



# Проектирование элементов автомобиля из композиционных материалов

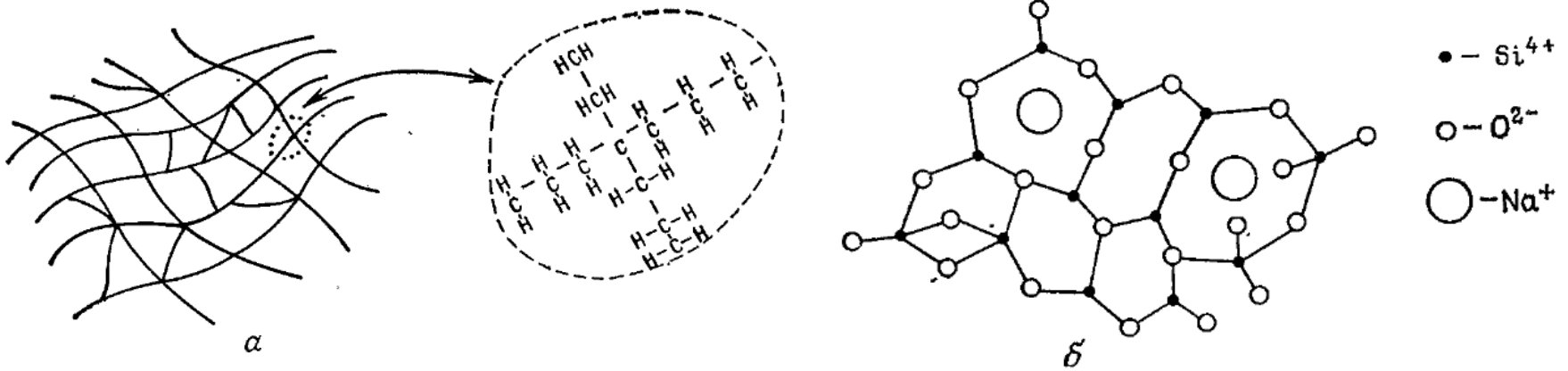
## Лекция 7. «Вязкоупругие свойства конструкционных материалов»

*Составил доцент кафедры «Колесные машины», к.т.н.*

**Карташов Александр Борисович**

Вязкоупругое демпфирование характерно для ряда материалов из полимеров и стекла, этот механизм внутреннего демпфирования имеет много возможностей для промышленного применения.

Полимерные материалы состоят из длинных молекулярных цепочек органического происхождения:

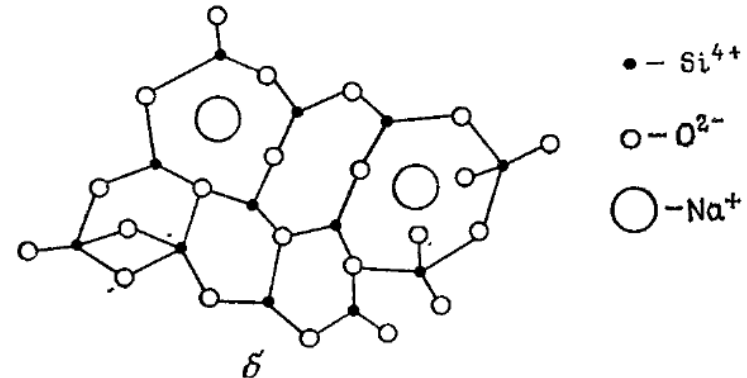
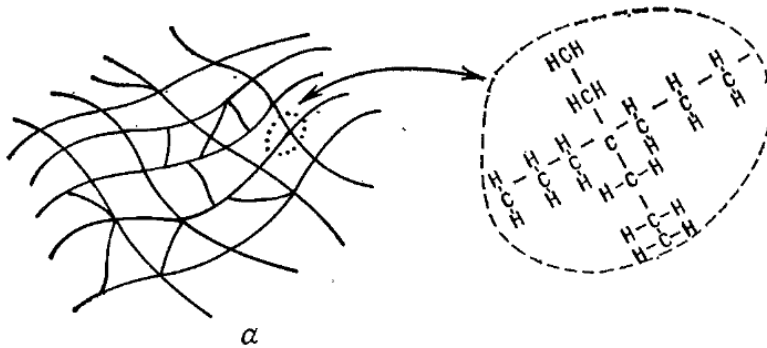


Материалы из полимеров и стекла:

*a* — типичная структура полимерной сетки; *b* — типичная структура стекла (силиката натрия).

Атомы углерода прочно связаны друг с другом и образуют разветвления, в которых длинные цепочки соединятся прочно или непрочно в зависимости от того, как изготовлен полимер.

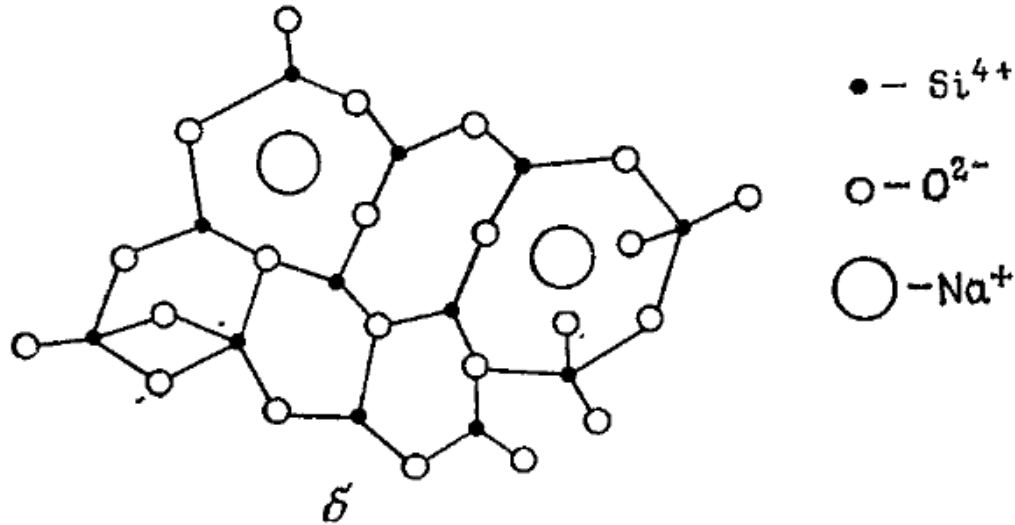
Демпфирование происходит при релаксации и восстановлении полимерной цепочки после ее деформирования; при этом имеет место строгое соответствие между эффектами, обусловленными влиянием частоты колебаний и температуры, поскольку существует непосредственная связь между температурой и характером молекулярного движения.



Материалы из полимеров и стекла:

*a* — типичная структура полимерной сетки; *b* — типичная структура стекла (силиката натрия).

Для стекол характерны не длинные цепочки, как в случае полимеров, а упорядоченность на малых расстояниях и неупорядоченность — на больших (рис.). Неорганические оксиды, из которых состоит стекло, образуют различного вида пластинчатые структуры в зависимости от добавляемых в стекло элементов.



Демпфирование здесь также обусловлено процессами релаксации, протекающими после формирования стекла, причем восстановление происходит не из-за первоначального распределения мелкоячеистых сеток, а связано с условиями термодинамического равновесия.



# Вязкоупругие материалы

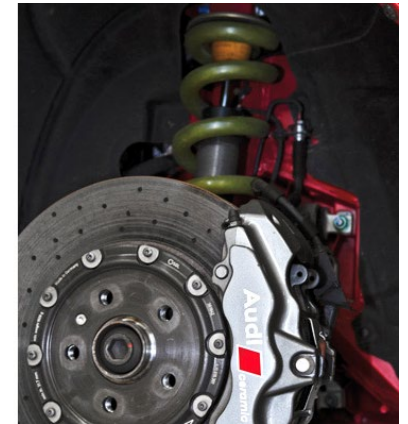


Поскольку в стекле нет перекрестных связей, как это бывает в полимере, в нем может возникать ползучесть – непрерывное, обычно медленное увеличение деформации при действии постоянной нагрузки.

Однако для полимеров с перекрестными связями статическая жесткость порой оказывается довольно большой и ползучесть может не проявиться.

Путем соответствующей обработки можно придать полимерным материалам обширный набор свойств:

- демпфирующих,
- прочностных,
- повышенной выносливости,
- пониженной ползучести,
- термоустойчивости, и.т.д.





# Демпфирование, обусловленное свойствами материала



Мы не станем пытаться объяснить все механизмы внутреннего демпфирования остановимся на некоторых из них, представляющихся наиболее существенными. Эти механизмы приведены в таблице далее, для тех диапазонов частот и температур, в которых они, как правило, наиболее эффективны.

Отметим, что все рассматриваемые здесь механизмы демпфирования связаны с внутренними перестройками микро- или макроструктур, охватывающими диапазон от кристаллических решеток до эффектов молекулярного уровня.

Сюда входят магнитные эффекты (магнитоупругий и магнитомеханический гистерезис), температурные эффекты (термоупругие явления, теплопроводность, температурная диффузия, тепловые потоки) и перестройка атомарной структуры (дислокации, локальные дефекты кристаллических решеток, фотоэлектрические эффекты, релаксация напряжений на границах зерен, фазовые процессы, учитываемые в механике твердого деформируемого тела, блоки в поликристаллических материалах и т. п.).

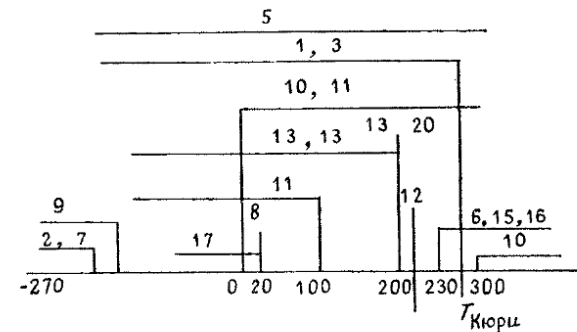
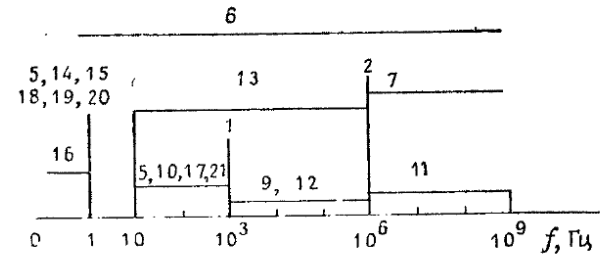


# Демпфирование, обусловленное свойствами материала



## Механизмы демпфирования

Тип перестройки внутренней структуры	Тип демпфирования			
	Линейное		Нелинейное	
	Релаксационное	Резонансное	Гистерезисное	Вязкое
Магнитная	1. Магнитоупругая релаксация 2. Вихревые токи	2. Магнитоупругий резонанс	3. Ферромагнитный гистерезис	
Температурная	5. Термоупругое демпфирование (термодиффузия, тепловые токи)		6. Термический гистерезис	
Атомная	9. Релаксация дислокаций — области низких температур 10. Релаксация дислокаций — область высоких температур	11. Дислокационный резонанс	12. Дислокационный гистерезис	13. Демпфирование, зависящее от истории деформирования
Демпфирование, зависящее не только от дислокаций	15. Релаксация по границам зерен		14. Деформационный гистерезис	16. Вязкоупругая микроскопическая ползучесть с запаздыванием
Точечные дефекты	17. Релаксация на точечных дефектах 18. Демпфирование по Сноуку			
Демпфирование, зависящее от атомов примеси	19. Упорядочивание с использованием решетчатых для твердого деформируемого тела 20. Деформирование по Кестеру 21. Деформирование, обусловленное фазовыми процессами в сплошных средах			
Электронные механизмы	7. Поглощение электронов ультразвуком 8. Фононные и фонон-электронные механизмы			



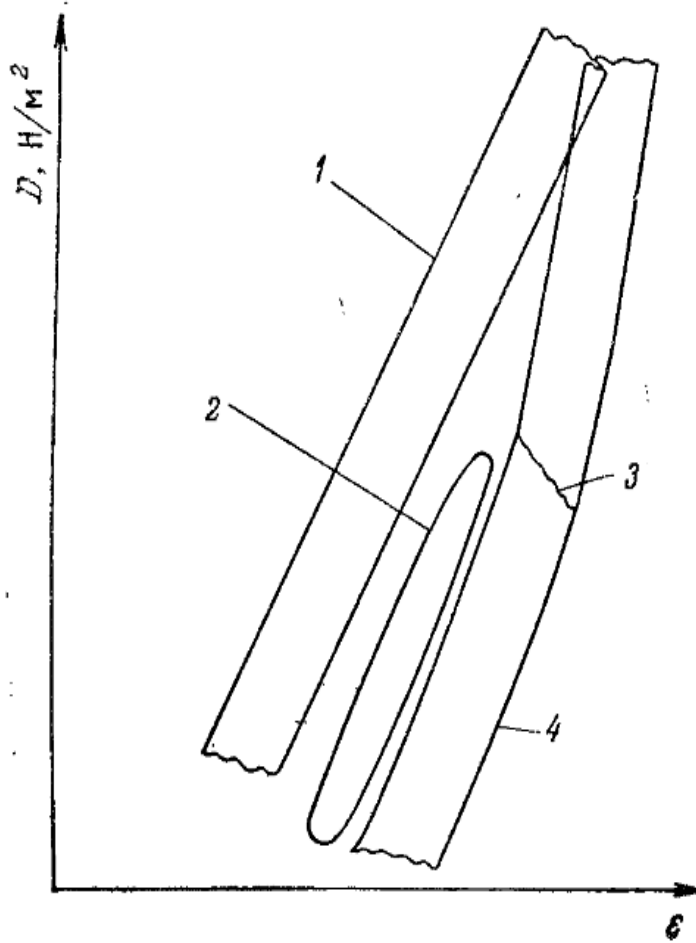


# Демпфирование, обусловленное свойствами материала



Независимо от конкретного вида физического механизма все реальные материалы при циклическом деформировании поглощают некоторую энергию. Подобные эффекты часто носят существенно нелинейный характер, поэтому подробный анализ динамических перемещений с учетом указанных механизмов демпфирования обычно очень затруднен.

С помощью экспериментов на образцах специальных материалов можно получить качественные, а иногда и количественные оценки, используя специальную характеристику — энергию демпфирования  $D$  (т. е. отнесенную к единице объема энергию, поглощенную за один цикл колебаний) — для различных уровней деформаций.



Из рисунка видно, что энергия  $D$  очень мала для большинства обычных конструкционных материалов. Для некоторых весьма уникальных сплавов с высокими демпфирующими характеристиками, в которых может быть усилен тот или иной механизм демпфирования, она оказывается несколько большей и принимает наибольшее из всех возможных значений для большинства полимерных резиноподобных материалов, обычно не используемых в качестве основных конструкционных элементов, причем в них главным является какой-либо один конкретный механизм демпфирования.

Влияние амплитуды деформации  $\epsilon$  на удельную энергию демпфирования  $D$  для различных типов материалов:  
1 - вязкоупругие материалы; 2 - сплавы с высоким демпфированием; 3 - область появления пластических деформаций; 4 - конструкционные сплавы.

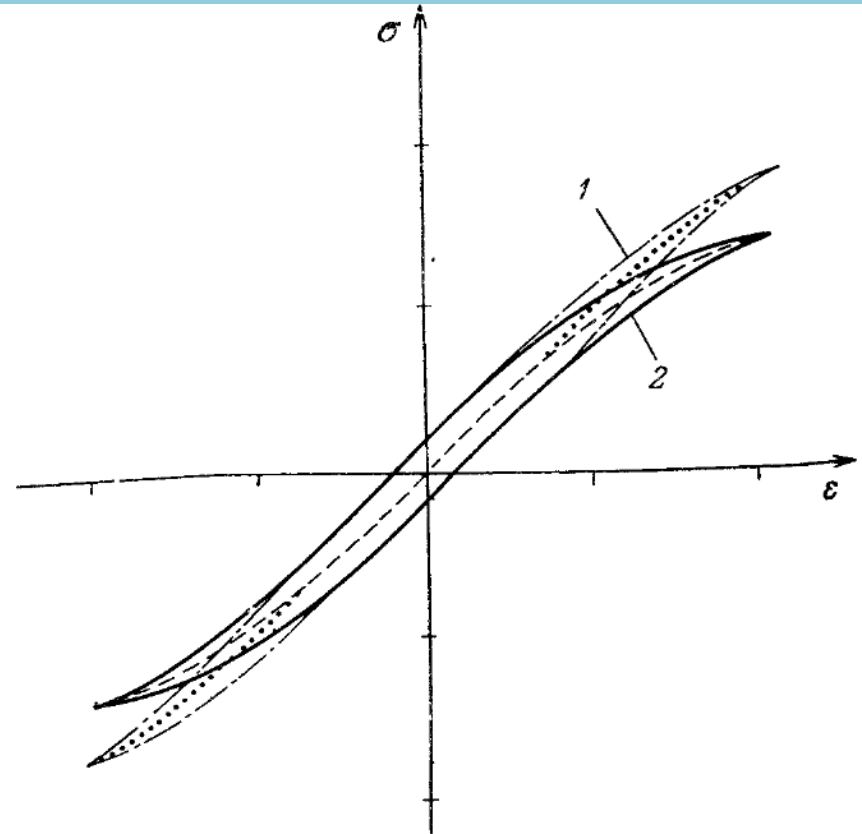


# Количественная оценка внутреннего демпфирования ПКМ



Другой из подходов к получению количественных оценок внутреннего демпфирования материалов состоит в исследовании петли гистерезиса, которая, как предполагается, может быть получена из экспериментов с образцами материала.

На рисунке представлена петля гистерезиса, которая типична для обычных конструкционных сплавов металлов и даже для некоторых сплавов с высокими демпфирующими характеристиками. Петля очень узкая, если материал деформируется без образования пластической области, поэтому ее нелегко обнаруживать непосредственно. Однако серповидный характер петли оказывается довольно общим ее свойством.



Петли нелинейного гистерезиса:  
1 — слабая нелинейность; 2 — сильная нелинейность.



# Количественная оценка внутреннего демпфирования ПКМ



Во многих исследованиях нелинейных динамических перемещений в конструкциях использовались аналитические представления для подобных гистерезисных петель, причем каждой половине петли соответствовала специальная функция, например

$$\sigma_+ = E \left\{ \varepsilon - \frac{\nu}{n} [(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_0^n] \right\},$$

$$\sigma_- = E \left\{ \varepsilon + \frac{\nu}{n} [(\varepsilon_0 - \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_0^n] \right\},$$

$$\text{где } E(\varepsilon) = E / (1 + \alpha |\varepsilon|^\beta).$$

где  $\sigma_+$  — напряжения, соответствующие нагружающей части цикла,  $\sigma_-$  — разгружающей части. Эти же соотношения можно записать в более компактной форме:

$$\sigma_{\pm} = E(\varepsilon) \left\{ \varepsilon \pm \eta(\varepsilon) \varepsilon_0 \left| 1 - \frac{\varepsilon^2}{|\varepsilon_0|^2} \right|^n \right\},$$

$$\text{где } E(\varepsilon) = E / (1 + \alpha |\varepsilon|^\beta).$$

Петли гистерезиса, соответствующие этой зависимости, представлены на риске выше.



# Количественная оценка внутреннего демпфирования ПКМ



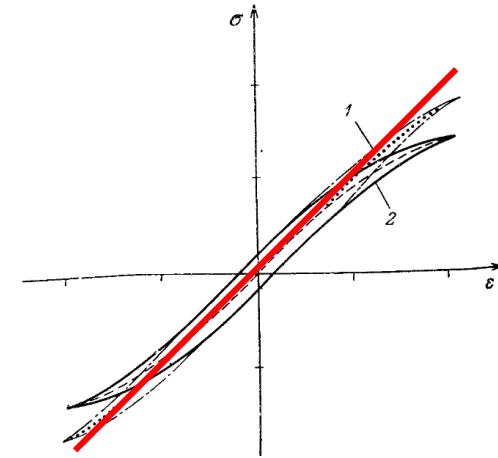
$$\sigma_{\pm} = E(\varepsilon) \left\{ \varepsilon \pm \eta(\varepsilon) \varepsilon_0 \left| 1 - \frac{\varepsilon^2}{|\varepsilon_0^2|} \right|^n \right\},$$

$$\text{где } E(\varepsilon) = E / (1 + \alpha |\varepsilon|^\beta).$$



Определение параметров, входящих в эту зависимость, — непростая задача, при решении которой требуется очень точно определять петли гистерезиса для различных уровней деформаций, частот и температур.

Кроме того, для большинства конструкционных металлов отклонение гистерезисной петли от одиночной кривой исключительно мало, поэтому и демпфирование, обусловленное свойствами материала, незначительно по сравнению с демпфированием, обеспечиваемым обычными широко распространенными способами.



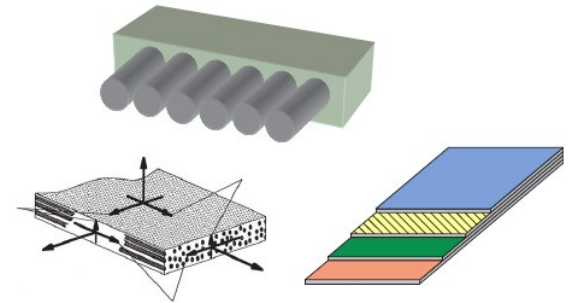


# Количественная оценка внутреннего демпфирования ПКМ



Поэтому вопрос о том, как добиться хорошего соответствия используемых параметров, является академическим, за исключением таких довольно необычных ситуаций, как, например, конструкция, работающая в вакууме, где перестает работать большая часть механизмов демпфирования, или материал, представляющий собой специальный сплав с высокими демпфирующими характеристиками.

Композиционные материалы, используемые для изготовления конструкций с очень высоким уровнем демпфирования, ведут себя совершенно иначе, чем большинство конструкционных металлов или сплавов с высокими демпфирующими характеристиками, что и будет далее показано.



Один из легко наблюдаемых эффектов, обусловленный влиянием потерь на динамическое поведение конструкции, связан со свободным колебанием. Если, например, изогнуть консольную балку, а затем освободить ее, то она начнет периодически колебаться и амплитуда каждого последующего колебания будет меньше предыдущего; отношение амплитуды соседних циклов может служить мерой затухания или потерь (рис.).

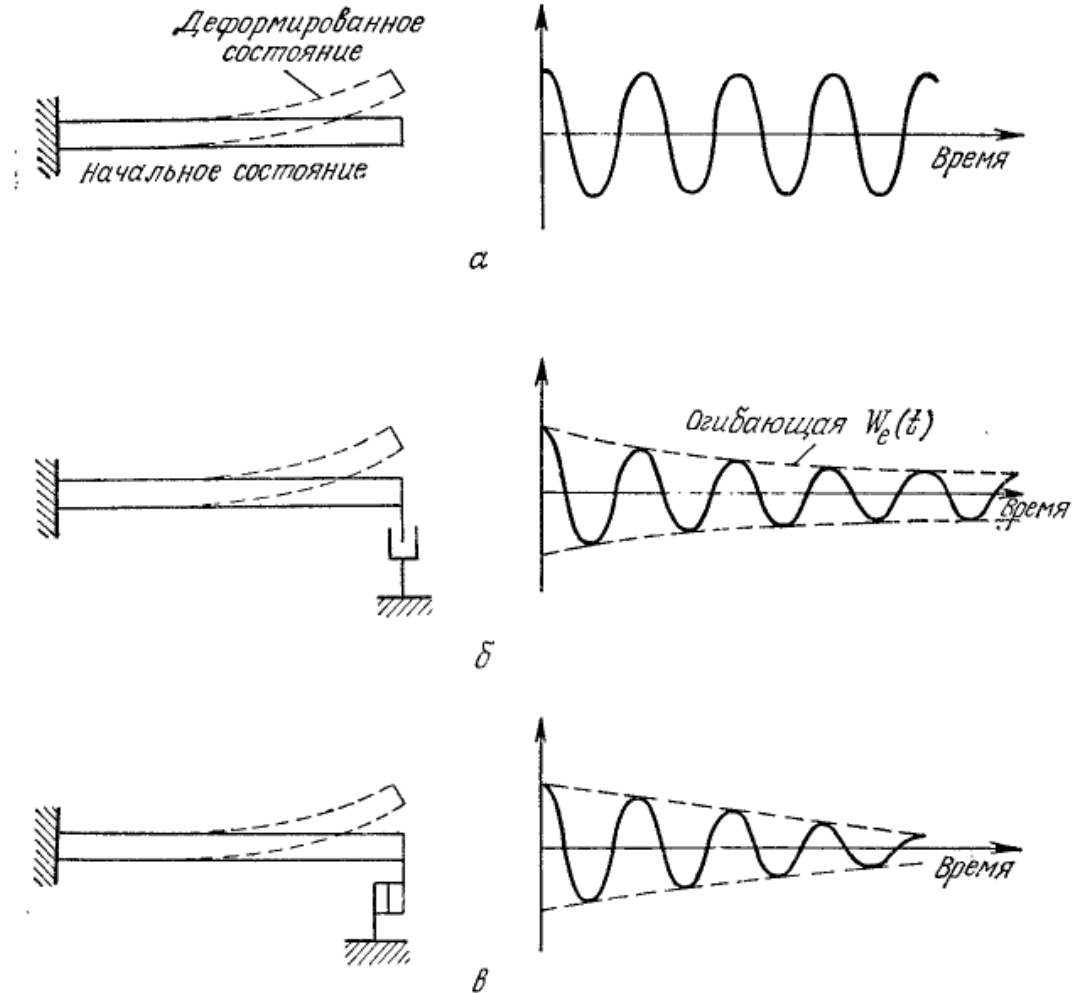
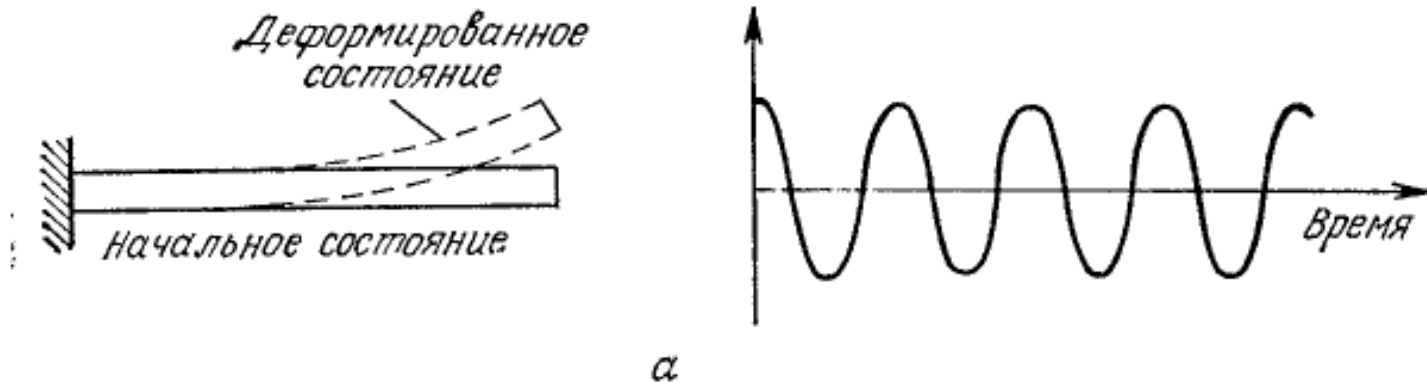


Рис. 2.1. Влияние демпфирования на свободные колебания:

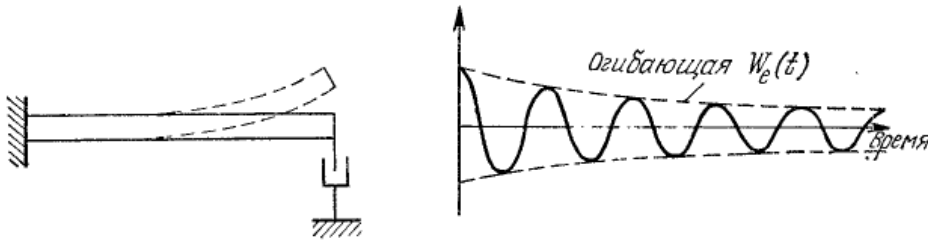
**а**—балка без демпфирования; **б**—балка с вязким демпфированием; **в**—балка с демпфированием, обусловленным трением.

Если балка не имеет потерь, то колебания, однажды начавшись, будут продолжаться бесконечно долго (рис. а).



# Влияние различных типов демпфирования на свободные колебания

Если свободный конец балки соединен с основанием с помощью вязкого демпфера типа автомобильного амортизатора (рис. б), в котором сила, передаваемая на балку, прямо пропорциональна по величине и противоположна по направлению переменной скорости, то колебания будут затухать со временем, причем время затухания будет зависеть от «силы» демпфирования.



Теоретически движение до полного прекращения колебаний будет продолжаться бесконечно долго, однако на практике другие, независимые от скорости механизмы демпфирования будут в конце концов оказывать большее влияние и приведут систему в состояние покоя за конечное время.

Уравнение затухающих колебаний:  $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$2\beta = \frac{r}{m}$ ;  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$   $r$  – коэффициент сопротивления  $F \sim rv$ ,  
 $k$  – коэффициент квазиупругой силы,  
 $\omega_0$  – собственная частота системы

При не слишком большом затухании  $\beta < \omega_0$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{-\beta T} \quad \text{Декремент затухания}$$

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T \quad \text{Логарифмический декремент затухания}$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e \quad \text{Добротность}$$

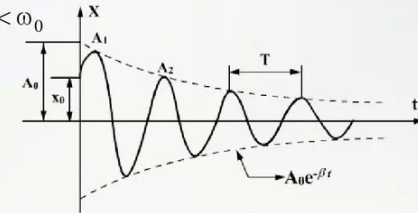
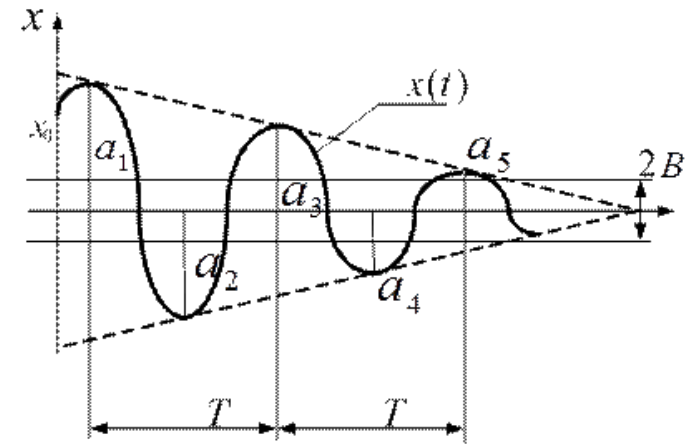
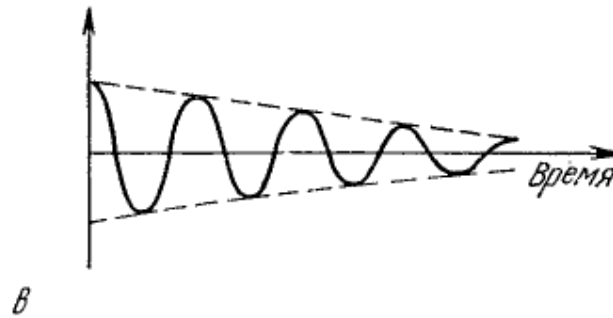
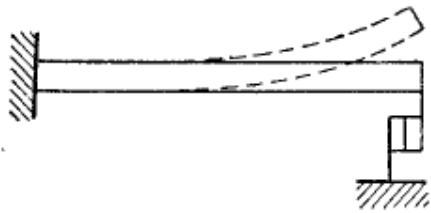


рис 7.8

Энергия колеблющейся системы  $E = E_0 e^{-2\beta t}$

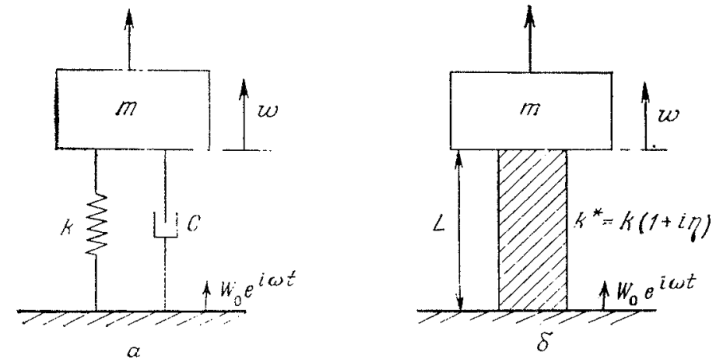
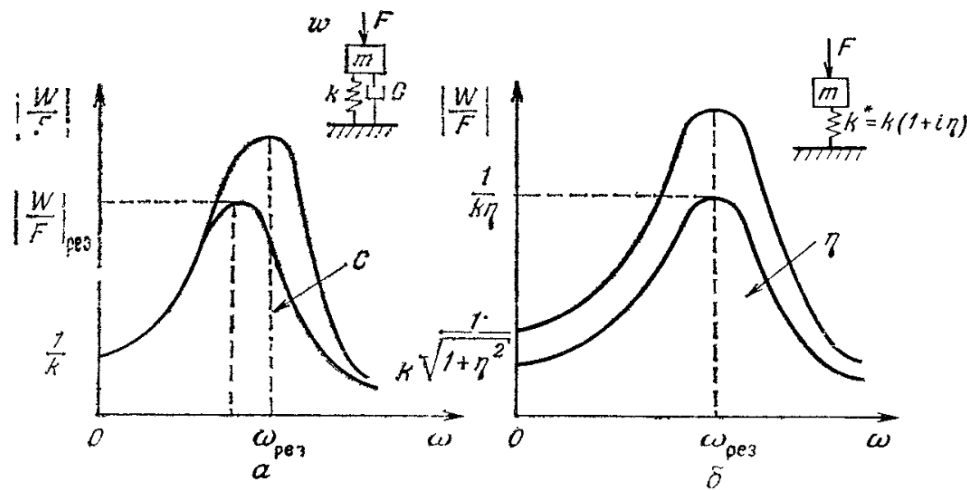
$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Один из таких механизмов представлен на (в) и представляет собой сухое трение, при этом демпфирующая сила постоянна, но изменяет знак через каждый полцикл, так что в каждый момент времени она имеет направление, противоположное скорости.



Подобное демпфирование приводит систему в состояние покоя за конечный промежуток времени. Очевидно, скорость затухания колебаний демпфированных конструкций может, вообще говоря, служить характеристикой демпфирования.

Функции, характеризующие динамические перемещения для системы с одной степенью свободы и вязким и гистерезисным демпфированием, показаны соответственно на рис. а и б. ( $|W/F|$  – относительная динамическая реакция)



Возбуждение колебаний через опору в системе с одной степенью свободы:  
 а – вязкое демпфирование; б – гистерезисное демпфирование.

Динамические перемещения при колебаниях с демпфированием:

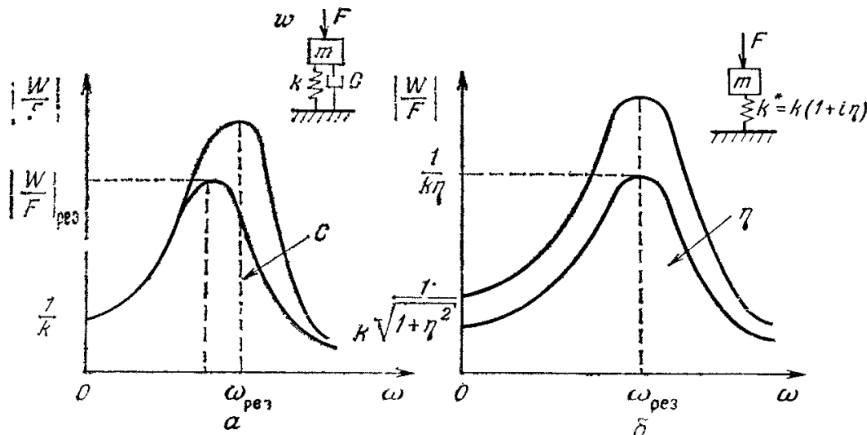
а – вязким; б – гистерезисным.



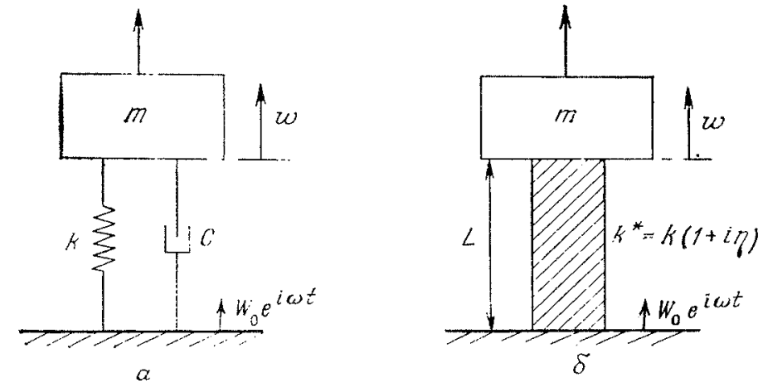
# Сравнение вязкого и гистерезисного демпфирования



Можно видеть, что максимум функции  $|W/F|$  при вязком демпфировании достигается при частоте, более низкой, чем собственная частота недемпфированных колебаний, а в случае гистерезисного демпфирования резонансный пик всегда соответствует собственной частоте недемпфированных колебаний.



Динамические перемещения при колебаниях с демпфированием:  
а — вязким; б — гистерезисным.



Возбуждение колебаний через опору в системе с одной степенью свободы:  
а — вязкое демпфирование; б — гистерезисное демпфирование.

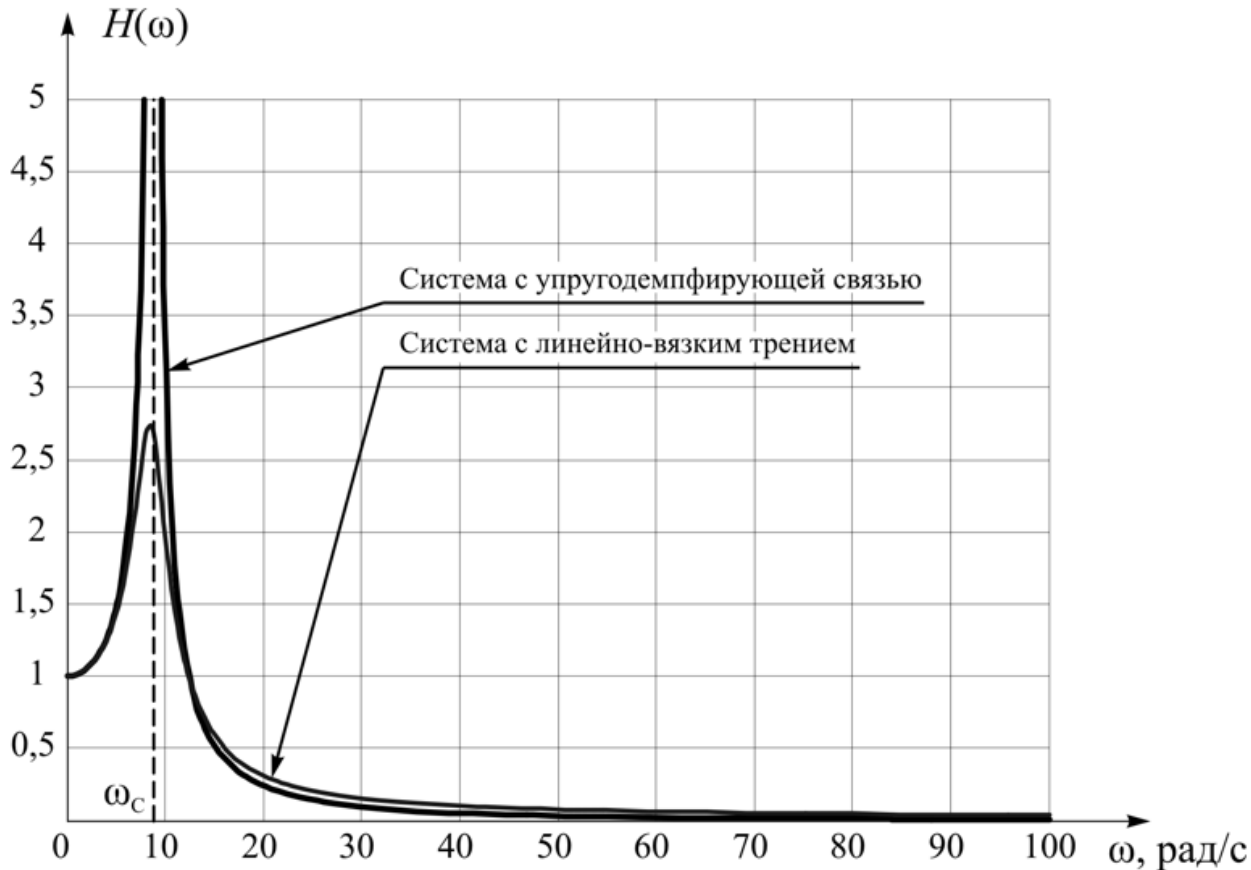
Во многих задачах, например в задаче о настроенном демпфере, присоединенном к поверхности конструкции, колебания в системе с одной степенью свободы возбуждаются не только внешней силой, действующей на массу  $m$ , но и путем периодических перемещений опоры, к которой присоединена эта система



# АЧХ механических систем с гистерезисным и линейно-вязким трением



Анализ графиков показывает, что при гистерезисном демпфировании из-за методических ограничений кривая АЧХ имеет резонанс на собственной частоте.



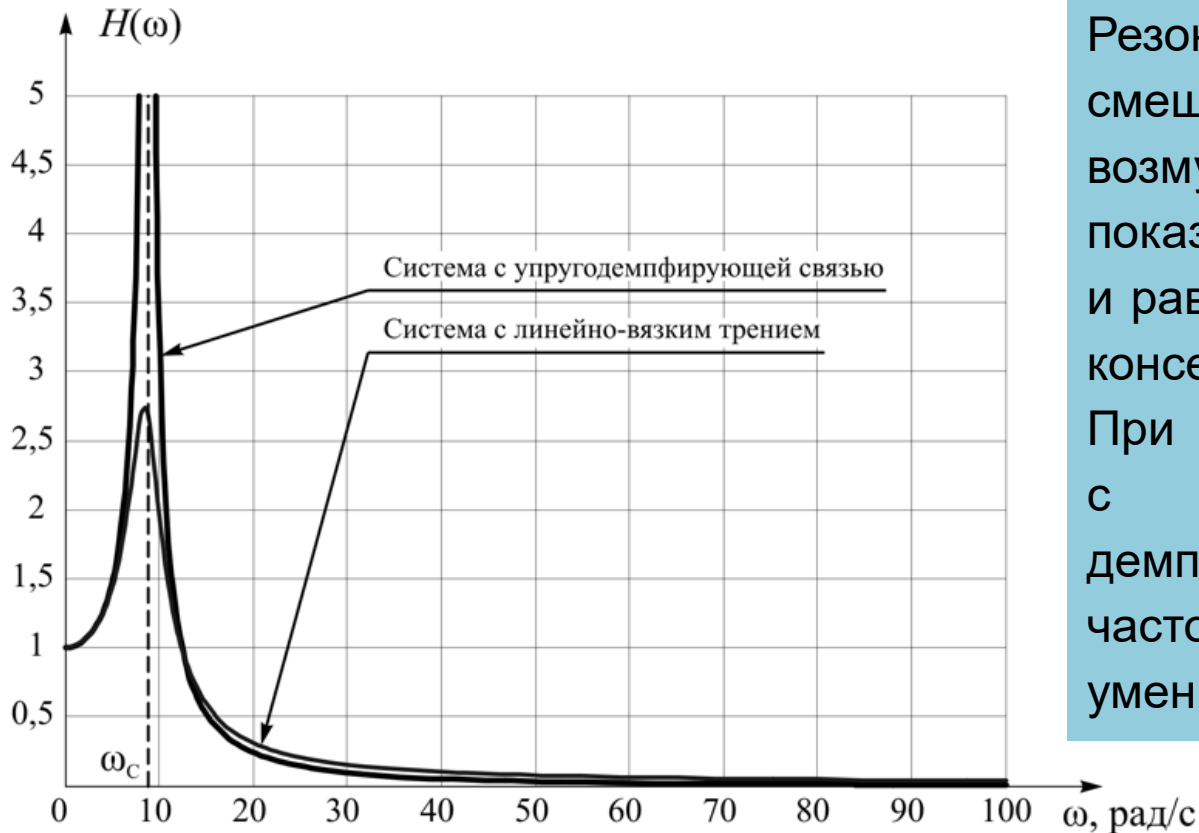
РАЧХ механических систем с гистерезисным и линейно-вязким трением



# АЧХ механических систем с гистерезисным и линейно-вязким трением



Амплитуда резонансных явлений в несколько раз больше, чем при линейном трении, что вызвано тем, что мера гистерезисного демпфирования меньше линейно-вязкого.



Резонансная частота не смещаются с ростом частоты возмущения и изменении показателей демпфирования и равна собственной частоте консервативной системы. При линейно-вязком трении с ростом меры демпфирования собственная частота колебаний уменьшается.

РАЧХ механических систем с гистерезисным и линейно-вязким трением

Следует отметить особенность гистерезисного демпфирования ПКМ как частотно-независимого вида трения. При любой частоте величина демпфирования остается практически постоянной.

Для последующего рассмотрения изделий из ПКМ как упругодемпфирующих построим простую механическую систему с вязкоупругой связью колеблющейся массы и источника возмущения, представленную на рисунке

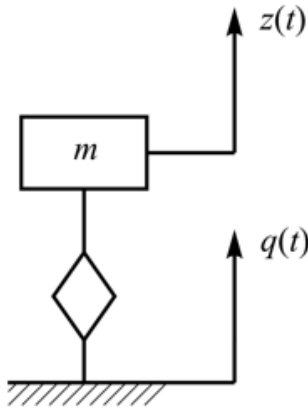


Рисунок – Система с упругодемпфирующей связью

Дифференциальное уравнение, описывающее движение массы при кинематическом возмущении:

$$m\ddot{z} + P = 0,$$

где  $P$  – действующая на массу упругодемпфирующая сила.



В основе математического описания демпфирования лежит реология – наука о деформировании и течении материала.



Одно из направлений, в котором развивается реология, связано с теорией микропроцессов и основано на дискретных моделях современной физики, описывающих внутренние процессы, протекающие в материале на уровне межатомных и молекулярных взаимодействий.

Другое направление связано с теорией макропроцессов и основывается на феноменологических аспектах физики явления.



# Вязкоупругие свойства композитов

Для описания вязкоупругих свойств композитов создано большое количество аналого-механические моделей, связывающих между собой напряжения и деформации, как достаточно простых (1) и более сложных (2):

- 1) Гука, Ньютона, Максвелла, Фойгта, Кельвина, Зенера и др.;
- 2) модели с применением производных дробного порядка.

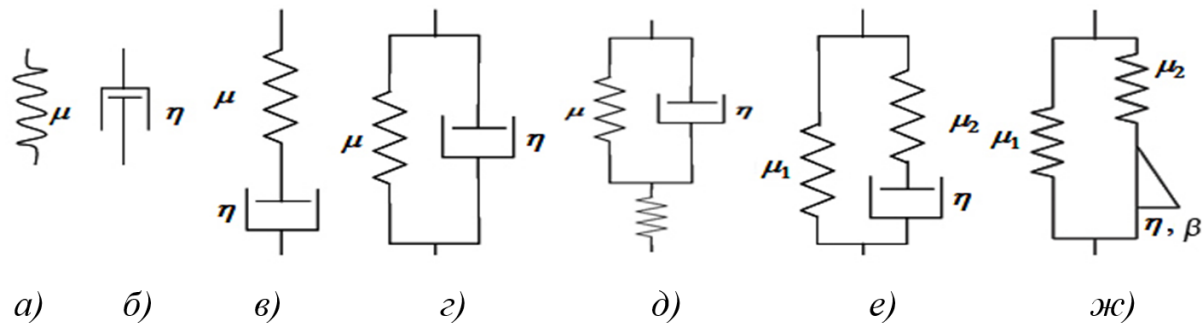


Рис. 2.7. Аналого-механические модели: *а* – Гука; *б* – Ньютона; *в* – Максвелла; *г* – Фойгта; *д* – Кельвина; *е* – Зенера; *ж* – обобщенная модель

Реализация этих моделей возможна в современных программных комплексах анализа механики деформируемого твердого тела.



# Макроскопический подход



Макроскопический подход в реологии описывается уравнениями состояния, которые можно записать в самой общей форме:

$$f[D_1(\sigma), D_2(\varepsilon), t, T, \dots] = 0,$$

где  $f$  – вектор-функция,

$\sigma$  – тензор напряжений,

$\varepsilon$  – тензор деформаций,

$t$  – время,

$T$  – температура,

другие переменные описывают физико-химические свойства среды и условия внешней обработки,

$D_1$  и  $D_2$  – дифференциальные, интегральные или интегродифференциальные операторы, в общем случае нелинейные.



Уравнения состояния обычно моделируют поведение материала и в зависимости от влияния внешнего воздействия:

- внешние силы,
- температурные и магнитные поля,
- химические реакции, радиация и т. п.

описывают материалы с той или иной степенью приближения.

Обычно для построения математической модели каждого из исследуемых материалов используются экспериментальные данные.



У многих материалов, например, полимерных материалов, бетонов, композиционных материалов и т.д. при нормальных температурах и условиях окружающей среды, а у металлических материалов при нагреве проявляются в процессе эксплуатации **реономные свойства** – свойства материала, которые существенно зависят от времени.

Процесс изменения деформаций со временем при неизменном напряжении называется **ползучестью**, а процесс уменьшения напряжения в теле при неизменной деформации называется **релаксацией**.

Деформированное тело, которое проявляет те или иные реономные свойства называется вязкоупругим телом.



# Принцип суперпозиции Больцмана

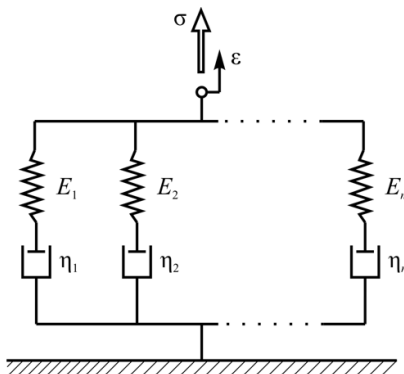


Свойства вязкоупругости занимают промежуточное положение между свойствами упругой и вязкой среды. Для приближенного описания свойств вязкоупругости используется **принцип суперпозиции Больцмана**.

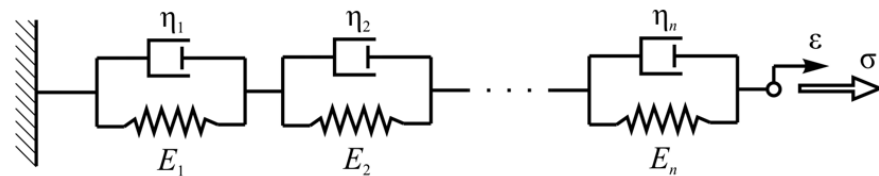


Принцип суперпозиции Больцмана может быть применен для всех полимеров, если их структура не зависит от приложенных силовых факторов и не изменяется со временем.

Принцип суперпозиции Больцмана сводится к предположению о том, что все воздействия на среду независимы и аддитивны, причем ее реакция на эти воздействия линейна. Принцип Больцмана представляет основу определения понятия о линейной вязкоупругой среде.



Модель обобщенного тела Максвелла



Модель обобщенного тела Кельвина



# Принцип суперпозиции Больцмана



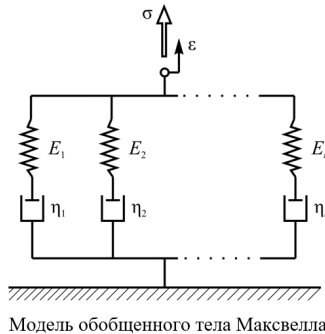
Принцип суперпозиции Больцмана позволяет описывать линейное вязкоупругое поведение системой дифференциальных уравнений вида:

$$L\sigma = D\varepsilon.$$

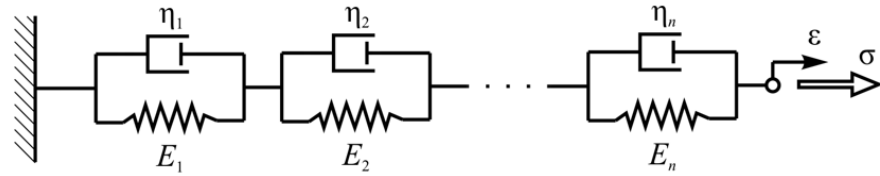
где  $L$  и  $D$  – линейные дифференциальные операторы по времени.

Это выражение эквивалентно способу описания вязкоупругого поведения моделей, состоящих из упругих пружин с различными модулями упругости и вязких элементов с различными вязкостями.

Удлинение пружины пропорционально приложенной силе, т.е. напряженно-деформированное состояние пружины описывается законом Гука, который имеет свойства идеальной упругости, а вязкий элемент описывается законом Ньютона.



Модель обобщенного тела Максвелла



Модель обобщенного тела Кельвина

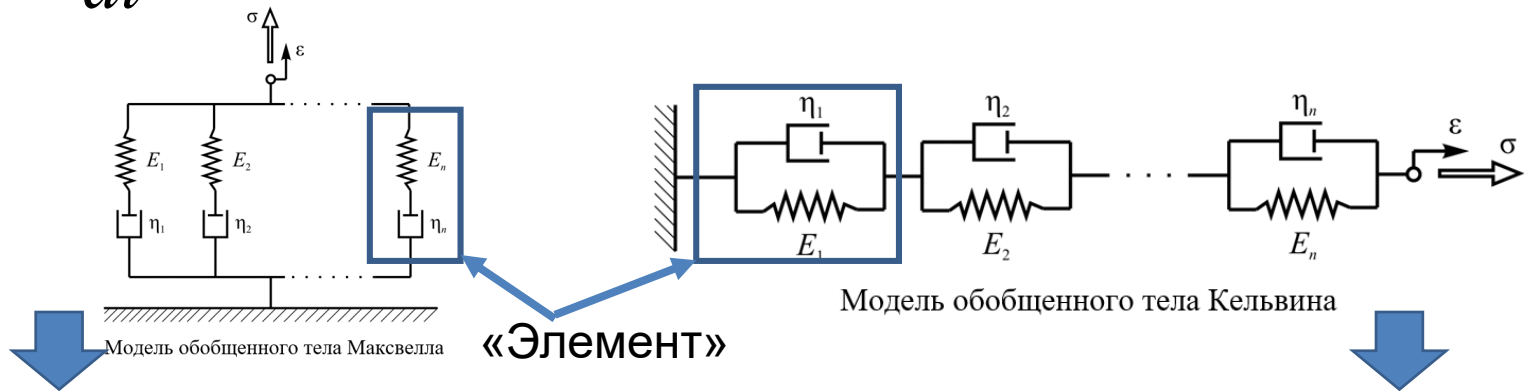


# Свойства вязкоупругости



Таким образом, вязкоупругая среда занимает промежуточное положение между двумя материями, описываемыми уравнениями:

$$\sigma(t) = \begin{cases} E\varepsilon(t) & \text{- закон Гука} \\ \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} & \text{- свойства идеально вязкой жидкости (закон Ньютона).} \end{cases}$$



Деформация всех элементов одинакова, а напряжение рассчитывается как сумма напряжений в параллельных соединённых элементах.

Суммарное напряжение в каждом элементе одинаково, а деформация определяется как сумма деформаций элементов.

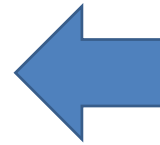


# Модель тела Максвелла



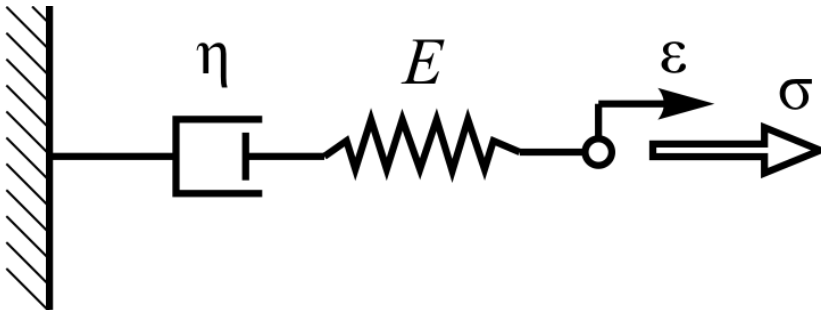
Впервые закон Гука для упругого тела и Ньютона для вязкой жидкости были объединены Максвеллом в одно уравнение состояния вязкоупругой среды.

$$\sigma(t) + \frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$



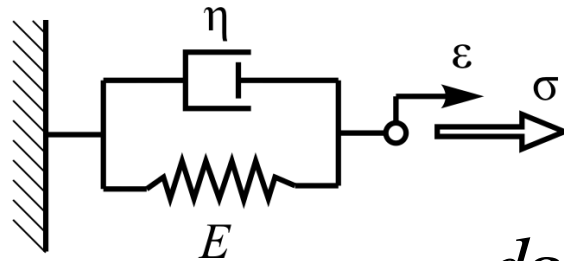
Уравнение можно получить сложив деформации демпфера и пружины, а затем продифференцировав обе части равенства.

где  $E$  – коэффициент жесткости пружины, соответствующий модулю Юнга первого рода,  $\eta$  – коэффициент вязкости демпфера.

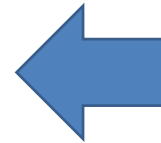


Как следует из уравнения, при постоянном во времени напряжении деформация растет с постоянной скоростью, пропорциональной напряжению, т.е. материал течет подобно вязкой жидкости. Однако такие свойства конструкционных материалов не подтверждаются экспериментальными исследованиями.

Другая популярная классическая модель – модель Кельвина–Фойхта основана на параллельном соединении пружины и демпфера



$$\sigma(t) = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$



Уравнение можно получить сложив напряжения демпфера и пружины.

Как следует из уравнения при постоянной деформации напряжение постоянно, т.е. это уравнение не отражает релаксации напряжений, что является его недостатком. Модель Кельвина–Фойхта подходит для вязкоупругих тел, которые не обнаруживают вязкого течения.

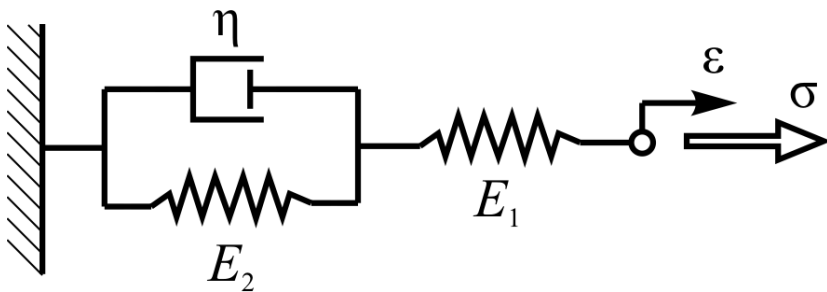


# Модель стандартного линейного твердого тела или моделью Зенера



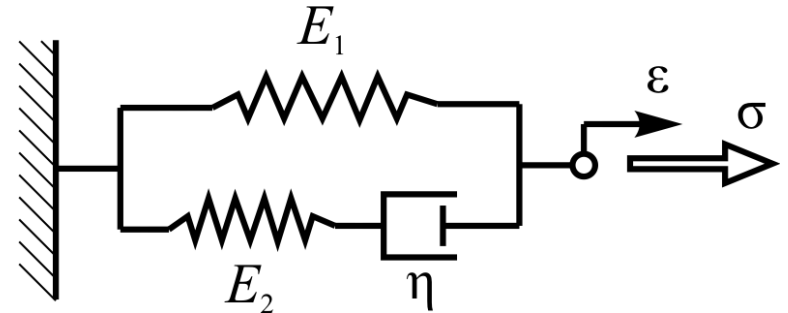
Простые модели Максвелла и Кельвина–Фойхта не дают точного полного описания поведения реальных сред. Усложненные модели обладают большей гибкостью в отражении процессов в фактических материалах. Так, существует трехпараметрическая модель, состоящая из двух упругих и одного вязкого элементов.

Модель 1



$$\sigma(t) + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon(t) + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

Модель 2



$$\sigma(t) + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma(t)}{dt} = E_1 \varepsilon(t) + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

Эта в отличие от моделей тел Максвелла и Кельвина-Фойхта отражает обе стороны явления ползучести – собственно ползучесть или последствие и релаксацию напряжений, а также явление обратной ползучести. Однако количественно эта модель плохо согласуется с экспериментами.

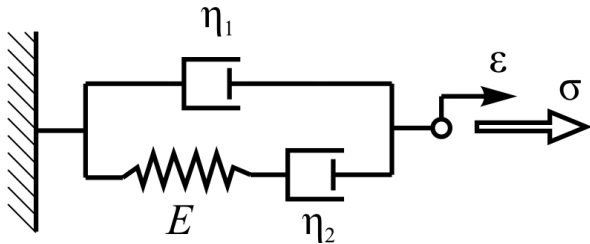


# Трёхпараметрические модели вязкой жидкости или модель анти-Зенера,



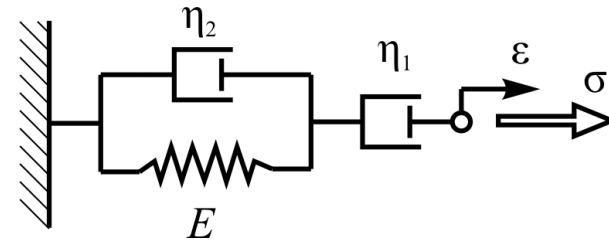
Эта модель состоит из двух вязких и одного упругого элементов

Модель 1



$$\sigma(t) + \frac{\eta_2}{E} \frac{d\sigma(t)}{dt} = (\eta_1 + \eta_2) \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2}$$

Модель 2



$$\sigma(t) + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E} \frac{d\sigma(t)}{dt} = \eta_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2}$$

Полезно заметить, что с точки зрения формы записи определяющих уравнений аналогом стандартного линейного твердого тела является узел Максвелла, параллельно соединенный с упругим элементом, а аналогом модели вязкой жидкости – узел Максвелла, параллельно соединенный с вязким элементом.

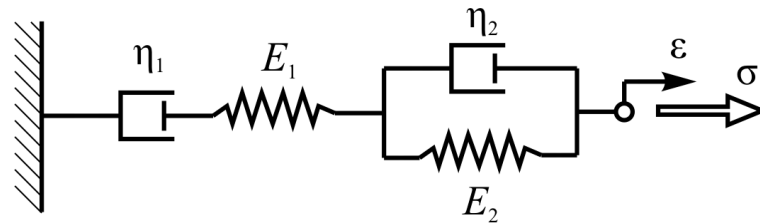


# Четырехпараметрическая модель



Для более точного описания вязкоупругой среды может быть использована четырехпараметрическая модель.

Четырехпараметрическая модель, состоящая из двух упругих и двух вязких элементов, может рассматриваться как последовательно соединенные узел Максвелла и узел Кельвина-Фойхта

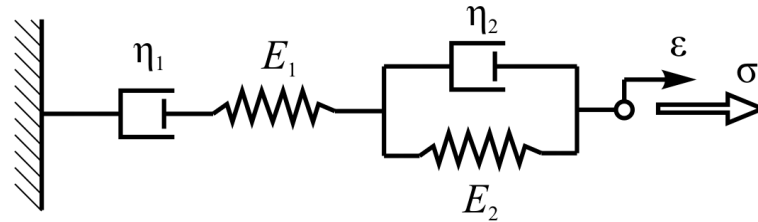


$$\alpha_0 \sigma(t) + \alpha_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} + \alpha_2 \frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} = \beta_0 \varepsilon(t) + \beta_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \beta_2 \frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2}$$

где величины  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  представляют собой комбинации коэффициентов  $E$  и  $\eta$  и зависят от способа соединения элементов в модели.



# Четырехпараметрическая модель



$$\alpha_0 \sigma(t) + \alpha_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} + \alpha_2 \frac{d^2 \sigma(t)}{dt^2} = \beta_0 \varepsilon(t) + \beta_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2}$$

Существует несколько эквивалентных форм этой модели. Четырехпараметрическая модель способна описать все три основных типа поведения вязкоупругой среды. Так, она объединяет в себе мгновенную упругую реакцию (за счет свободного упругого элемента  $E_1$ , вязкое течение (за счет свободного вязкого элемента  $\eta_1$  и, наконец, запаздывающую упругую реакцию (за счет узла Кельвина-Фойхта).



# Обобщение трехпараметрической и четырех параметрической модели

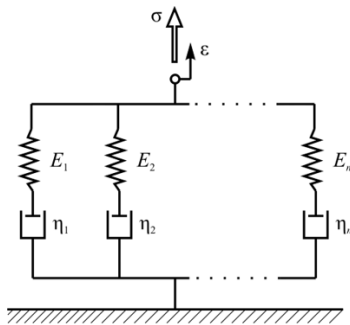


Уравнения состояния любой трех- или четырехпараметрических моделей можно записать общей формулой:

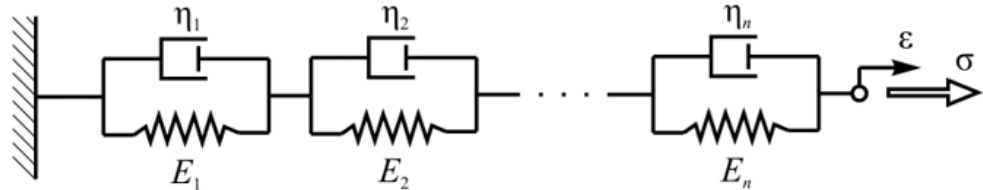
$$\alpha_0 \sigma(t) + \alpha_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} + \alpha_2 \frac{d^2 \sigma(t)}{dt^2} = \beta_0 \varepsilon(t) + \beta_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2}$$

где величины  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  представляют собой комбинации коэффициентов  $E$  и  $\eta$  и зависят от способа соединения элементов в модели.

Более совершенные модели будут построены используя большее количество элементов. Сложные вязкоупругие реологические модели имеют форму обобщенной модели Максвелла или обобщенной цепи Кельвина.



Модель обобщенного тела Максвелла



Модель обобщенного тела Кельвина



Чем больше элементов присутствует в обобщенной модели, тем более точной является модель, описывающая поведение материала, но тем больше коэффициентов следует получить экспериментально, чтобы определить уравнение состояния:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \sigma(t) + \alpha_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} + \alpha_2 \frac{d^2 \sigma(t)}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^3 \sigma(t)}{dt^3} + \dots = \\ = \beta_0 \varepsilon(t) + \beta_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^3 \varepsilon(t)}{dt^3} + \dots \end{aligned}$$

Эта модель обеспечивает достаточную точность описания поведения вязкоупругих материалов, однако они требуют знания достаточно большого количества экспериментальных данных для определения коэффициентов модели.



# Дробно-дифференциальное обобщение стандартной трехпараметрической модели

Перечисленные выше уравнения с целочисленными производными, описывающие различные модели, обладают недостаточной адекватностью с точки зрения качества модели или имеют большое число слагаемых, поэтому для качественного описания рассматриваемых моделей используется аппарат дробных производных.

Обозначим  $\tau = \frac{\eta}{E}$ ,  $D^\alpha$  - интегродифференциальный оператор с показателем  $\alpha$ .

Тогда можно рассмотреть вязкоупругое уравнение состояние в дробных производных, предложенное Блэром в форме:

$$\sigma(t) = E\tau^\alpha D^\alpha[\varepsilon(t)]$$

При  $\alpha=0$  формула принимает закон Гука:  $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$

При  $\alpha=1$  формула принимает закон Ньютона (линейного демпфера):  $\sigma(t) = E\tau\dot{\varepsilon}(t)$

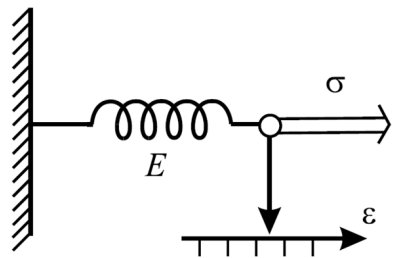


$$\sigma(t) = E\tau^\alpha D^\alpha[\varepsilon(t)]$$

При  $\alpha = 0$  (закон Гука) напряжения зависят только от текущего значения деформации и не зависят от предыдущих состояний системы, т.е. в системе отсутствует память.

При  $\alpha = 1$  (закон Ньютона) важны предыдущие состояния системы, т.е. для определения напряжений важно знать как система оказалась в текущем состоянии.

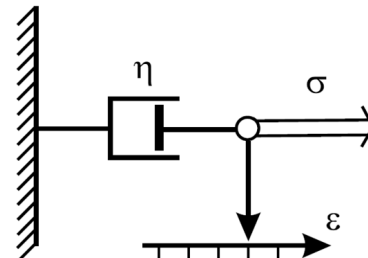
Для любого  $0 < \alpha < 1$  получаем систему с частичной памятью. Дробные производные представляют более широкий диапазон возможностей при моделировании вязкоупругих тел с ярко выраженной зависимостью характеристик от истории нагружения.



$$\alpha = 0$$

Абсолютно упругое тело

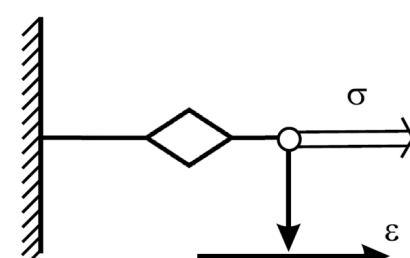
$$\sigma(t) = E\varepsilon(t)$$



$$\alpha = 1$$

Абсолютно вязкое тело

$$\sigma(t) = E\tau\dot{\varepsilon}(t)$$



$$0 < \alpha < 1$$

Вязкоупругое тело

$$\sigma(t) = E\tau^\alpha \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha}$$



# Дробно-дифференциальном обобщении моделей вязкоупругого тела



Для рассмотренных выше моделей вязкоупругости можно получить аналоги в дробно-дифференциальном обобщении. Определяющие уравнения для вышеперечисленных моделей с использованием аппарата дробных производных будут иметь вид:

1. Дробно-дифференциальное обобщение модели Максвелла:

$$\sigma(t) + \tau^{\alpha} {}_0 D_t^{\alpha} [\sigma(t)] = E \tau^{\beta} {}_0 D_t^{\beta} [\varepsilon(t)], \quad 0 < \alpha, \beta < 1.$$

2. Дробно-дифференциальное обобщение модели Кельвина:

$$\sigma(t) = E \left[ \tau^{\alpha} {}_0 D_t^{\alpha} [\varepsilon(t)] + \tau^{\beta} {}_0 D_t^{\beta} [\varepsilon(t)] \right], \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq 1.$$

3. Дробно-дифференциальное обобщение модели стандартного линейного тела:

$$\sigma(t) + \tau^{\alpha} {}_0 D_t^{\alpha} \sigma(t) = E \left[ \varepsilon(t) + \theta^{\alpha} {}_0 D_t^{\alpha} \varepsilon(t) \right], \quad 0 < \alpha < 1.$$



Эта эмпирическая модель, предложенная Капуто и Майнардн в 1971 г., позволяет наиболее точно описать поведение реальных объектов.



# Дробно-дифференциальном обобщении моделей вязкоупругого тела



4. Модель Бэгли–Торвика. Продолжив развитие дробно-дифференциальной феноменологии за пределами описанного выше обобщения стандартной модели, Бэгли и Торвик взяли уравнение с различными порядками дробных производных деформации и напряжения:

$$\sigma(t) + \tau^\beta D^\beta [\sigma(t)] = E [\varepsilon(t) + \theta^\alpha D^\alpha [\varepsilon(t)]] \quad (0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1).$$

5. Модель Работнова:

$$\sigma(t) + \tau D^\rho [\sigma(t)] = \tau E D^\rho [\varepsilon(t)],$$

где  $\tau = 1/\beta$ , а  $\rho = \alpha + 1$ . Таким образом, модель Работнова является частным случаем 4-параметрической модели Бэгли–Торвика. При  $\alpha = 0$  она совпадает с определяющим уравнением Максвелла

6. Обобщенная модель в дробных производных:

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^p \tau^{\beta_k} D^{\beta_k} [\sigma(t)] = E \left[ \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^q \theta^{\alpha_k} D^{\alpha_k} [\varepsilon(t)] \right] \quad (0 < \alpha_k < 1, 0 < \beta_k < 1).$$



# Определение производной дробного порядка



Существует несколько разных способов обобщить понятие дробной производной, но все они совпадают с понятием обычной производной в случае натурального порядка!

1. Одним из способов нахождения производной дробного порядка является функция, называемая производной Римана-Лиувилля, для которой выражение дробной производной порядка при  $0 \leq \nu < 1$  записывается следующим образом:

$${}_a D_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} D_x \int_a^x (x-\xi)^{-\nu} f(\xi) d\xi,$$

где  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$  – гамма-функция.



# Определение производной дробного порядка



$${}_a D_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} D_x \int_a^x (x-\xi)^{-\nu} f(\xi) d\xi,$$

где  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$  – гамма-функция.

В производной Римана-Лиувилля операция дробного интегрирования предшествует операции кратного дифференцирования:

$${}_a f^{(v)} f(x) = D_{x a}^n I_x^{n-v} f(x),$$

где  $D_x^n$  – дифференциальный оператор, соответствующего порядка;

$I_x^{n-v}$  – интегральный оператор, соответствующего порядка.



# Определение производной дробного порядка



2. Наряду с дробной производной Римана-Лиувилля часто используется другое определение, называемое производной Капуто. При такой конструкции дробной производной порядок выполнения операций интегрирования и дифференцирования обратный:

$${}^{(v)}_a f(x) = I_x^{n-v} D_x^n f(x),$$

т.е. в такой постановке операции кратного дифференцирования предшествует операция дробного интегрирования.

Дробные производные Римана-Лиувилля и Капуто в общем случае не совпадают, т.к. они имеют только математические основы и используются как аппарат, предназначенный для наиболее точного описания протекания физических процессов в рассматриваемых объектах, а также согласия данных расчета и эксперимента. Кроме этого, существуют форма записи дробной производной Маршо, которая используется для дифференцирования достаточно хороших функций.



# Определение производной дробного порядка



3. Существует еще одна конструкция производных дробного порядка, которая носит название дробной производной Грюнвальда-Летникова с конечным пределом. Определение получено путем рассмотрения конечных разностей, т.е. определение получено из рассмотрения приращения функции и аргумента и определения производной натурального порядка. Рассматривая всю вещественную ось, можно обобщить понятие разностного оператора, используя гамма-функцию, тогда выражение для дробной производной Грюнвальда-Летникова будет иметь вид:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{j! \Gamma(\alpha - j + 1)} f(t - jh).$$

Производные Римана-Лиувилля и Грюнвальда-Летникова в общем случае совпадают.



# Решение интегрально-дифференциальных уравнений содержащих производные дробных порядков



Для решения интегрально-дифференциальных уравнений содержащих производные дробных порядков применяются следующие методы:

- аналитические (применяют в основном для ограниченного класса линейных уравнений);
- численные методы, которые аналогичны методам конечных разностей и римановых сумм;
- численные методы, которые основаны на представлении функций рядами или ортогональными полиномами;
- операционные методы, которые основаны на интегральных преобразованиях Лапласа, Фурье и т.д.



# Решение интегрально-дифференциальных уравнений содержащих производные дробных порядков



Аналитические методы применяют только в том случае, если удастся найти соответствующую функцию Грина для решаемого уравнения. Решения уравнений в этом случае включают в себя комбинацию функций Миттаг-Леффлера, которые являются обобщением экспоненциальной функции.

Численные методы основываются на определении дробных производных в постановке Грюнвальда-Летникова, Интегрально-дифференциальные уравнения, которые описывают соответствующие системы являются уравнениями нецелых порядков, обобщением формул конечных разностей и римановых сумм.

Применение классического операционного исчисления Лапласа к дифференциальным уравнениям дробного порядка приводит к характеристическим уравнениям иррационального типа и возможно лишь для линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами.



# Основной принцип решения задач вязкоупругости



Принцип решения задач вязкоупругости основывается на принципе Вольтерра, который заключается в том, что решение задачи для вязкоупругого тела может быть получено так же, как решение задачи для упругого тела, если в процессе решения с интегральными операторами обращаться как с упругими постоянными. В итоге решение будет представлено как произведение функции от упругих постоянных и от пространственных координат на известную функцию времени.

Модель вязкоупругой среды можно представить в виде закона Гука в операторном представлении:

$$Q(p)[\sigma(t)] = ER(p)[\varepsilon(t)],$$

где  $Q(p)$  и  $R(p)$  – некоторые операторные полиномы, соответствующие выбранной модели вязкоупругости.



# Основной принцип решения задач вязкоупругости



Уравнение четырехпараметрической модели стандартного линейного тела с дробными производными имеет вид:

$$\sigma(t) + \tau^{\alpha} {}_0 D_t^{\alpha} \sigma(t) = E \left[ \varepsilon(t) + \theta^{\alpha} {}_0 D_t^{\alpha} \varepsilon(t) \right].$$

Операторные полиномы, которые соответствуют рассматриваемой четырехпараметрической модели вязкоупругого тела:

$$Q(s) = \tau^{\alpha} s^{\alpha} + 1,$$

$$R(s) = \theta^{\alpha} s^{\alpha} + 1.$$

В таком случае упругий оператор, который соответствует модулю упругости при учете свойств вязкоупругости будет иметь вид:

$$E(s) = \frac{ER(s)}{Q(s)}$$



# Основной принцип решения задач вязкоупругости



Применяя преобразования Лапласа и заменяя упругие параметры на соответствующие параметры при учете свойств вязкоупругости, получим дифференциальное уравнение с дробными производными, связывающее напряжения и деформации.

Окончательно принцип решения задач вязкоупругости сводится к следующим действиям:

- составляется уравнение напряженно-деформированного состояния системы в постановке линейной теории упругости;
- упругие параметры рассматриваемой системы заменяются на соответствующие вязкоупругие параметры;
- применяются обратные преобразования Лапласа и получается уравнение напряженно-деформированного состояния системы в вязкоупругой постановке.



# Гамма функция



**Гамма-функция** — математическая функция, которая расширяет понятие факториала на поле нецелых действительных и комплексных чисел. Обычно обозначается  $\Gamma(z)$ .

Была введена Леонардом Эйлером, а своим обозначением гамма-функция обязана Лежандру.

## Интегральное определение

Если вещественная часть комплексного числа  $z$  положительна, то Гамма-функция определяется через абсолютно сходящийся интеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) > 0$$



# Гамма функция



Это определение было получено Лежандром из оригинального определения Эйлера полученного им в 1730 г., через замену переменной, и на сегодняшний день, именно определение Лежандра известно как «классическое» определение гамма-функции:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 (-\ln x)^{z-1} dx$$

Интегрируя по частям классическое определение, легко видеть что для целых  $n$ , имеем  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ , и вообще  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ .



# Гамма функция



## Определение по Гауссу

Оно верно для всех комплексных  $z$ , за исключением 0 и отрицательных целых чисел

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n-1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

## Определение по Эйлеру

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \left( \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{1 + \frac{z}{n}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

## Определение по Вейерштрассу

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

где  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,57722$  — постоянная Эйлера — Маскерони.



Гамма-функция целого и полуцелого аргументов выражается через элементарные функции.

В частности

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1$$

$$\Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\Gamma(4) = 3! = 6$$

$$\Gamma(5) = 4! = 24$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} \cdot \left[ \binom{n - \frac{1}{2}}{n} n! \right]$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!} \sqrt{\pi} = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} / \left[ \binom{-\frac{1}{2}}{n} n! \right]$$

Gamma function

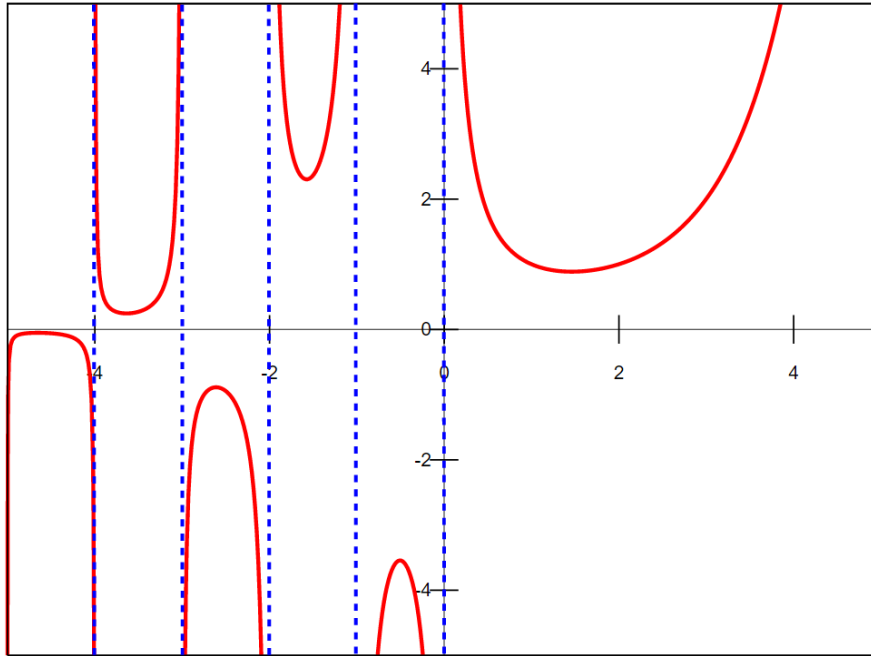


График гамма-функции действительного переменного

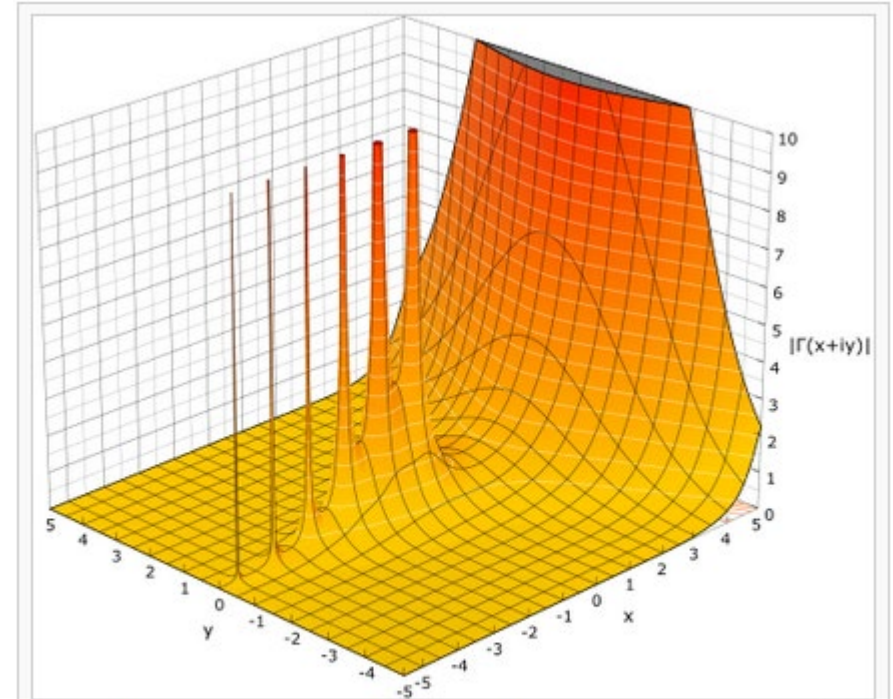


График модуля гамма-функции на комплексной плоскости.





# Пример 1. Дробное дифференцирование многочленов



Пусть  $f(x)$  есть **МОНОМ** вида

$$f(x) = x^k .$$

Первая производная, как и обычно

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = kx^{k-1} .$$

Повторение данной процедуры даёт более общий результат

$$\frac{d^n}{dx^n} x^k = \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} ,$$

который после замены **факториалов** гамма-функциями приводит к

$$\frac{d^n}{dx^n} x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n} .$$

Поэтому, например, половинная производная функции  $x$  есть

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)} x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\pi^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$



# Пример 1. Дробное дифференцирование многочленов



Повторяя процедуру, будем иметь

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} 2\pi^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1)} x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} x^0 = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1,$$

что представляет собой ожидаемый результат

$$\left( \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \right) x = \frac{d}{dx} x = 1.$$

Таким образом нетрудно показать, что

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^a \left( \frac{d}{dx} \right)^b = \left( \frac{d}{dx} \right)^{a+b}$$

на всех  $x^k$ , таких что  $k - a$ ,  $k - b$  и  $k - a - b$  не являются целыми отрицательными числами.



# Пример 2. Дифференцирование тригонометрических функций



Пусть

$$f(x) = \sin(ax + b).$$

Поскольку для любых  $a$  и  $b$

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin(ax + b) = a^n \sin\left(ax + b + \frac{\pi n}{2}\right),$$

то, полагая  $n = 1/2$ ,

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \sin(ax + b) = \sqrt{a} \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{4}\right).$$

Действительно,

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \left( \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \sin(ax + b) \right) = \sqrt{a} \sqrt{a} \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = a \cos(ax + b)$$

В рассмотренном примере понятие производной обобщается на случай любого действительного и даже комплексного порядка. Так, при  $n = -1$  формула  $n$ -й производной даёт одну из первообразных функции  $f(x)$ .



Таким образом, по определению дробная производная функции  $x(t)$ :

$$D^\gamma [x(t)] = \frac{1}{\Gamma^*(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau.$$

Рассмотрим вязкоупругое уравнение состояние в дробных производных, предложенное Блэром в форме:

$$\sigma(t) = E\tau^\gamma D^\gamma [\varepsilon(t)].$$

Если  $\gamma = 0$ , то  $D^\gamma [\varepsilon(t)] = \varepsilon(t)$  и уравнение обращается в закон Гука для абсолютно упругого тела (пружины):

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t).$$



# Реономные свойства



В реальных конструкциях реономные свойства (ползучесть и релаксация) присутствуют одновременно и взаимосвязано. Их можно описать аналитически, если ввести время  $t$  в связь напряжений и деформаций твердого тела. Один из подходов для описания линейной вязкоупругости материала заключается в использовании уравнений Больцмана, которые содержат ядра ползучести и релаксации.

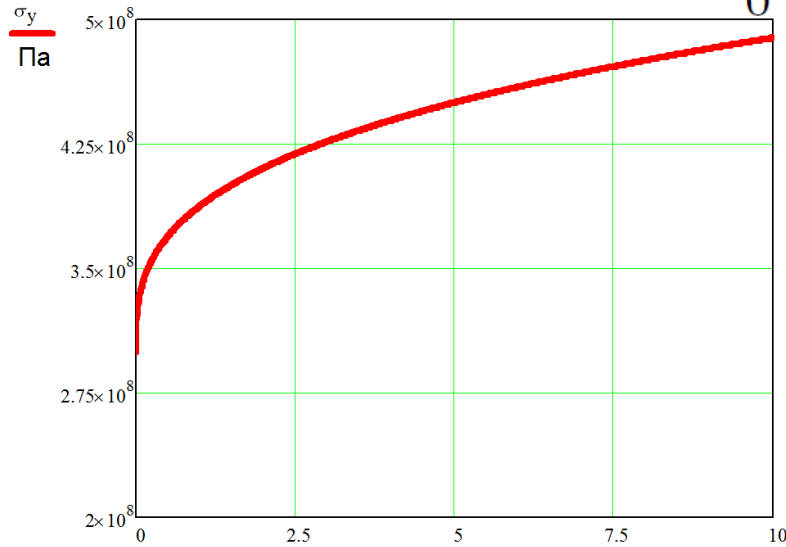
Предложенный Больцманом способ описания этой взаимосвязи основан на предположении о влиянии всего предшествующего времени действия напряжений на деформацию в данный момент.

Подобные среды называются линейными вязкоупругими наследственного типа.

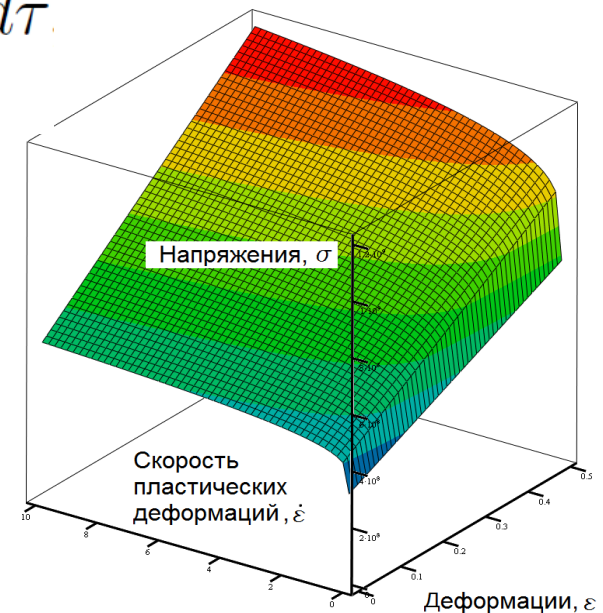
$$\sigma(t) = \int_0^{\infty} G(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau$$

Не меньший интерес представляет также тот случай, когда напряжение  $\sigma(t)$  зависит от всех предшествующих, надлежащим образом взвешенных значений скоростей деформации, но не деформаций. Для таких процессов деформирования зависимость между  $\sigma$  и  $\dot{\epsilon}$ :

$$\sigma(t) = \int_0^{\infty} K(\tau) \dot{\epsilon}(t - \tau) d\tau$$



Характерная зависимость предела текучести материала от скорости пластических деформаций при изотропном упрочнении



Характерная зависимость предела текучести материала от деформаций и скорости пластических деформаций при кинематического упрочнении



# Ядра ползучести



Один из подходов к описанию вязкоупругих свойств среды состоит в рассмотрении связи между напряжениями и деформациями с помощью ядер ползучести.

Физические уравнения состояния для девиаторов напряжений и деформаций

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}$$

записываются в следующей форме:

$$2Ge_{ij}(t) = s_{ij}(t) + \int_0^t \Gamma(t - \tau) s_{ij}(\tau) d\tau,$$

$$K\theta(t) = \sigma(t),$$

где  $\theta = \varepsilon_{kk}$  – относительное изменение объема,

$\sigma = \sigma_{kk}/3$  – среднее (гидростатическое) напряжение,

$G$  – мгновенно-упругий модуль сдвига,

$K$  – мгновенный модуль объемной деформации,

$\Gamma(t)$  – ядро ползучести материала.

Здесь  $e_{ij}$ ,  $s_{ij}$  – девиаторы  $D_\varepsilon$ ,  $D_\sigma$ ;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

– единичный тензор Кронеккера.



# Ядра ползучести



Обращенные уравнения можно записать в виде:

$$s_{ij}(t) = 2G \left( e_{ij}(t) - \int_0^t R(t - \tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right),$$
$$\sigma(t) = K\theta(t).$$

Функцию  $R(t)$  называют ядром релаксации материала. Она является резольвентой ядра  $\Gamma(t)$ . Функция  $\Gamma(t)$ , в свою очередь, является резольвентой ядра  $R(t)$ .



# Резольвента



## Резольвента интегрального уравнения

Рассмотрим **интегральное уравнение**:

$$f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = \varphi(s). \quad (*)$$

**Резольвентой интегрального уравнения**, или его **разрешающим ядром** называется такая функция  $\Gamma(s, t, \lambda)$  переменных  $s, t$  и параметра  $\lambda$ , что решение уравнения (\*) представляется в виде:

$$u^*(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, t, \lambda) f(t) dt.$$

При этом  $\lambda$  не должна быть **собственным числом** уравнения (\*).

## Пример

Пусть уравнение (\*) имеет **ядро**  $K(s, t) = s + t$ , то есть само уравнение имеет вид:

$$\varphi(s) + \lambda \int_a^b (s + t) \varphi(t) dt = f(s).$$

Тогда его резольвентой является функция


$$\Gamma(s, t, \lambda) = \frac{s + t - \lambda \left( \frac{s + t}{2} - st - \frac{1}{3} \right)}{1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}}.$$



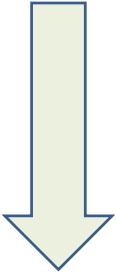
# Ядра ползучести



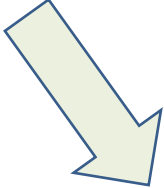
Для аппроксимации экспериментальных данных на практике в основном используются следующие аналитические выражения для ядер ползучести и релаксации. В зависимости от подхода к выбору аналитического вида ядра или функции релаксации  $\Pi(t)$  имеется три метода расчета вязкоупругих свойств.



Моделирование механического поведения полимерных материалов выбирая ядро в виде степенных функций и рядов



Моделирование механического поведения полимерных материалов выбирая ядро в виде дробной экспоненты с тремя константами.



Моделирование механического поведения полимерных материалов методом Максвелла (релаксационный метод).



# Выбор ядра ползучести в виде степенных функций



Для моделирования механического поведения полимерных материалов выбирают ядра в виде степенных функций и рядов.

Примером является экспоненциальное ядро:

$$\Gamma(t) = Ae^{-pt} \quad (A > 0, p > 0),$$

ядро Ржаницына с тремя константами:

$$R(t) = \frac{Ae^{-pt}}{t^{1-\beta}} \quad (p > 0, 0 < \beta < 1).$$

Подобные виды ядер применимы к широкому классу веществ и для каждого вещества характерны те или иные значения констант. Им соответствует степенной закон релаксации напряжений:

$$\sigma(t) = 2G\varepsilon - \left( \frac{t}{(1+\alpha)\Gamma_*(1+\alpha)} \right)^{1+\alpha}.$$

Такой вид ядра позволяет рассчитывать сложно-напряженные состояния материала.



# Выбор ядра в виде дробной экспоненты с тремя константами



Второй метод расчета вязкоупругих свойств полимеров, применяемый, в основном, инженерами и технологами, состоит в выборе ядра в виде дробной экспоненты с тремя константами. Как и в предыдущем подходе, константы не имеют прямого физического смысла, но обеспечивают согласие экспериментальных и расчетных данных в широком интервале времени наблюдения.

Такой вид имеет, например, ядро Слонимского. Закон релаксации, соответствующий такому ядру напряжения описывается выражением:

$$\sigma(t) = 2G_{\infty}\varepsilon + 2G_1\varepsilon e^{-at^k}.$$

Этот закон релаксации широко применяют в технологии и физике полимеров



# Моделирование механического поведения полимерных материалов методом Максвелла



Третий метод связан с именем Максвелла и может быть назван релаксационным. Для простого релаксационного процесса с одним дискретным временем релаксации  $\tau_1$  процесс описывается уравнением Максвелла:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau_1}}.$$

Этому закону релаксации соответствует следующее ядро:

$$\Gamma(t - \tau) = \frac{2G_1}{\tau_1} e^{-\frac{t-\tau}{\tau_1}}.$$

В общем случае процесс релаксации напряжения не описывается одним временем релаксации, а дискретным с константами ( $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ) или непрерывным спектром времен релаксации.

Этот закон качественно верен для вязких материалов, обладающих упругостью (упруговязкие тела). Для твердых тел с внутренним трением (вязкоупругие тела) модель Максвелла не описывает ползучесть.



## Обобщенная модель вязкоупругого тела

$$\begin{aligned} \alpha_0 \sigma(t) + \alpha_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} + \alpha_2 \frac{d^2 \sigma(t)}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^3 \sigma(t)}{dt^3} + \dots = \\ = \beta_0 \varepsilon(t) + \beta_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^3 \varepsilon(t)}{dt^3} + \dots \end{aligned}$$

К этому уравнению состояния приводит выбор ядра и его резольвенты в виде суммы экспоненциальных функций

$$\Gamma(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-p_i t}, \quad R(t) = \sum_{i=1}^n B_i e^{-q_i t}.$$



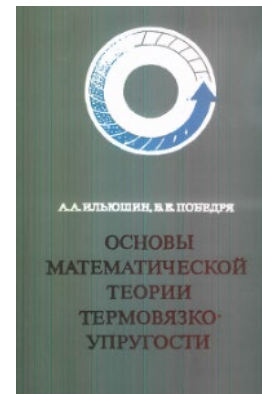
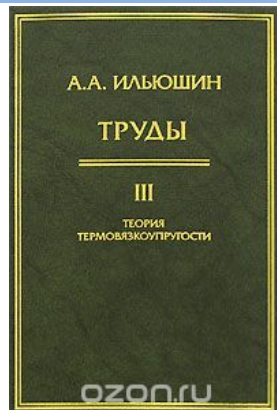
# Теория вязкоупругости



Первоначальное развитие теории вязкоупругости связано с именами Больцмана, Максвелла, Кельвина, Фойхта.

Многие достижения современного состояния теории вязкоупругости определяются работами Ильюшина, Ишлинского, Колтунова, Москвитина, Работнова, Слонимского, Ржаницына, Победри и других отечественных ученых.

В частности, Ильюшиным подробно разработана общая теория термовязкоупругости, предложен эффективный метод решения частных задач – метод аппроксимаций.





# Контактная информация



E-mail: [kartashov@bmstu.ru](mailto:kartashov@bmstu.ru)  
Рабочий телефон : 18-09  
Мобильный телефон: +7(926)275-0886

Спасибо за внимание!