направлениях, симметричных относительно некоторой плоскости, то такая плоскость называется плоскостью упругой симметрии.

В этом случае число независимых коэффициентов, описывающих свойства материала, сокращается до тринадцати, а закон Гука принимает более простой вид при совмещении одной из координатных плоскостей с плоскостью упругой симметрии. Например, совместив с плоскостью симметрии координатную плоскость (x_1, x_2) , можно матрицу коэффициентов податливости представить в виде

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & 0 \\ & \text{СИМ.} & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}.$$



Плоскость упругой симметрии (2)

В частности, при одноосном растяжении анизотропного тела в направлении, перпендикулярном плоскости упругой симметрии,

$$\epsilon_1 = s_{13}\sigma_3; \quad \epsilon_2 = s_{23}\sigma_3; \quad \epsilon_3 = s_{33}\sigma_3; \quad \gamma_{23} = 0; \quad \gamma_{13} = 0; \quad \gamma_{12} = s_{36}\sigma_3.$$

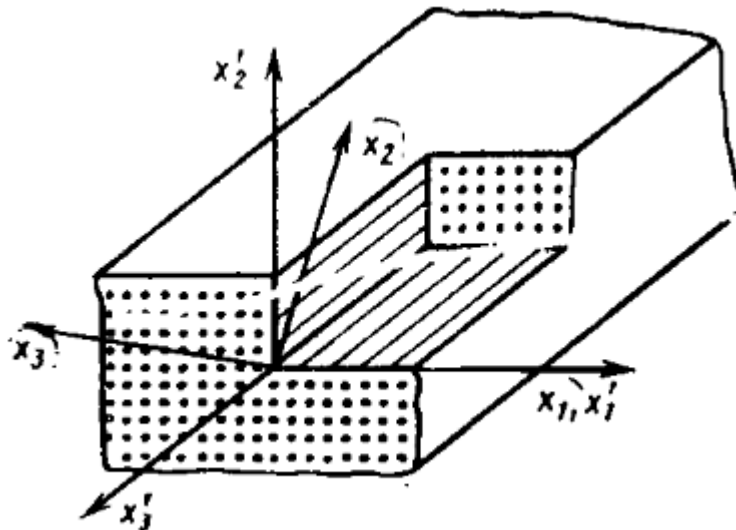
При таком напряженном состоянии материал претерпевает деформации сдвига только в плоскости (x_1, x_2) . Из выражения (*) следует, что если одна из главных осей напряженного состояния перпендикулярна плоскости упругой симметрии, то одна из главных осей деформированного состояния тоже будет перпендикулярна этой плоскости. Поэтому направление, перпендикулярное плоскости упругой симметрии, называют главным направлением (или главной осью) упругости.

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & 0 \\ & \text{сим.} & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}. \quad (*)$$



4.2.2 Плоскость изотропии, трансверсально изотропное тело, монотропия

Плоскость, в которой упругие свойства во всех направлениях идентичны, называют плоскостью изотропии.



Тело, обладающее плоскостью изотропии, называют трансверсально изотропным или монотропным телом.



Монокотропия

Число независимых коэффициентов, характеризующих упругие свойства такого тела, оказывается равным пяти (5!!!).

Совместив координатную плоскость (x_1, x_2) с плоскостью изотропии, получим следующие выражения для матрицы податливости:

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ \text{СИМ.} & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}$$

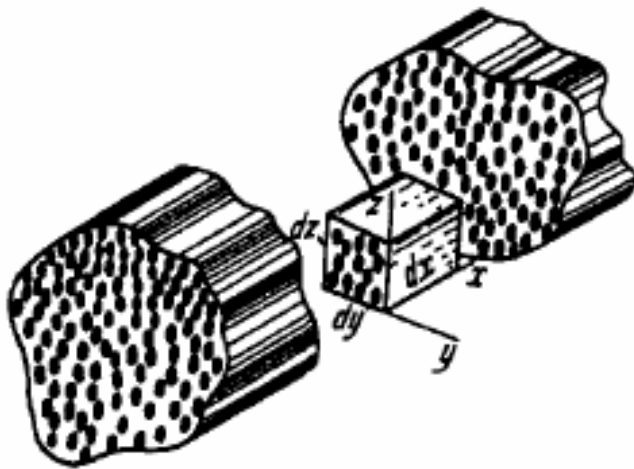


Монотропия (2)

Матрица податливости в случае *монотропии* или, как ее часто называют, *трансверсальной изотропии* свойственна композитам с однонаправленной укладкой нитевидного наполнителя:

Пусть по оси x модуль будет E_1 , по равноправным осям y и z – E_2 . Тогда:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\mu_{21}}{E_2} \sigma_y - \frac{\mu_{21}}{E_2} \sigma_z.$$



Обозначение коэффициента Пуассона снабжено двумя индексами. Первый соответствует оси, по которой приложено напряжение, а второй – той оси, по которой происходит сужение. Для монотропной среды, естественно, $\mu_{21} = \mu_{31}$



Монокотропия (3)

Написав аналогичные выражения и для остальных компонент деформированного состояния, получаем матрицу податливости монокотропного материала в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & -\frac{\mu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}.$$

Здесь по свойству симметрии $\frac{\mu_{21}}{E_2} = \frac{\mu_{12}}{E_1}$



Монокотропия (4)

Кроме того, поскольку в плоскости yOz среда изотропна, для нее сохраняется соотношение :

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \mu_{32})}$$

Таким образом, упругие свойства монокотропной среды определяются пятью (5) независимыми константами.



4.2.3. Ортотропный материал

Если в анизотропном теле имеются две взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, то нетрудно показать, что перпендикулярная им плоскость будет тоже плоскостью упругой симметрии.

Тело, обладающее тремя взаимно перпендикулярными плоскостями упругой симметрии, называют *ортотропным*. Для ортотропного тела число независимых коэффициентов, характеризующих упругие свойства, равно девяти (9!!!).



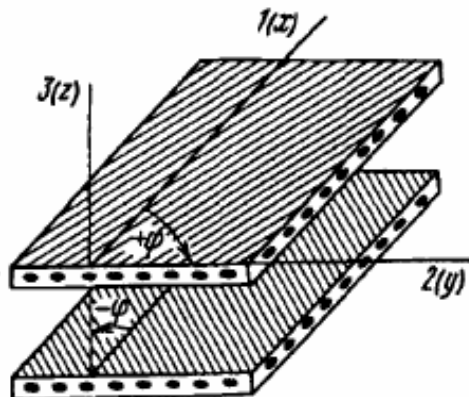
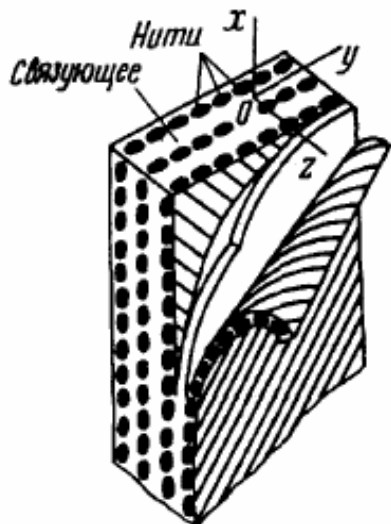
Ортотропия

Закон Гука для ортотропного тела наиболее естественно и просто записывается при совмещении координатных плоскостей с плоскостями упругой симметрии, тогда матрица податливости:

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & \text{СИМ.} & & & s_{55} & 0 \\ & \text{)} & & & & s_{66} \end{bmatrix} \cdot$$



Ортотропия (2)



В отличие от монотропии, оси y и z не равноправны.

Композит, обладающий симметрией относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей.



Ортотропия (3)

Упругие свойства ортотропной среды можно выразить через технические постоянные:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix},$$

где по свойству симметрии

$$\frac{\mu_{21}}{E_2} = \frac{\mu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\mu_{31}}{E_3} = \frac{\mu_{13}}{E_1}, \quad \frac{\mu_{32}}{E_3} = \frac{\mu_{23}}{E_2}.$$



Монослой

Упругие постоянные $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{31}, m_{12}, m_{13}, m_{23}$ для композита можно определить путем испытания образцов. Если известны модули упругости нитей и связующего, можно с достаточной точностью рассчитать упругие постоянные создаваемого композита, используя формулу смеси.

В практике расчетов и упругих констант, и предела прочности композита широко используют понятие *монослоя* – как основного составляющего элемента слоистых структур.

Монослой – это двойной слой, содержащий два семейства нитей, направленных соответственно под углами $+\varphi, -\varphi$ или $0^\circ, 90^\circ$ к оси x .



4.3 Макромодели полимерного композиционного материала

Достоинства и высокие механические характеристики композитов наиболее полно реализуются в ориентированных материалах, армированных параллельными волокнами, т. е. в так называемых однонаправленных слоях или монослоях (рисунок 1), из которых путем укладки в различных направлениях образуются слоистые композиты (рисунок 2).

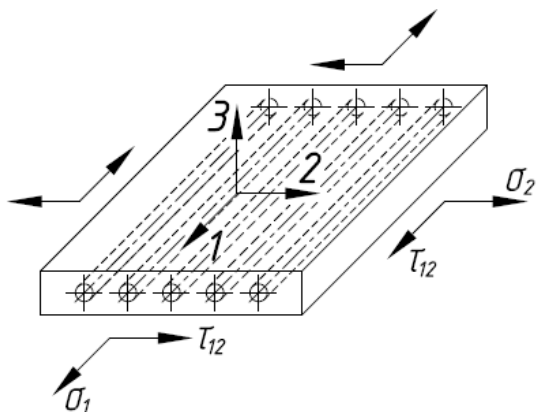


Рисунок 1 – Элемент однонаправленного слоя

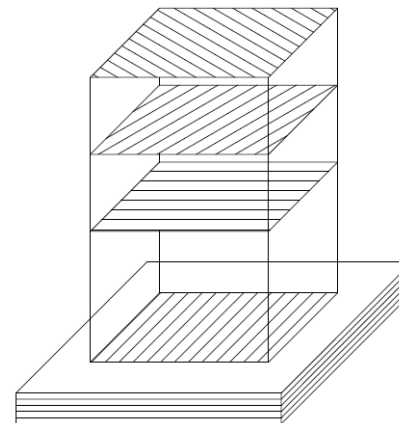
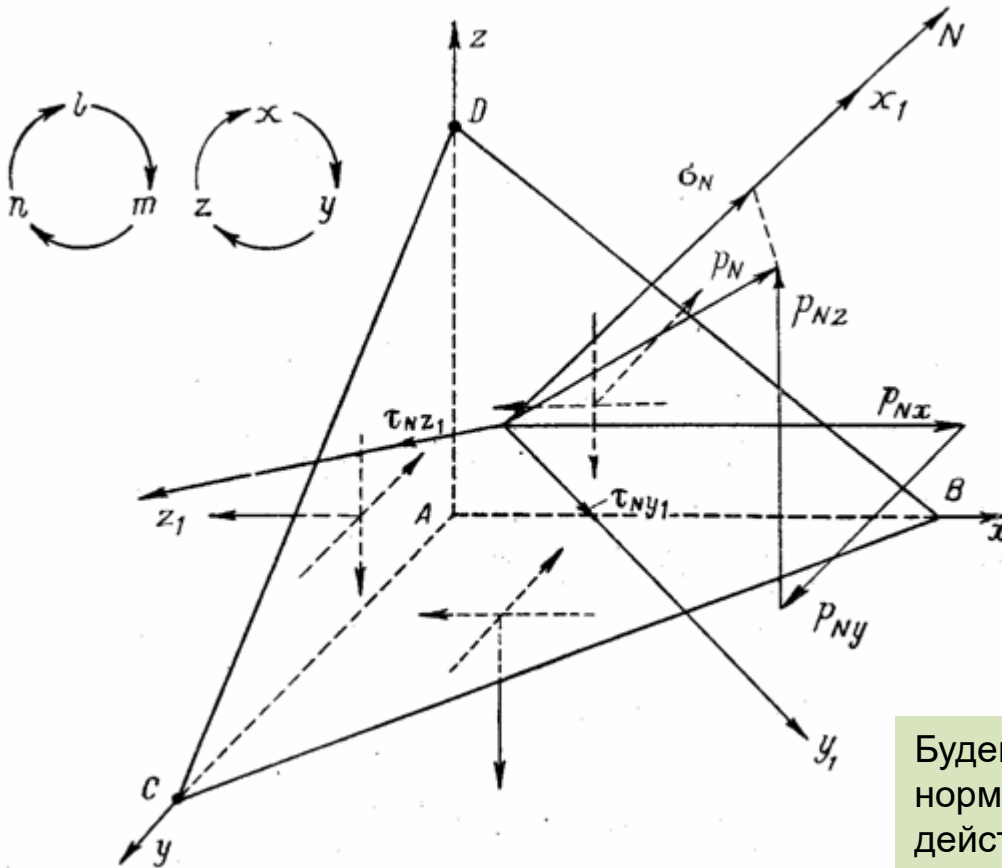


Рисунок 2 – Элемент слоистого композита

Несмотря на большое многообразие структур, которые определяются числом слоев, их толщиной и взаимной ориентацией, свойства таких материалов определяются свойствами однонаправленного слоя.



4.3.1 Нормальные и касательные напряжения по наклонной площадке



Рассмотрим элементарный тетраэдр $ABCD$, три грани которого параллельны координатным плоскостям, а нормаль N к четвертой грани составляет с координатными осями углы, косинусы которых равны l , m и n .

Будем считать заданными составляющие нормальные и касательные напряжения, действующие по площадкам, лежащим в координатных плоскостях, и определим напряжения на площадке BCD .



Нормальные и касательные напряжения по наклонной площадке (2)

Выберем новую систему прямоугольных осей координат x_1 , y_1 и z_1 , так чтобы ось x_1 совпадала с нормалью N , а оси y_1 и z_1 лежали в плоскости площадки $B CD$. Каждая из этих осей будет иметь в системе осей x, y, z свои направляющие косинусы, указанные в табл. 1

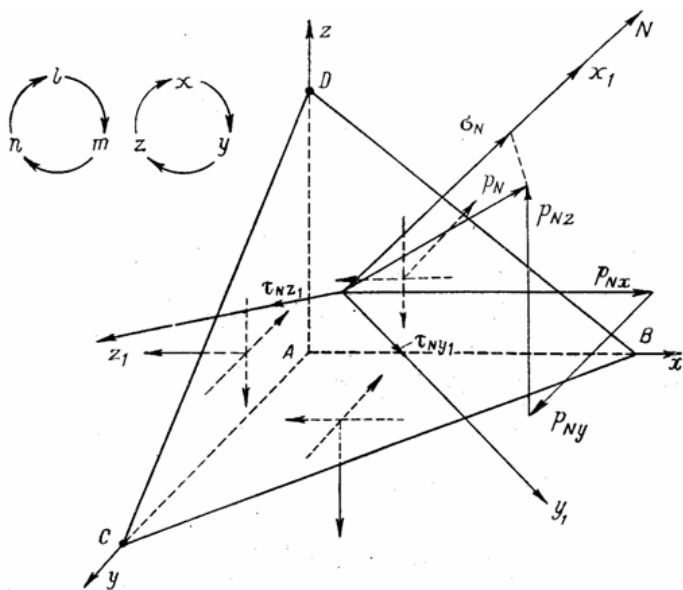


Таблица 1 – Направляющие косинусы

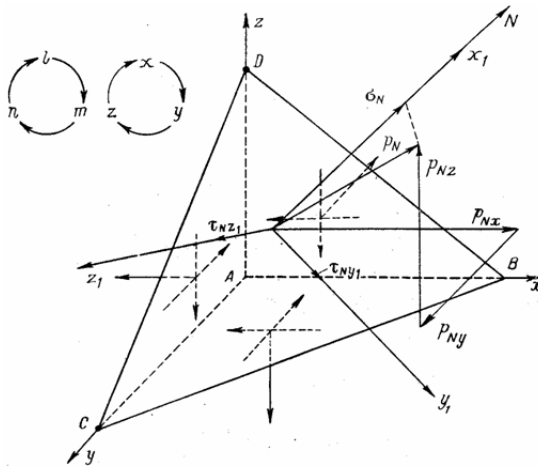
Оси	x	y	z
x_1	l_1	m_1	n_1
y_1	l_2	m_2	n_2
z_1	l_3	m_3	n_3



Нормальные и касательные напряжения по наклонной площадке (3)

Полное напряжение p_N , действующее по площадке BCD , разложим на составляющие p_{Nx} , p_{Ny} и p_{Nz} . Нормальное напряжение действующее по площадке BCD , можно рассматривать как проекцию на ось N (или x_1) полного напряжения p_N , действующего по площадке BCD , а полное напряжение p_N - как равнодействующую трех его проекций.

Обозначим площади треугольников BCD , OCD , OBD , OBC соответственно: $S(BCD)=F$, $S(ACD)=F_x$, $S(ABD)=F_y$, $S(ABC)=F_z$, очевидно что



$$F_x = F \cdot l_1, \quad F_y = F \cdot m_1, \quad F_z = F \cdot n_1 \quad (1)$$



Нормальные и касательные напряжения по наклонной площадке (4)

Тогда проекции сил на оси координат x, y, z :

$$p_{Nx} \cdot F = \sigma_x \cdot F_x + \tau_{yx} \cdot F_y + \tau_{zx} \cdot F_z$$

$$p_{Ny} \cdot F = \sigma_y \cdot F_y + \tau_{xy} \cdot F_x + \tau_{zy} \cdot F_z$$

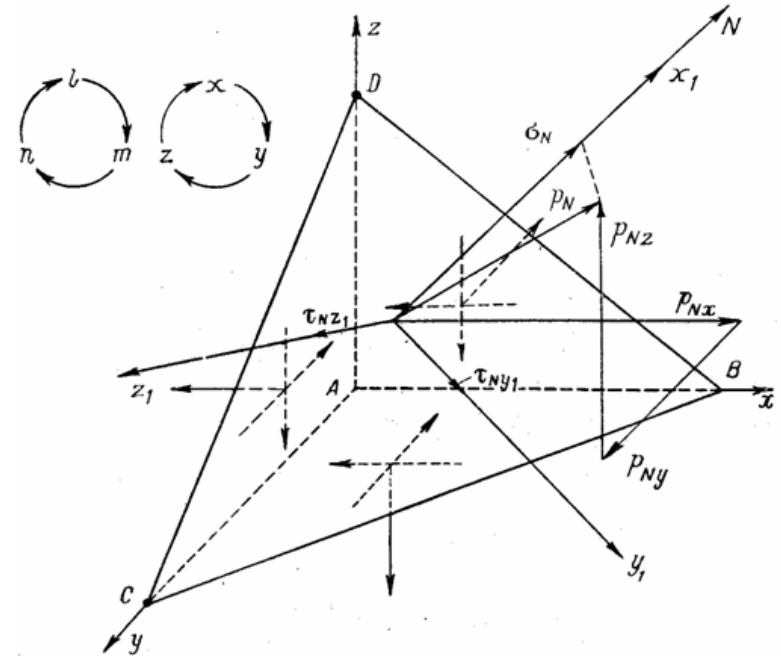
$$p_{Nz} \cdot F = \sigma_z \cdot F_z + \tau_{xz} \cdot F_x + \tau_{yz} \cdot F_y$$

или с учетом соотношений (1):

$$p_{Nx} = \sigma_x \cdot l_1 + \tau_{yx} \cdot m_1 + \tau_{zx} \cdot n_1$$

$$p_{Ny} = \tau_{xy} \cdot l_1 + \sigma_y \cdot m_1 + \tau_{zy} \cdot n_1 \quad (2)$$

$$p_{Nz} = \tau_{xz} \cdot l_1 + \tau_{yz} \cdot m_1 + \sigma_z \cdot n_1$$





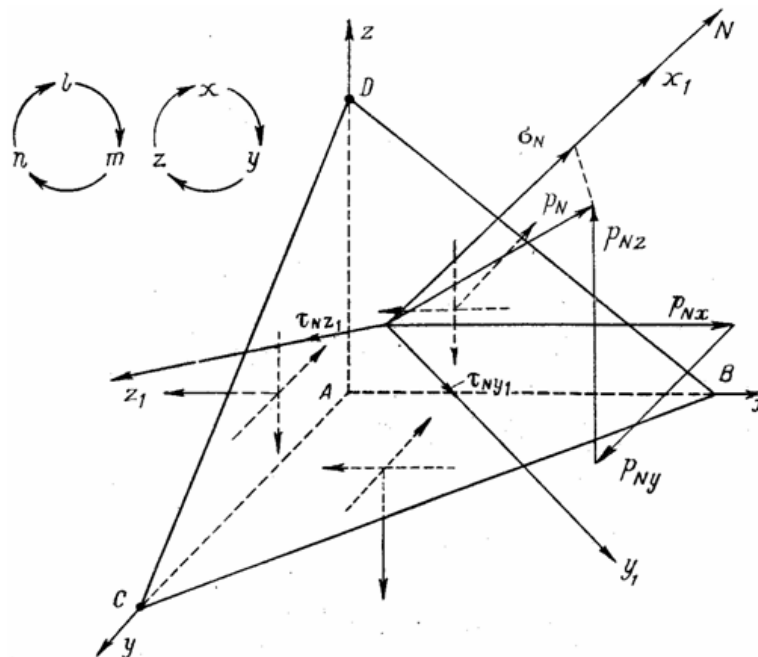
Нормальные и касательные напряжения по наклонной площадке (5)

Так как проекция равнодействующей на ось x_1 равна сумме проекций составляющих, то

$$\sigma_N = \sigma_{x_1} = p_{Nx} \cdot l_1 + p_{Ny} \cdot m_1 + p_{Nz} \cdot n_1$$

Подставив выражения (2) и произведя необходимые сокращения, запишем

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cdot l_1^2 + \sigma_y \cdot m_1^2 + \sigma_z \cdot n_1^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot l_1 \cdot m_1 + 2 \cdot \tau_{xz} \cdot n_1 \cdot l_1 + 2 \cdot \tau_{yz} \cdot n_1 \cdot m_1$$





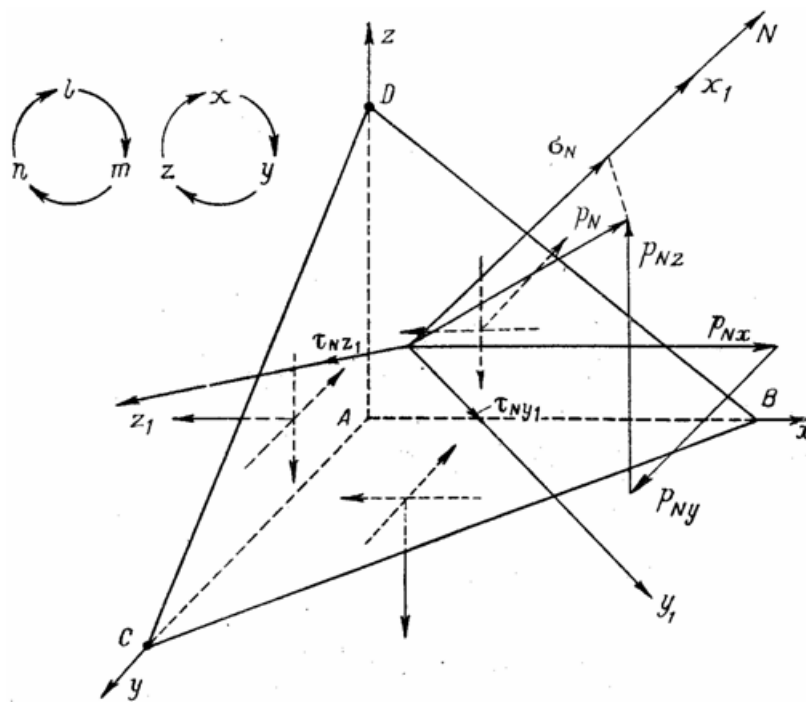
Нормальные и касательные напряжения по наклонной площадке (6)

Аналогично спроецировав сумму проекций сил на ось y_1 , получим:

$$\tau_{Ny_1} = p_{Nx} \cdot l_2 + p_{Ny} \cdot m_2 + p_{Nz} \cdot n_2,$$

заменяв их выражениями (2) и приведя подобные члены, получим

$$\tau_{x_1y_1} = \sigma_x \cdot l_1 \cdot l_2 + \sigma_y \cdot m_1 \cdot m_2 + \sigma_z \cdot n_1 \cdot n_2 + \tau_{xy} \cdot (l_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot l_2) + \tau_{yz} \cdot (m_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot m_2) + \tau_{zx} \cdot (n_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot n_2)$$

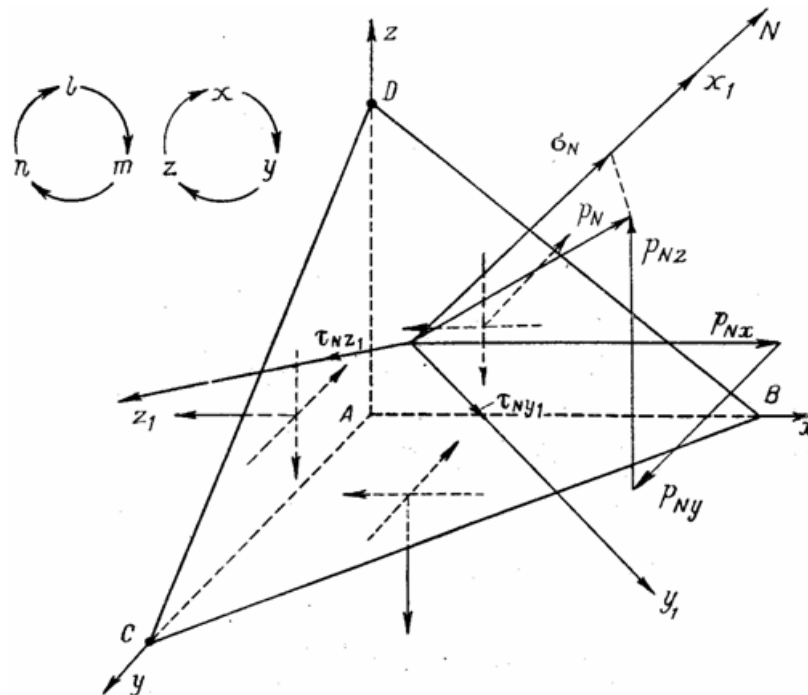




Нормальные и касательные напряжения по наклонной площадке (7)

Аналогично из суммы проекций на ось z_1 найдем выражение для третьего составляющего касательного напряжения:

$$\tau_{x_1z_1} = \sigma_x \cdot l_1 \cdot l_3 + \sigma_y \cdot m_1 \cdot m_3 + \sigma_z \cdot n_1 \cdot n_3 + \tau_{xy} \cdot (l_1 \cdot m_3 + m_1 \cdot l_3) + \tau_{yz} \cdot (m_1 \cdot n_3 + n_1 \cdot m_3) + \tau_{zx} \cdot (n_1 \cdot l_3 + l_1 \cdot n_3)$$





Нормальные и касательные напряжения по наклонной площадке (8)

С помощью полученных формул можно преобразовать составляющие тензора напряжений при переходе от одной системы координат x, y, z к новой системе координат x_1, y_1, z_1 .

Для записи этих и ряда других формул теории упругости можно установить последовательность чередования индексов у составляющих напряжений и чередования направляющих косинусов.

$$\begin{aligned}\sigma_{x1} &= \sigma_x \cdot l_1^2 + \sigma_y \cdot m_1^2 + \sigma_z \cdot n_1^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot l_1 \cdot m_1 + 2 \cdot \tau_{xz} \cdot n_1 \cdot l_1 + 2 \cdot \tau_{yz} \cdot n_1 \cdot m_1 \\ \sigma_{y1} &= \sigma_x \cdot l_2^2 + \sigma_y \cdot m_2^2 + \sigma_z \cdot n_2^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot l_2 \cdot m_2 + 2 \cdot \tau_{xz} \cdot n_2 \cdot l_2 + 2 \cdot \tau_{yz} \cdot n_2 \cdot m_2 \\ \sigma_{z1} &= \sigma_x \cdot l_3^2 + \sigma_y \cdot m_3^2 + \sigma_z \cdot n_3^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot l_3 \cdot m_3 + 2 \cdot \tau_{xz} \cdot n_3 \cdot l_3 + 2 \cdot \tau_{yz} \cdot n_3 \cdot m_3 \\ \tau_{x1y1} &= \sigma_x \cdot l_1 \cdot l_2 + \sigma_y \cdot m_1 \cdot m_2 + \sigma_z \cdot n_1 \cdot n_2 + \tau_{xy} \cdot (l_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot l_2) + \tau_{yz} \cdot (m_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot m_2) + \tau_{zx} \cdot (n_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot n_2) \\ \tau_{x1z1} &= \sigma_x \cdot l_1 \cdot l_3 + \sigma_y \cdot m_1 \cdot m_3 + \sigma_z \cdot n_1 \cdot n_3 + \tau_{xy} \cdot (l_1 \cdot m_3 + m_1 \cdot l_3) + \tau_{yz} \cdot (m_1 \cdot n_3 + n_1 \cdot m_3) + \tau_{zx} \cdot (n_1 \cdot l_3 + l_1 \cdot n_3) \\ \tau_{y1x1} &= \dots \\ \tau_{y1z1} &= \dots \\ \tau_{z1x1} &= \dots \\ \tau_{z1y1} &= \dots\end{aligned} \quad (4)$$



4.4.2 Упругие характеристики хаотично армированного композита

Свойства хаотично армированных композитов практически идентичны во всех направлениях, такие материалы можно считать квазиизотропными и использовать с достаточной точностью соотношения закона Гука для изотропного материала.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G};$$

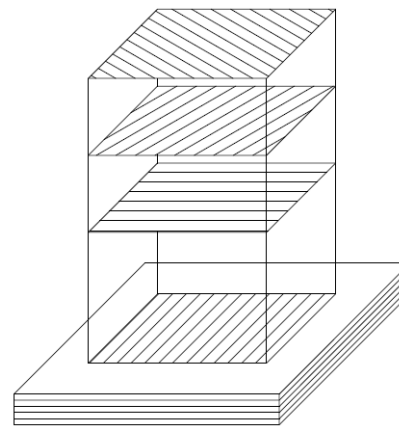
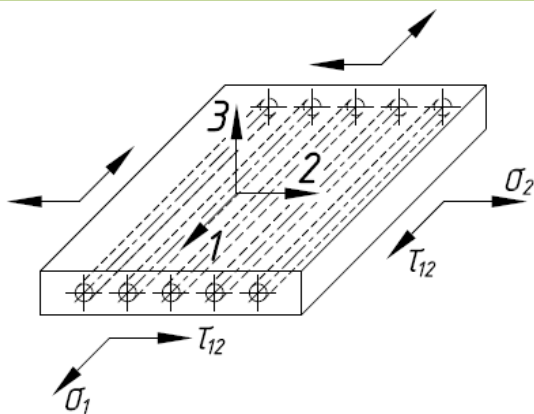


4.4.3 Упругие характеристики направленного композита, армированного под произвольным углом

Для направленных композитов с достаточной точностью может быть использована модель ортотропного материала, обладающая симметрией относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей.

Рассмотрим слой направленно армированного композита. Предлагаемый материал представляет собой совокупность однонаправленных слоев с различной ориентацией волокон (см. рис.).

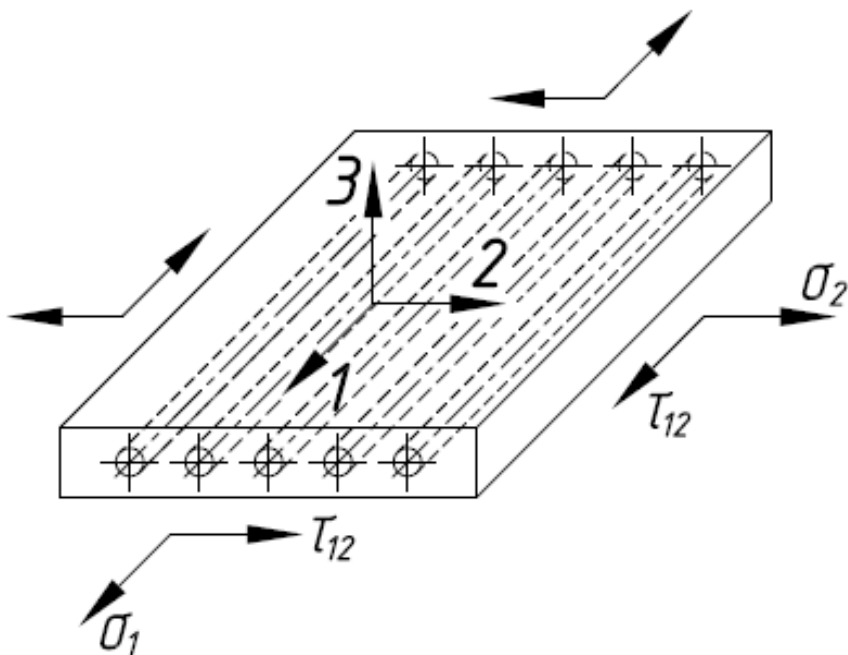
Получим соотношения, определяющие упругие характеристики слоя, армированного под углом к направлению нагружения.





Упругие характеристики направленного композита, армированного под произвольным углом (2)

Рассмотрим слой, отнесенный к ортогональной системе координат с осями 1, 2, 3, связанными с направлением армирования. В однонаправленном слое ось 1 совместим с направлением волокон (см. рис.), ось 2 примем перпендикулярной оси 1 и лежащей в плоскости армирования, при этом ось 3 получится ортогональной к плоскости армирования.



Упругие характеристики материала в направлении перпендикулярном плоскости армирования (ось 3) определяются характеристиками матрицы и практически не зависят от ориентации армирующего наполнителя.



Упругие характеристики направленного композита, армированного под произвольным углом (2)

Таким образом, закон Гука для слоя в плоскости осей 1, 2, предполагая, что напряжения в направлении 3 много меньше напряжений в плоскости 1, 2, можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1}; \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}}; \\ \gamma_{13} &= \frac{\tau_{13}}{G_{13}}; \\ \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}},\end{aligned}\quad (5)$$

где E_1, E_2 – модули упругости в направлениях 1, 2;
 G_{12} – модуль сдвига в плоскости слоя;
 G_{13}, G_{23} – модули сдвига в координатных плоскостях перпендикулярных плоскости слоя;
 μ_{12}, μ_{21} – коэффициенты Пуассона.



Упругие характеристики направленного композита, армированного под произвольным углом (3)

Равенства (5) могут быть решены относительно напряжений:

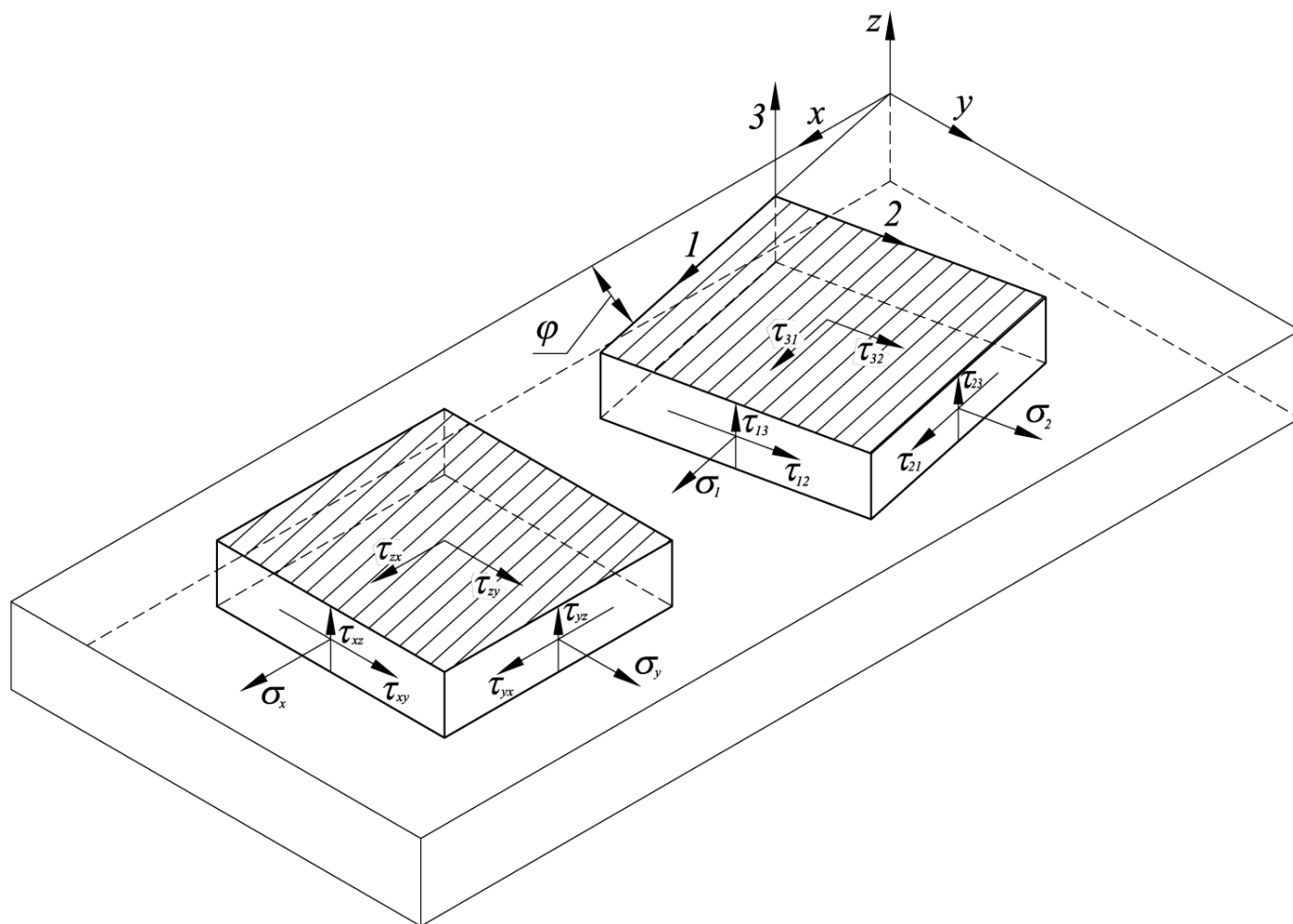
$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \bar{E}_1 (\varepsilon_1 + \mu_{21} \varepsilon_2); \\ \sigma_2 &= \bar{E}_2 (\varepsilon_2 + \mu_{12} \varepsilon_1); \\ \tau_{12} &= G_{12} \gamma_{12}, \\ \tau_{13} &= G_{13} \gamma_{13}, \\ \tau_{23} &= G_{23} \gamma_{23},\end{aligned}\tag{6}$$

где $\bar{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}$ и $\bar{E}_2 = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}$.



Упругие характеристики направленного композита, армированного под произвольным углом (4)

Введем ортогональные координаты с осями x , y , z , так, что ось 1 армированного слоя составляет с осью x угол φ (см. рис.).





Упругие характеристики направленного композита, армированного под произвольным углом (5)

Статические соотношения, связывающие напряжения в системах координат x, y и $1, 2$, следующие (используем соотношения 4):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_1 \cos^2(\varphi) + \sigma_2 \sin^2(\varphi) - \tau_{12} \sin(2\varphi); \\ \sigma_y &= \sigma_1 \sin^2(\varphi) + \sigma_2 \cos^2(\varphi) + \tau_{12} \sin(2\varphi); \\ \tau_{xy} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin(\varphi) \cos(\varphi) + \tau_{12} \cos(2\varphi); \\ \tau_{xz} &= \tau_{13} \cos(\varphi) - \tau_{23} \sin(\varphi); \\ \tau_{yz} &= \tau_{23} \cos(\varphi) + \tau_{13} \sin(\varphi).\end{aligned}\tag{7}$$

Геометрические соотношения, позволяющие выразить деформации в системе координат $1, 2$ через деформации в осях x, y , можно записать следующим образом:



Упругие характеристики направленного композита, армированного под произвольным углом (6)

Геометрические соотношения, позволяющие выразить деформации в системе координат 1, 2 через деформации в осях x, y, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_x \cos^2(\varphi) + \varepsilon_y \sin^2(\varphi) + \gamma_{xy} \sin(\varphi) \cos(\varphi); \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_x \sin^2(\varphi) + \varepsilon_y \cos^2(\varphi) - \gamma_{xy} \sin(\varphi) \cos(\varphi); \\ \gamma_{12} &= (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin(2\varphi) + \gamma_{xy} \cos(2\varphi); \\ \gamma_{13} &= \gamma_{xz} \cos(\varphi) + \gamma_{yz} \sin(\varphi); \\ \gamma_{23} &= \gamma_{yz} \cos(\varphi) - \gamma_{xz} \sin(\varphi).\end{aligned}\tag{8}$$



Упругие характеристики направленного композита, армированного под произвольным углом (7)

Решая совместно (6), (7) и (8) получим физические соотношения для слоя, армированного под углом φ к оси x :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\gamma_{xy}; \\ \tau_{xy} &= A_{31}\varepsilon_x + A_{32}\varepsilon_y + A_{33}\gamma_{xy}; \\ \tau_{xz} &= A_{44}\varepsilon_{xz} + A_{45}\varepsilon_{yz}; \\ \tau_{yz} &= A_{54}\varepsilon_{xz} + A_{55}\varepsilon_{yz},\end{aligned}\tag{9}$$



Упругие характеристики направленного композита, армированного под произвольным углом (8)

В соотношениях (9) упругие константы представляю собой:

$$\begin{aligned}A_{11} &= \bar{E}_1 \cos^4(\varphi) + \bar{E}_2 \sin^4(\varphi) + 2(\bar{E}_1 \mu_{21} + 2G_{12}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi); \\A_{12} = A_{21} &= \bar{E}_1 \mu_{21} + [\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2(\bar{E}_1 \mu_{21} + 2G_{12})] \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi); \\A_{22} &= \bar{E}_1 \sin^4(\varphi) + \bar{E}_2 \cos^4(\varphi) + 2(\bar{E}_1 \mu_{21} + 2G_{12}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi); \\A_{13} = A_{31} &= \sin(\varphi) \cos(\varphi) [\bar{E}_1 \cos^2(\varphi) - \bar{E}_2 \sin^2(\varphi) - (\bar{E}_1 \mu_{21} + 2G_{12}) \cos(2\varphi)]; \\A_{23} = A_{32} &= \sin(\varphi) \cos(\varphi) [\bar{E}_1 \sin^2(\varphi) - \bar{E}_2 \cos^2(\varphi) + (\bar{E}_1 \mu_{21} + 2G_{12}) \cos(2\varphi)]; \\A_{33} &= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2\bar{E}_1 \mu_{12}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + G_{12} \cos^2(2\varphi); \\A_{44} &= G_{13} \cos^2(\varphi) + G_{23} \sin^2(\varphi); \\A_{55} &= G_{13} \sin^2(\varphi) + G_{23} \cos^2(\varphi); \\A_{45} = A_{54} &= \sin(\varphi) \cos(\varphi) (G_{13} - G_{23}).\end{aligned} \quad (10)$$



Упругие характеристики направленного композита, армированного под произвольным углом (8)

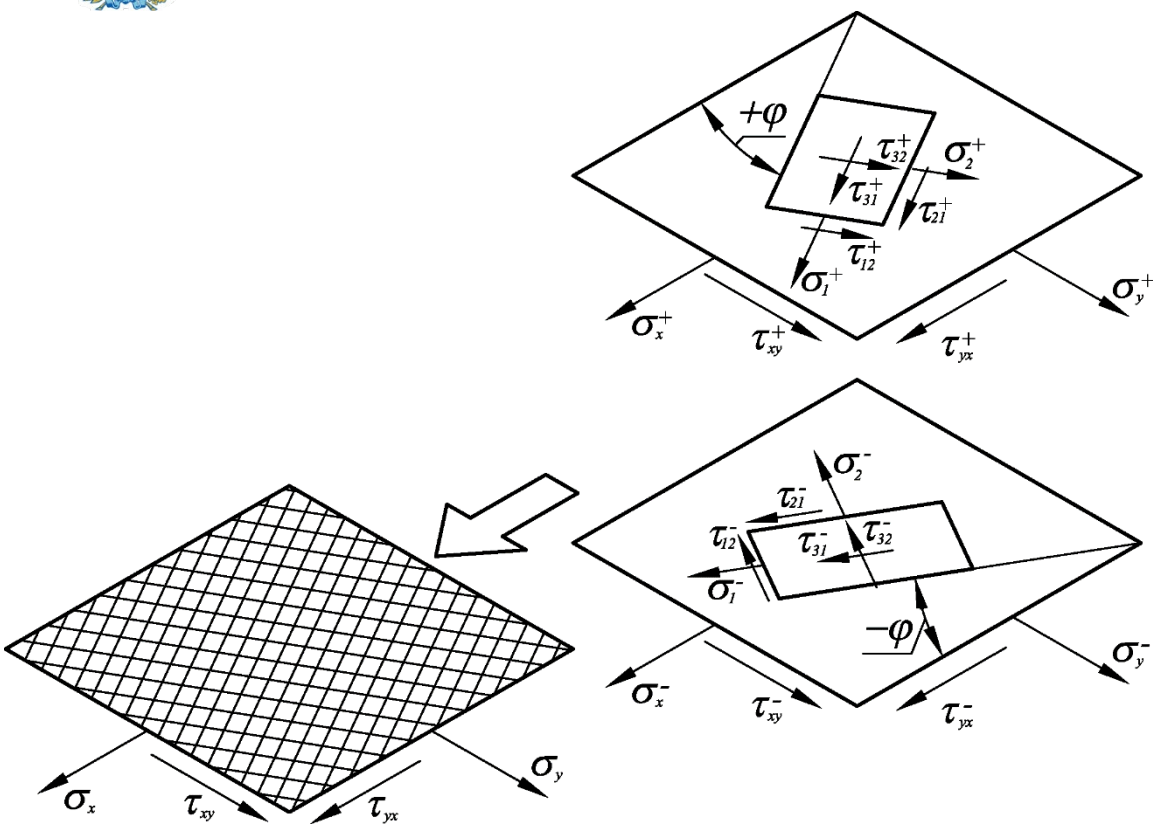
Анализируя соотношения (9), необходимо отметить влияние касательных напряжений на удлинения и нормальных напряжений на деформации сдвига, т.е. слой, ортотропный в координатах $1, 2$, является анизотропным в координатах x, y .

$$\begin{aligned}\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\gamma_{xy}; \\ \tau_{xy} &= A_{31}\varepsilon_x + A_{32}\varepsilon_y + A_{33}\gamma_{xy}; \\ \tau_{xz} &= A_{44}\varepsilon_{xz} + A_{45}\varepsilon_{yz}; \\ \tau_{yz} &= A_{54}\varepsilon_{xz} + A_{55}\varepsilon_{yz},\end{aligned}\tag{9}$$



Упругие характеристики направленного слоистого композита

В слоистых композитах слою с углом армирования $+\varphi$, соответствует такой же слой с углом армирования $-\varphi$. Такие два слоя естественно считать при расчете как один симметрично армированный слой.



Если каждый из симметричных слоев является анизотропным в координатах x, y , то, работая совместно, они образуют ортотропный слой.



Упругие характеристики направленного слоистого композита (2)

Закон Гука для такого слоя имеет более простую форму записи, чем соотношения (9) и (10) для отдельного слоя. Для получения этого закона запишем равенства (6), (7) и (8) для слоев с углами армирования $\pm\varphi$:

$$\begin{aligned}\sigma_1^\pm &= \bar{E}_1(\varepsilon_1^\pm + \mu_{21}\varepsilon_2^\pm); \\ \sigma_2^\pm &= \bar{E}_2(\varepsilon_2^\pm + \mu_{12}\varepsilon_1^\pm); \\ \tau_{12}^\pm &= G_{12}\varepsilon_{12}^\pm; \\ \sigma_x^\pm &= \sigma_1^\pm \cos^2(\varphi) + \sigma_2^\pm \sin^2(\varphi) \mp \tau_{12}^\pm \sin(2\varphi); \\ \sigma_y^\pm &= \sigma_1^\pm \sin^2(\varphi) + \sigma_2^\pm \cos^2(\varphi) \pm \tau_{12}^\pm \sin(2\varphi); \\ \tau_{xy}^\pm &= \pm(\sigma_1^\pm - \sigma_2^\pm) \sin(\varphi) \cos(\varphi) + \tau_{12}^\pm \cos(2\varphi); \\ \varepsilon_1^\pm &= \varepsilon_x \cos^2(\varphi) + \varepsilon_y \sin^2(\varphi) \pm \gamma_{xy} \sin(\varphi) \cos(\varphi); \\ \varepsilon_2^\pm &= \varepsilon_x \sin^2(\varphi) + \varepsilon_y \cos^2(\varphi) \mp \gamma_{xy} \sin(\varphi) \cos(\varphi); \\ \gamma_{12}^\pm &= \pm(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin(2\varphi) + \varepsilon_{xy} \cos(2\varphi).\end{aligned}\tag{11}$$

Здесь знаки \pm соответствуют слоям с углами $\pm\varphi$.



Упругие характеристики направленного слоистого композита (3)

Усредняя напряжения для пары слоев, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{2}(\sigma_x^+ + \sigma_x^-); \\ \sigma_y &= \frac{1}{2}(\sigma_y^+ + \sigma_y^-); \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2}(\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-).\end{aligned}\tag{12}$$

Запишем физические соотношения, связывающие средние напряжения симметричной пары слоев с соответствующими деформациями:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y; \\ \sigma_y &= A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y; \\ \tau_{xy} &= A_{33}\gamma_{xy}.\end{aligned}\tag{13}$$



Упругие характеристики направленного слоистого композита (4)

Соотношения (13) можно разрешить относительно деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{yx} \frac{\sigma_y}{E_y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{xy} \frac{\sigma_x}{E_x}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}},\end{aligned}\tag{14}$$

где

$$E_x = A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}; \quad E_y = A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}}; \quad G_{xy} = A_{33}; \quad \mu_{yx} = \frac{A_{12}}{A_{11}}; \quad \mu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{22}},\tag{15}$$

где E_x , E_y и G_{xy} – средние модули упругости и модуль сдвига системы двух симметрично армированных слоев; μ_{yx} , μ_{xy} – коэффициенты Пуассона.



Упругие характеристики направленного слоистого композита (5)

Соотношения (13) можно разрешить относительно деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{yx} \frac{\sigma_y}{E_y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{xy} \frac{\sigma_x}{E_x}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}},\end{aligned}\tag{14}$$

Таким образом, если каждый из симметричных слоев является анизотропным в координатах x, y , то, работая совместно, они образуют ортотропный слой.



Пример расчета упругих характеристик направленного композита, армированного под произвольным углом

Таблица 2 – Механические характеристики однонаправленного стеклопластика на основе жгута РБН-13-12-4П и связующего ЭТД-10

Наименование характеристик	Обозначение	Значение
Предел прочности при растяжении вдоль волокон, МПа	$\sigma_{в1}$	980,7
Предел прочности при сжатии вдоль волокон, МПа	$\sigma_{с1}$	392,3
Модуль упругости при растяжении вдоль волокон, ГПа	E_1	40,79
Модуль упругости при растяжении поперек волокон, ГПа	E_2	6,276
Модуль сдвига в слое, ГПа	G_{12}	3,923
Коэффициент Пуассона при растяжении:		
	вдоль волокон	ν_1
поперек волокон	ν_2	0,043
Пределе прочности при сдвиге в слое, МПа	$\tau_{в12}$	30,89

Таблица 3 – Механические характеристики стеклопластикового обода, армированного под углом 12,5°

Наименование характеристики	Обозначение	Значение
Модуль упругости при растяжении вдоль оси x , ГПа	E_x	37,04
Модуль упругости при растяжении вдоль оси y , ГПа	E_y	6,641
Модуль сдвига слое обода, ГПа	G_{xy}	5,191
Коэффициент Пуассона при растяжении вдоль оси x	μ_{xy}	0,442
Коэффициент Пуассона при растяжении вдоль оси y	μ_{yx}	0,079



Замечания

Отметим, что ортотропия механических свойств стеклопластика оказывает значительное влияние на форму деформируемого образца под действием нагрузки, а также на его прочностные свойства.

Таким образом, используя полученные соотношения для определения упругих характеристик композита, армированного непрерывными волокнами под произвольным углом, достаточно знать упругие характеристики вдоль направления армирования материала. Эти характеристики могут быть получены в результате экспериментального исследования или при помощи рассмотренной ранее формулы смеси.



Выводы

В этой лекции мы:

- 1) рассмотрели основные виды анизотропии ПКМ в зависимости от типа армирования;
- 2) перечислили основные микромоделли композитов, познакомились с подходами оценки прочности композитов;
- 3) рассмотрели теоретический подход к описания макронеоднородной структуры композита, армированного дискретными волокнами (квазианизотропная структура);
- 4) рассмотрели теоретический подход к описания макронеоднородной структуры слоистого композита, армированного непрерывными волокнами (ортотропная и монотропная структура);



Контактная информация

e-mail: abkartashov@mail.ru;
рабочий телефон : 18-09;
мобильный телефон: +7(926)275-0886.

Спасибо за внимание!