Орлова О.А.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по математике

«Решение показательных и логарифмических уравнений»

2011 г.

Оглавление

Введение

Российская школа находится сегодня в полосе реформирования, как сейчас принято говорить – модернизации. Отношение к реформам неоднозначно. Но на фоне общей дискуссии о том, чему и как учить, и каков должен быть результат обучения, выделяется один важный вопрос: что требовать на выходе из учебного заведения? В случае математики существует список задач, которые должен уметь решать выпускник.

К одной из таких задач относится решение уравнений, и в том числе решение показательных и логарифмических уравнений.

Целесообразно изучение логарифмических и показательных уравнений параллельно, так как они теоретически взаимосвязаны и помогают развитию логического мышления у учащихся, умению сопоставлять, анализировать, делать выводы.

Определение уравнения. Равенство с переменной $f(x) = g\ (x)$ называется уравнением с одной переменной x.

Корни уравнения. Всякое значение переменной, при котором выражение $f(x)$ и $g\ (x)$ принимают равные числовые значения, называется корнем уравнения.

Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются равносильными.

Равносильными считаются и те уравнения, каждое из которых не имеет корней.

В процессе решения уравнения его стараются заменить более простым, но равносильным данному. Поэтому важно знать, при каких преобразованиях данное уравнение переходит в равносильное ему уравнение.

I. Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

II. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Областью определения уравнения (О.О.У) $f(x) = g\ (x)$ называют множество всех тех значений переменной x, при которых выражение $f(x)$ и $g\ (x)$ имеют смысл.

Уравнение называется показательным, если оно содержит неизвестную величину в показателе степени.

Простейшее показательное уравнение – это уравнение вида $a^x = b \ (a > 0, a \neq 1, b > 0)$

<u>Помни!</u> При решении показательных уравнений часто используются:

a) Теорема: если $a > 0$ и $a \neq 1$, и $a^{x1} = a^{x2}$, то $x_1 = x_2$.

b) Свойства степени (*p* и *r* – действительные числа):

1) $a^p \cdot a^r = a^{p+r}$

2) $a^p : a^r = a^{p-r}$

3) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

4) $(a^p)^r = a^{pr}$

5) $a^r : b^r = (\frac{a}{b})^r$

6) $(\frac{a}{b})^{-r} = (\frac{b}{a})^r$

Для решения показательных уравнений, как правило, не нужно находить О.О.У.

<u>Способы решения</u>

I. Уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ сводятся к решению уравнения $f(x) = g(x)$. Главное предварительно обе части уравнения привести к одному основанию.

Например:

1) $2^{5x+1} = 4^{2x}$; $2^{5x+1} = 2^{4x}$; $5x+1 = 4x$; $x = -1$. Ответ: $x = -1$.
2) $2^{x-2} = 1$; $2^{x-2} = 2^0$; $x-2 = 0$; $x = 2$. Ответ: $x = 2$.
3) $(\frac{1}{3})^{x-1} = 9$; $3^{-1(x-1)} = 3^2$; $3^{1-x} = 3^2$; $1-x = 2$; $x = -1$. Ответ: $x = -1$.

II. Уравнения вида $a_1 b^{px+k1} + a_2 b^{px+k2} + \ldots + a_n b^{px+kn} = c$ решаются вынесением за скобки общего множителя.

Например:

1) $3^{3x+1} - 5 \cdot 3^{3x-1} = 36$

$3^{3x-1}(3^2 - 5 \cdot 1) = 36$;

$3^{3x-1}\cdot 4=36$;

$3^{3x-1}=9$;

$3^{3x-1}=3^2 \quad \Rightarrow \quad 3x-1=2; x=1$. Ответ: $x=1$.

2) $2^{3x}+2^{3x-1}+2^{3x-2}+2^{3x-3}=120$

$2^{3x-3}(2^3+2^2+2+1)=120$;

$2^{3x-3}\cdot 15=120$;

$2^{3x-3}=8$;

$2^{3x-3}=2^3$;

$3x-3=3$; $3x=6$; $x=2$. Ответ: $x=2$.

III. Уравнения вида $a_1b^{2x}+a_2b^x+a_3=0$ сводятся к квадратным путем замены $b^x=y$ (причем $y>0$).

Например:

1) $9^x-8\cdot 9^x-9=0$;

Пусть $3^x=y$ $(y>0)$. Тогда $y^2-8y-9=0$ (решаем квадратное уравнение).

$$y_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{2}=\frac{8\pm 10}{2}=\left|\frac{y_1=9}{y_2=-1}\right.$$

$y_2=-1$ – посторонний. Выполняем обратную замену для $y_1=9$.

$3^x=9$; $3^x=3^2$; $x=2$. Ответ: $x=2$.

2) $5^{2x+1}-26\cdot 5^x+5=0$

$5\cdot 5^{2x}-26\cdot 5^x+5=0$; Пусть $5^x=y$, тогда $5y^2-26y+5=0$

$$y_{1,2}=\frac{26\pm\sqrt{676-100}}{10}=\frac{26\pm 24}{2}=\left|\frac{y_1=5}{y_2=\frac{1}{5}}\right.$$

Выполняем обратную замену:

а) $5^x=5\Rightarrow x=1$

б) $5^x=\frac{1}{5}$; $\quad 5^x=5^{-1}\Rightarrow x=-1$. Ответ: $x=1; -1$.

IV. Уравнение вида $k_1a^{2x}+k_2a^xb^x+k_3b^{2x}=0$ сводятся к квадратным относительно $(\frac{a}{b})^x$ делением на b^{2x}.

Например:

1) $4^x + 3\cdot 6^x - 4\cdot 9^x = 0$

$2^{2x} + 3\cdot 2^x \cdot 3^x - 4\cdot 3^{2x} = 0$

Делим на 3^{2x}

$(\frac{2}{3})^{2x} + 3\cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} - 4 = 0$;

$(\frac{2}{3})^{2x} + 3\cdot (\frac{2}{3})^x - 4 = 0$

Пусть $(\frac{2}{3})^x = y$ $(y>0)$

Тогда $y^2+3y-4=0$

Решаем квадратное уравнение:

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2} = \left| \frac{y_1 = 4}{y_2 = 1} \right.;$$

y_1 – посторонний.

Выполняем обратную замену:

$(\frac{2}{3})^x = 1;\quad (\frac{2}{3})^x = (\frac{2}{3})^0 \Rightarrow x = 0$. Ответ: $x=0.$

V. Уравнения вида $a^{f(x)}=b$ решаются логарифмированием.

Умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня – действия гораздо более трудоёмкие, чем сложение и вычитание, особенно тогда, когда нужно производить действия с многозначными числами. Потребность в таких действиях впервые возникла в 17 веке в связи с развитием мореплавания, вызвавшем усовершенствование астрономических наблюдений и вычислений. На почве астрономических расчётов и возникли на рубеже 16 и 17 веков логарифмические вычисления.

В настоящее время эти вычисления применяются повсюду, где приходится иметь дело с многозначными числами. Они выгодны уже при действиях с четырёхзначными числами и совершенно необходимы в тех случаях, когда точность должна доходить до пятого знака.

Ценность логарифмического метода состоит в том, чтобы сводить умножение и деление чисел к менее трудоёмким действиям – сложению и вычитанию.

Возведение в степень и извлечение корня заменяются умножением и делением, что также упрощает вычисления.

Уравнение $a^x=b$ (где $a>0$; $a\neq 1$; $b>0$) имеет ровно один корень, который называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $log_a b$.

Значит логарифм – это показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Возвращаемся к решению уравнений

Например:

1) $5^x=4$ $\quad x=log_5 4$

2) $2^x=6$ $\quad x=log_2 6$

3) $3^x=100$ Логарифмируем обе части с помощью логарифма с основанием 10, который называется десятичным и имеет специальное обозначение lg.

$$\lg 3^x = \lg 100 \Rightarrow x\cdot \lg 3=\lg 100; \quad x=\frac{\lg 100}{\lg 3} \quad (\lg 100 = 2)$$

$$x=\frac{2}{\lg 3}$$

Логарифмические уравнения

Уравнение называется логарифмическим, если оно содержит неизвестную величину под знаком логарифма.

При решении логарифмических уравнений необходимо находить ООУ, либо делать проверку решений.

Помни! При решении логарифмических уравнений часто используются:

а) Теорема: если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, где $a>0$; $a\neq 1$; $x_1>0$ и $x_2>0$, то $x_1=x_2$.

б) Свойства логарифмов и логарифмические тождества:

1) $\log_a x+\log_a y=\log_a(x\cdot y)$

2) $\log_a x-\log_a y=\log_a(\frac{x}{y})$

3) $\log_a x^k = k\cdot \log_a x$; $\quad \log_{a^k} x=\frac{1}{k}\cdot \log_a x$

4) $a^{\log_a x} = x$

5) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} \quad (b \neq 1)$

6) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \quad (b \neq 1)$

Способы решения:

I.Применение определения логарифма.

1) $log_2x=0; x=2^0; x=1$ *(1>0)*. Ответ: *x=1*.

2) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1; \quad x = (\frac{1}{2})^{-1}; \quad x = 2 \quad (2 > 0)$. Ответ: *x=2*.

3) $lg(log_3x)=0; 10^0= log_3x; log_3x=1; x=3^1; x=3$ *(3>0)*. Ответ: *x=3*.

4) $log_{x-1}(x^2+5x-5)=2$

$(x-1)^2= x^2+5x-5$

$x^2-2x+1= x^2+5x-5; 5x+2x=1+5;$ $x = \frac{6}{7}$

Выполняем проверку: $x = 1 = \frac{6}{7} - 1 = -\frac{1}{7} < 0$, чего не должно быть. Значит уравнение решений не имеет.

II. Способ непосредственного потенцирования, которым решаются уравнения первой степени относительно логарифма.

Используются основные свойства логарифма.

1) *lgx+lg5=lg20*

ООУ: x>0; $\lg x \cdot 5 = \lg 20$*; 5x=20; x=4*. Ответ: *x=4*.

2) *lgx=2lg3*

ООУ: x>0; $lgx=lg3^2; x=3^2; x=9$. Ответ: *x=9*.

3) $\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=3\log_3 2+\log_3(x-2)$

ООУ: $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \Rightarrow x>2 \\ x-2>0 \end{cases}$

$\log_3((x-1)(x+1)) = \log_3(2^3 \cdot (x-2))$

$(x-1)(x+1) = 2^3 \cdot (x-2)$; $x^2-1=8x-16$

$x^2-8x+15=0$

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{8\pm 2}{2}=\left|\frac{x_1=5}{x_2=3}\right.$$. Ответ: *x=3; x=5.*

III. Способ введения вспомогательного неизвестного, которым решаются уравнения второй и выше степени относительно логарифма.

Например:

1) $lg^2x+lgx-2=0$

Пусть $lgx=y$, тогда наше уравнение принимает вид: $y^2+y-2=0$. Решаем квадратное уравнение

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\left|\frac{y_1=-2}{y_2=1}\right.$$

Возвращаемся к замене:

1) $lgx=-2;\ x=10^{-2};\ x=0,01.$

2) $lgx=1;\ x=10^{1};\ x=10.$

Оба корня при проверке подходят, т.к. 0,01>0 и 10>0.

Ответ: *x=0,01; x=10.*

2) $\log_2{}^2 x-\log_2\frac{16}{x}=2$ ООУ: x>0

$$\log_2{}^2 x-(\log_2 16-\log_2 x)-2=0$$

$$\log_2{}^2 x-4\log_2 2+\log_2 x-2=0$$

$$\log_2{}^2 x+\log_2 x-6=0$$

Пусть $log_2x=y$, тогда $y^2+y-6=0$

Решаем квадратное уравнение: $y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\left|\frac{y_1=-3}{y_2=2}\right.$

Выполняем обратную замену:

а) $\log_2 x=-3 \ \Rightarrow x=2^{-3};\quad x=\frac{1}{8}$

б) $\log_2 x=2 \ \Rightarrow x=2^{2};\quad x=4$

Ответ: $x=\frac{1}{8};\ \ x=4.$

$3\log_8{}^2(-x)+2\log_8 x^2+1=0$; ООУ: $x<0$

$$3\log_8{}^2(-x)+4\log_8|x|+1=0$$

$$3\log_8{}^2(-x)+4\log_8(-x)+1=0$$

Пусть $log_8(-x)=y$, тогда $3y^2+4y+1=0$. Решаем квадратное уравнение:

$$y_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{-4\pm 2}{6}=\left|\begin{array}{l} y_1=-1 \\ \hline y_2=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$; Выполняем обратную замену:

а) $\log_8(-x)=-1 \quad \Rightarrow -x=8^{-1}; \quad -x=\frac{1}{8}; \quad x=-\frac{1}{8}$

б) $\log_8(-x)=-\frac{1}{3} \quad \Rightarrow -x=8^{-\frac{1}{3}}; \quad -x=\frac{1}{2}; \quad x=-\frac{1}{2}$

Ответ: $x=-\frac{1}{8}$; $x=-\frac{1}{2}$.

IV. Уравнения вида $f(x)^{g(x)}=f(x)^{\varphi(x)}$ решаются логарифмированием по удобному основанию (чаще всего по тому, которое содержится в основании логарифма, находящегося в показателе степени).

Например:

1) $x^{\lg x}=\frac{100}{x}$. Логарифмируем по основанию 10:

$\lg x^{\lg x}=\lg\frac{100}{x}$; $\lg x\cdot\lg x=\lg 100-\lg x$

$\lg^2 x+\lg x-2=0$. Теперь воспользуемся предыдущим способом.

Пусть $lgx=y$, тогда $y^2+y-2=0$.

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\left|\begin{array}{l} y_1=-2 \\ \hline y_2=1\end{array}\right.$$

а) $\lg x=-2 \quad \Rightarrow x=10^{-2}; \quad x=0{,}01$

б) $\lg x=1 \quad \Rightarrow x=10^1; \quad x=10$. Выполняем проверку:

Ответ: $x=0{,}01$; $x=10$.

2) $x^{\log_2 x}=4x$. ООУ: $x>0$

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2(4x)$; $\log_2 x\cdot\log_2 x=\log_2 4+\log_2 x$;

$\log_2{}^2 x-\log_2 x-2=0$

Пусть $log_2x=y$, тогда $y^2-y-2=0$. Решаем квадратное уравнение:

$y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\left|\frac{y_1=2}{y_2=-1}\right.$. Выполняем обратную замену:

а) $\log_2 x=2 \quad \Rightarrow x=2^2; \quad x=4$

б) $\log_2 x=-1 \quad \Rightarrow x=2^{-1}; \quad x=\frac{1}{2}$. Согласуем с ООУ, пишем ответ.

Ответ: $x=4$; $x=\frac{1}{2}$.

3) $x^{\log_4 x-2}=2^{3\log_4 x-3}$

ООУ: *x>0*. Логарифмируем по основанию 2:

$\log_2 x^{\log_4 x-2}=\log_2(2^{3\log_4 x-3})$

$(\frac{1}{2}\log_2 x-2)\log_2 x=(3\cdot\frac{1}{2}\log_2 x-3)\log_2 2$

$\frac{1}{2}\log_2{}^2 x-2\log_2 x-\frac{3}{2}\log_2 x+3=0$

$\log_2{}^2 x-7\log_2 x+6=0$

Пусть $log_2x=y$, тогда y^2-$7y$-$6=0$. Решаем квадратное уравнение:

$y_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\frac{7\pm 5}{2}=\left|\frac{y_1=6}{y_2=1}\right.$. Выполняем обратную замену:

а) $\log_2 x=6 \quad \Rightarrow x=2^6; \quad x=64$

б) $\log_2 x=1 \quad \Rightarrow x=2^1; \quad x=2$.

Ответ: *x=64; x=2.*

V. Уравнения, которые решаются с применением формул:

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}; \quad \log_{a^k} x=\frac{1}{k}\log_a x; \quad a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

Например:

1) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$

ООУ: *x>0*

$\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+\frac{\log_2 x}{\log_2 8}=11; \quad \frac{11}{6}\log_2 x=11$. Умножаем части на 6

$\log_2 x=6$; $x=2^6$; $x=64$.

Ответ: $x=64$.

2) $\log_4(\log_2 x)+\log_2(\log_4 x)=2$

$\log_{2^2}(\log_2 x)+\log_2(\log_{2^2} x)=2$

$\frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)+\log_2(\frac{1}{2}\log_2 x)=2$ Умножаем обе части на 2

$\log_2(\log_2 x)+2\log_2\frac{1}{2}+2\log_2(\log_2 x)=4$

$3\log_2(\log_2 x)=6$; $\log_2(\log_2 x)=2$; $\log_2 x=2^2$;

$\log_2 x=4$; $x=2^4$; $x=16$.

Выполняем проверку: подставляем в левую часть *x=16:*

$\log_4(\log_2 16)+\log_2(\log_4 16)=\log_4 4+\log_2 2=2$ - все верно.

Ответ: *x=16.*

Целесообразно знакомство с показательными и логарифмическими уравнениями начинать с самого начала изучения тем «Степени и корни» и «Логарифм», чтобы на занятиях, посвященных темам «Показательные уравнения», «Логарифмические уравнения» систематизировать ранее полученные знания и закрепить наработанные навыки. Это помогут сделать карточки с заданиями и таблицы следующих образцов:

I блок	
Следующие равенства записать с помощью логарифма	
$5^3=125$	
$4^4=256$	
$(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$	
$2^{-5}=\frac{1}{32}$	
$(\frac{1}{3})^{-3}=27$	
$3^0=1$	
II блок	
Следующие равенства переписать в виде показательных	
$\log_3 27=3$	
$\log_2 64=6$	
$\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$	
$\lg 100=2$	
$\lg\frac{1}{10}=-1$	
$\log_a a\sqrt[3]{a}=\frac{4}{3}$	

Заполните пустые клетки так, чтобы получилось верное равенство. Сделайте выводы.	
Первый блок	
$\log_2 8=\boxed{}$	$2^3=\boxed{}$
$\log_5\boxed{}=3$	$5^{\boxed{}}=125$
$\log_9\boxed{}=1$	$9^1=\boxed{}$
$\log_3\boxed{}=-3$	$3^{-3}=\boxed{}$
$\log_2 256=\boxed{}$	$2^{\boxed{}}=256$
$\log_5\frac{1}{5}=\boxed{}$	$5^{\boxed{}}=\frac{1}{5}$

$\log_4\square = 1$	$4^1 = \square$
Вывод:	
Второй блок	
$\log_{100}1 = \square$	$100^{\square} = 1$
$\log_3 1 = \square$	$3^{\square} = 1$
$\log_2\square = 0$	$2^0 = \square$
$\log_{\square} 1 = 0$	$a^{\square} = 1$
Вывод:	
Третий блок	
$\log_5\square = 1$	$5^1 = \square$
$\log_{20}20 = \square$	$20^{\square} = 20$
$\log_7\square = 1$	$\square^1 = \square$
$\log_{\square} 8 = 1$	$8^{\square} = \square$
Вывод:	

	a	**b**	**c**	**d**	**a**	**b**	**c**	**d**
1	$(\sqrt{27})^{2/3}$	$32^{4/5}$	$(\sqrt{8})^{2/3}$	$16^{-3/4}$				
2	$16^{-1/4}$	$(\frac{1}{16})^{-1/2}$	$81^{-1/4}$	$(\frac{1}{27})^{-1/3}$				
3	$27^{1/3}$	$81^{1/4}$	$64^{1/3}$	$25^{1/2}$				
4	$(\sqrt{6})^4$	$(\sqrt{2})^6$	$(\sqrt{3})^4$	$(\sqrt{5})^0$				
5	$(\frac{1}{3})^{-1}$	$(\frac{2}{3})^{-4}$	$(\frac{3}{4})^{-1}$	$(\frac{1}{2})^{-4}$				
6	3^{-4}	2^{-3}	7^{-2}	4^{-1}				
7	$(\frac{4}{3})^3$	$(\frac{1}{3})^4$	$(\frac{2}{5})^3$	$(\frac{3}{4})^2$				
8	2^5	3^3	5^0	2^3				
Задание					*Ответы*			

	a	b	c	d	a	b	c	d
1	3^4	4^3	2^4	5^3				
2	$(\frac{1}{2})^5$	$(\frac{2}{3})^3$	$(\frac{3}{5})^2$	$(\frac{3}{2})^1$				
3	6^{-2}	2^{-4}	3^{-3}	5^{-1}				
4	$(\frac{3}{2})^{-3}$	$(\frac{2}{5})^{-2}$	$(\frac{3}{4})^{-3}$	$(\frac{1}{2})^{-5}$				
5	$(\sqrt{7})^2$	$(\sqrt{2})^8$	$(\sqrt{5})^4$	$(\sqrt{2})^{10}$				
6	$16^{1/4}$	$64^{1/2}$	$8^{1/3}$	$32^{1/5}$				
7	$4^{-1/2}$	$(\frac{1}{9})^{-1/2}$	$125^{-1/3}$	$(\frac{1}{8})^{-1/3}$				
8	$(\sqrt{32})^{2/5}$	$4^{-3/2}$	$64^{5/6}$	$32^{-3/5}$				
Задание					*Ответы*			

	a	b	c	d	a	b	c	d
1	$log_4 16$	$log_3 27$	$log_5 25$	$log_2 32$				
2	$log_8 2$	$log_{49} 7$	$log_{16} 2$	$log_{27} 3$				
3	$log_{25} 125$	$log_4 8$	$log_{27} 9$	$log_8 16$				
4	$\log_{\frac{1}{7}} 49$	$\log_{\frac{1}{27}} 3$	$\log_{\frac{1}{3}} 27$	$\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2}$				
5	$\log_6 \sqrt{6}$	$\log_5 \sqrt[3]{5}$	$\log_4 \sqrt{2}$	$\log_{\sqrt{5}} \sqrt{125}$				
6	$3^{\log_3 7}$	$3^{2\log_3 7}$	$27^{\log_3 2}$	$4^{3\log_4 3}$				
7	$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$	$\log_{\sqrt{27}} 9$	$\log_{16} \sqrt{2}$	$\log_{\frac{1}{64}} \sqrt{32}$				
8	$\log_9 \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2\sqrt{2})$	$\log_4 \frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\log_{\frac{1}{\sqrt{27}}} \frac{1}{\sqrt{81}}$				
Задание					*Ответы*			

	a	**b**	**c**	**d**	**a**	**b**	**c**	**d**
1	$log_2x=5$	$log_3(-x)=2$	$log_4x=3$	$log_2(-x)=-4$				
2	$log_x4=2$	$log_{-x}9=2$	$log_x27=3$	$log_{-x}25=2$				
3	$log_2(6-x)=0$	$log_4(5x)=0$	$log_3(x-3)=0$	$\log_2 \frac{x}{3} = 0$				
4	$\log_3 \frac{x}{5} = 1$	$log_4(5-x)=1$	$log_2(7x)=1$	$log_5(x-2)=1$				
5	$log_3x= log_32$	$log_5x^2= log_54$	$log_4(x-1)= log_43$	$log_2(x+2)= log_25$				
6	$log_3x= log_92$	$log_{25}x= log_59$	$log_4x= log_27$	$log_3x= log_{27}2$				
7	$log_4x= log_85$	$log_{27}x= log_94$	$2log_3x= log_916$	$log_4x= log_{16}3$				
8	$3^x=5$	$6^x=4$	$7^x=8$	$2^x=9$				
Задание					*Ответы*			

	a	b	c	d	a	b	c	d	Для черновика
1	$\log_6 7+\log_6 8$	$\log_2 3+\log_2 9$	$\log_5 6+\log_5 7$	$\log_7 8+\log_7 8$					
2	$\log_5 24-\log_5 4$	$\log_3 40-\log_3 8$	$\log_7 45-\log_7 9$	$\log_3 30-\log_3 5$					
3	$2\log_3 2+\log_3 5$	$\log_5 3-2\log_5 9$	$2\log_3 4-\log_3 8$	$\log_9 4+3\log_9 2$					
4	$\lg 18-2\lg\sqrt{6}$	$\lg 2+\frac{1}{2}\lg 36$	$\frac{1}{2}\ln 9+\ln 2$	$2\ln\sqrt{14}-\ln 7$					
5	$\log_{25}54-\log_5\sqrt{6}$	$\log_9 8-\log_3\sqrt{2}$	$\log_{\sqrt{8}}6-\log_8 4$	$\log_{\sqrt{10}}4-\lg 8$					
6	$\frac{\log_3 7}{\log_3 4}+\log_4 5$	$\log_4 27-\frac{\lg 9}{\lg 4}$	$\frac{\lg 54}{\lg 5}-\frac{\lg 6}{\lg 5}$	$\log_2 5+\frac{1}{\lg 2}$					
7	$\frac{\log_5 4\cdot\log_3 5}{\log_3 4}$	$\frac{\log_2 9}{\log_2 5\cdot\log_5 3}$	$\frac{\log_7 25\cdot\log_5 7}{\log_3 2}$	$\frac{\log_3 8\cdot\log_2 3}{\log_5 16\cdot\log_4 5}$					
8	$\frac{\log_3 8\cdot\log_3 2}{\log_2 36-\log_2 9}$	$\frac{\log_3 4\cdot\log_3 5}{\log_9 2}$	$\frac{\log_5 4}{\log_{25}14-\log_{25}2}$	$\frac{\log_3 32-\log_3 2}{\log_3 2+\log_3 5}$					
Упростите выражения					*Ответы*				

Таблицы позволяют организовывать отработку навыков решения простейших заданий. Каждая таблица имеет вид шахматной доски. Давая задание, необходимо указать поле, на котором оно находится. Например: а4; b8. С помощью этих таблиц можно организовать групповую, индивидуальную работу с учащимися, а также проводить письменные мини-диктанты. Их можно использовать при устном счёте. Они позволяют подходить к контролю знаний дифференцировано, активизировать учебную деятельность учащихся. Можно организовать работу сразу по нескольким таблицам. Для того, чтобы работать с ними, необходимо сделать копии на парты.

Для проведения тематического рубежного и промежуточного контроля часто используется тестирование.

Например:

		Ответы
1	Решить уравнение: $6^{7-x}=36$	
2	Решить уравнение: $6^{12-x}=6^x$	
3	Решите уравнение: $6^{16+x}=\frac{1}{36}$	
4	Решите уравнение: $8^{18+x}=\frac{1}{64}$	
5	Найдите корень уравнения: $(\frac{1}{7})^{7+x}=49$	
6	Найдите корень уравнения: $(\frac{1}{6})^{6+x}=36$	
7	Решите уравнение: $2^x\cdot 3^x=36$	
8	Решите уравнение: $5^{2x-1}\cdot 5^{x-1}=5$	
9	Найдите корень уравнения: $(\frac{5}{7})^x=1{,}4$	
10	Решите уравнение: $5^x\cdot 2^x=0{,}4$	

		Ответы
1	Решите уравнение: $log_5(7\text{-}x)=2$	
2	Решите уравнение: $log_3(6\text{-}x)=3$	
3	Решите уравнение: $log_2(4\text{-}x)=3$	
4	Найдите корень уравнения: $log_{49}(x\text{-}6)=0{,}5$	
5	Найдите корень уравнения: $\log_{\frac{1}{7}}(6-x)=-2$	
6	Найдите корень уравнения: $\log_{\frac{1}{8}}(7-x)=-2$	
7	Найдите корень уравнения: $\log_{\frac{1}{7}}(9-x)=-2$	
8	Решите уравнение: $log_{6\text{-}x}81=2$ Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них	
9	Решите уравнение: $log_{3\text{-}x}25=2$ Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них	
10	Решите уравнение: $log_{z\text{-}7}64=2$	

1	Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{72\cdot 81}$ *1)* 18 *2)*9 *3)*2 *4)*6	
2	Представьте в виде степени выражение: $3^{\frac{2}{3}}:3^{\frac{11}{3}}$ *1)*1^{-3} *2)*3 *3)* $3^{\frac{2}{11}}$ *4)*3^{-3}	
3	Найдите значение выражения: $(3^{4\log_3 7})^{\frac{1}{4}}$ *1)*7 *2)*3 *3)*49 *4)* $\frac{1}{7}$	
4	Найдите область определения функции: $f(x)=log_4(49\text{-}x^2)$ *1)* (-7;7) *2)* $(-\infty;-7)\cup(7;+\infty)$ *3)* $(-\infty;-7]\cup[7;+\infty)$ *4)* $[-7;7]$	
5	Решите уравнение: $2^{3x\text{-}1}\cdot 5^{3x-1}=100$	

1	Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{49\cdot 189}$ *1)*3 *2)*9 *3)*11 *4)*21	
2	Представьте в виде степени выражение: $6^{-\frac{7}{3}}:6^{\frac{2}{3}}$ *1)*1^{-3} *2)* $6^{-\frac{7}{2}}$ *3)*$2^{-3,5}$ *4)*6^{-3}	
3	Найдите значение выражения: $\log_2\frac{1}{4}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$ *1)*0 *2)*-1 *3)*1 *4)* 5	
4	Найдите область определения функции: *f(x)=log*$_{0,3}$*(3x-x*^{2}*)* *2)* (0;3) *2)* $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$ *3)* $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$ *4)* $[0;3]$	
5	Решите уравнение: $\log_{0,2}(3x-2)-1=\log_{0,2}5$	

Тесты можно использовать частично, по ходу изучения темы. Тесты имеют ряд преимуществ перед обычными контрольными работами, главное из которых – оперативность. Тест можно провести и проверить быстрее и оценки объявить сразу по окончании, но полностью система тестов не может заменить традиционных форм контроля, например, письменная контрольная работа, составленная по уровням сложности:

Решить показательные уравнения:

<u>I уровень</u>

1) $5^{2x-8}=25$
2) $4^{4x-17}=64$
3) $5^{3x}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$
4) $2^{3x}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$
5) $3^{x^2+3x-1}=\frac{1}{27}$
6) $4^{x^2-8x+12}=\frac{1}{64}$
7) $4^{2x}-3\cdot 4^{x}-4=0$

8) $2^{2x}-14\cdot 2^{x}-32=0$

II уровень

1) $2^{5x-4}=16^{x+3}$

2) $3^{5x+2}=81^{x-1}$

3) $3\cdot 2^{x+3}-2^{x+4}=4$

4) $(\frac{1}{36})^{x+1}=\sqrt{6}$

5) $(\frac{1}{64})^{x-1}=4\sqrt{2}$

6) $3^{x+1}+2\cdot 3^{x+2}=21$

7) $4^{x^2-8x+12}=\frac{1}{64}$

8) $3^{x^2+3x-2}=\frac{1}{81}$

9) $2^{4x+3}-3\cdot 2^{4x-1}-5\cdot 2^{4x+1}=-56$

10) $3^{2x}-2\cdot 3^{x}-3=0$

11) $35^{1-x}=(\frac{1}{5})^{-x}\cdot 7^{x}$

III уровень

1) $0{,}125\cdot 4^{3x-9}=(\frac{\sqrt{2}}{8})^{-x}$

2) $0{,}25\cdot 4^{5x-16}=(\frac{\sqrt{2}}{4})^{-x}$

3) $4^{2x+1}+3\cdot 4^{2x-1}-5\cdot 4^{2x}=-64$

4) $63^{3-x}=(\frac{1}{7})^{-x}\cdot 9^{x}$

5) $5^{2x}+5^{-2x}=2$

6) $6^{2x}+6^{-2x}=2$

7) $8^{x-1}-6\cdot 8^{-x+2}-2=0$

8) $9^{x}-24\cdot 3^{\frac{x-3}{2}}=3\cdot 3^{-x}$

9) $8^{1+x^2}-8\cdot 8^{1-x^2}=56$

10) $25^{-\frac{3}{x}}+35^{-\frac{3}{x}}=49^{-\frac{3}{x}}$

Решить логарифмические уравнения

I уровень

1) $log_5(x-3)=2$
2) $log_3(x+1)=4$
3) $log_4(3x-4)=log_4(x+1)$
4) $log_2(5x+4)=log_2(x+5)$
5) $log_2(x^2-2x+8)=4$
6) $log_4(x^2+2x+49)=3$
7) $log_2(5x-73)-2=log_2 3$
8) $log_5(9x-124)-1=log_5 4$

II уровень

1) $log_{7x}2+log_{7x}4+log_{7x}5=log_{7x}(x+33)$
2) $log_{4x}2+log_{4x}4+log_{4x}6=log_{4x}(x+44)$
3) $log_6(x^2-3x+32)=2$
4) $log_3(x^2+7x+37)=3$
5) $2^{\log_2(3x^2)}=-x+24$
6) $5^{\log_5(2x^2)}=13x-21$
7) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+22)=\log_{\frac{1}{5}}(6x-5)$
8) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-9x+52)=\log_{\frac{1}{3}}(5x+4)$
9) $\log_{\frac{1}{3}}(3^x+2x-3)=-x$

III уровень

1) $lg(x+3)=-lg(2x+5)$
2) $lg(x+8)=-lg(3x+22)$
3) $3log_8^2(3x+79)-14log_8(3x+79)+16=0$
4) $3log_8^2(5x+89)-16log_8(5x+89)+20=0$
5) $2\log_2 x+\log_8 x-\log_{16} x=\dfrac{25}{3}$

6) $2\log_3 x + \log_9 x - \log_{27} x = \frac{17}{2}$

7) $\log_{\frac{1}{\sqrt{16}}}(1+3x) = 6 - 7^{\log_7 4}$

8) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(3+2x) = 8 - 5^{\log_5 4}$

9) $(x+3)^{\log_{x+3}(x+2)^2} = 9$

10) $\ln(x + \frac{19}{4}) = \ln\frac{5}{4x}$

На завершающем этапе в ходе заключительного занятия по теме «Показательные уравнения» можно дать таблицу, объединяющую весь необходимый материал по этой теме, для дальнейшего его использования и предложить составить аналогичную таблицу для темы «Логарифмические уравнения».

<table>
<tr><td colspan="6">Показательные уравнения
Решение простейших показательных уравнений основано на монтонности показательной функции y=a^x (a>0, a ≠ 1, D(y)=R, E(y)= (0;+∞)).
Простейшее показательное уравнение a^x=b при b>0 имеет единственное решение, записывающееся в общем виде x=log_ab. При b ≤ 0 решений нет.</td></tr>
<tr><td>$6^x=36$
$x=\log_6 36$
$x=2$</td><td>$2^x=\frac{1}{8}$
$x=\log_2(1/8)$
$x=-3$</td><td>$100^x=10$
$x=\log_{100}10$
$x=0,5$</td><td>$10^x=3$
$x=\lg 3$</td><td>$c^x=2$
$x=\ln 2$</td><td>$625^x=-25$
Решений нет</td></tr>
<tr><td colspan="6">Уравнения вида $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ равносильны уравнению $f(x)=g(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Методы решения показательных уравнений</td></tr>
<tr><td colspan="3">Приведение к одному основанию
$5^x \cdot 0,2 = 125^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{5}$
$5^x \cdot 5^{-1} = 5^{\frac{3x}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$</td><td colspan="3">Логарифмирование обеих частей уравнения
$6^{\frac{1}{x}} \cdot 2^x = 12$
Логарифмируем по</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>$5^{x-1} = 5^{\frac{3x+1}{2}}$
$x-1 = \frac{3x+1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -3$</td>
<td colspan="2">основанию 2:
$\frac{1}{x}\log_2 6 + x = \log_2 12 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad 1 + \log_2 3 + x^2 = (2 + \log_2$

$x^2-(2+log_2 3)x+(1+ log_2 3)=0.$
Ответ: $x=1; x=1+ log_2 3.$</td>
</tr>
<tr>
<td>Вынесение за скобку
$7^x+7^{x+2}=350$
$7^x(1+7^2)=350$
$7^x = \frac{350}{1+7^2} = 7$
$x=1$</td>
<td>Составление отношения
$4^x+3^{x-1}=4^{x-1}+3^{x+2}$
$4^x-4^{x-1}=3^{x+2}-3^{x-1}$
$4^{x-1}(4-1)=3^{x-1}(3^3-1)$
$4^{x-1}\cdot 3 = 3^{x-1}\cdot 26$
$\frac{4^{x-1}}{3^{x-1}} = \frac{26}{3} \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{4}{3})$

$x = \log_{\frac{4}{3}}\frac{26}{3} + 1$</td>
<td>Замена переменной
$25^x+5^{x+1}-6=0$
$5^x=y>0$
$y^2+5y-6=0$
$y=1; y=-6 <0$
$5^x=1 \Rightarrow x=0$</td>
</tr>
<tr>
<td>«Завуалированное» обратное число
$(\sqrt{5}-2)^x + (\sqrt{5}+2)^x = 18$
$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = 5-4 = 1$
Пусть $(\sqrt{5}-2)^x = y > 0$
$y + \frac{1}{y} = 18 \quad \Rightarrow \quad y = 9 \pm 4\sqrt{5}$
$(\sqrt{5}-2)^x = 9-4\sqrt{5} = (\sqrt{5}-2)^2 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad x = 2$
$(\sqrt{5}-2)^x = 9+4\sqrt{5} = (\sqrt{5}+2)^2 = (\sqrt{5}-2)^{-2} \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad x = -2$
Ответ: 2; -2.</td>
<td>Использование однородности
$3\cdot 16^x - 12^x = 4\cdot 9^x$
Делим на $9^x>0$:
$3\cdot(\frac{16}{9})^x - (\frac{12}{9})^x = 4$
$3\cdot(\frac{4}{3})^{2x} - (\frac{4}{3})^x - 4 = 0$
Пусть</td>
<td>Использовани е однотонност и
$2^x+5^x=29$
$f(x)=2^x+5^x$
возрастает на R.
$f(2)=29 \Rightarrow$
$x=2$ –
единственный корень</td>
</tr>
</table>

	$(\frac{4}{3})^x = y > 0 \Rightarrow$ $3y^2 - y - 4 = 0 \Rightarrow$ $y = \frac{4}{3}; \quad y = -1 < 0 \Rightarrow$ $(\frac{4}{3})^x = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 1$	

Целесообразно в начале занятий проводить кросс-опросы на время (1 мин; 2 мин) с целью активизации учебной деятельности, концентрации внимания, воспитания интереса к изучению математики.

Например:

1. Числа, расположенные правее нуля (положительные)
2. Одно из решений уравнения (корень)
3. Результат умножения (произведение)
4. Выражение, находящееся под дробной чертой (знаменатель)
5. Число, не являющееся ни отрицательным, ни положительным (нуль)
6. Сотая часть числа (процент)
7. Число, содержащее в записи запятую (десятичная дробь)
8. Логарифм произведения равен… (сумме логарифмов)
9. Расстояние, деленное на время (скорость)
10. Из двух чисел, расположенных на координатной прямой то число меньше, которое расположено…. (левое)
11. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели….. (складываются)
12. Логарифм частного равен… (разности логарифмов)
13. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели…. (вычитаются).

Решение простейших логарифмических уравнений основано на монотонности логарифмических функций $y = \log_a x (a > 0; a \neq 1; D(y) = (0; +\infty); E(y) = R)$.

Типы простейших логарифмических уравнений
1) $\log_a x = b$ при всех допустимых a имеет единственное решение $x = a^b$ 2) $\log_a(f(x)) = b$равносильно уравнению $f(x) = a^b$. 3) $\log_a(f(x)) = g(x)$равносильно уравнению $f(x) = a^{g(x)}$.

<table>
<tr><td colspan="3">4) $\log_a(f(x)) = \log_a(g(x))$равносильно системе $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

Причем любую из последних строк можно (и, как правило, нужно) опустить.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Уравнения, сводящиеся к типу 4</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\log_2(x^2 + x - 2) = 1 + \log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x^2 + x - 2) = \log_2(2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 2x \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$</td></tr>
<tr><td>Замена переменной

$\lg^2 \frac{10}{x} + \lg x = 7$

$(\lg 10 - \lg x)^2 + \lg x = 7 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 3 \\ \lg x = -2 \end{array}\right.$

Ответ:

$x = 1000; x = 0{,}01$</td><td colspan="2">Потенциирование уравнений, сводящихся к типу 4

$\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) + \log_3(\frac{x}{2}) = 2 - 2\log_{\frac{1}{9}}(x^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x + 1) - \log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{2} = \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9} - \log_{\frac{1}{3}}(x^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}\frac{2(x + 1)}{x} = \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9x^2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{2(x + 1)}{x} = \frac{1}{9x^2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11} - 3}{6}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Уравнения с неизвестным в основании логарифма</td></tr>
<tr><td>$\log_x 5 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$

Ответ: $\sqrt[3]{5}$</td><td>$\log_{x^2} x = 0{,}5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 1 \\ x > 0 \\ (x^2)^{0.5} = x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ \lvert x \rvert = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ответ: $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$</td><td>$\log_{(-x)} 25 = -2$

$\begin{cases} x < 0 \\ x \neq -1 \\ (-x)^{-2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \neq -1 \\ x^2 = \frac{1}{25} \end{cases}$

Ответ: $x = -\frac{1}{5}$</td></tr>
</table>

При решении логарифмических уравнений можно либо находить область определения уравнения (ООУ) в начале решения, либо выполнять проверку найденных решений.

Список литературы

1. Н.В. Богомолов, П. И. Самойленко Математика (учебник для ссузов)
2. В. Т. Лисичкин; И. Л. Соловейчик Математика (учебное пособие для техникумов)
3. Алгебра и начала анализа сборник задач под редакцией С.А. Шестакова
4. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства
5. В.В. Кривоногов Нестандартные задания по математике
6. П.И. Алтынов Алгебра и начала анализа (тесты)