А.Ю. Горячкина, О.М. Корягина

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО
СПУТНИК+

Москва 2020

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.34я73
Г 71

Горячкина А.Ю., Корягина О.М.
Г 71 Способы преобразования: Учебно-методическое пособие – М.: Издательство «Спутник +», 2020. – 36 с.

ISBN 978-5-9973-5399-5

Учебно-методическое пособие содержит теоретический материал и практические рекомендации по решению задач по учебной дисциплине «Начертательная геометрия» по теме «Способы преобразования». Представлены алгоритмы решения метрических и позиционных задач.

Пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Начертательная геометрия» и обучающихся по направлениям подготовки 15.03.01 «Машиностроение», 15.05.01 и Проектирование технологических машин и комплексов».

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.34я73

Отпечатано с готового оригинал-макета.

ISBN 978-5-9973-5399-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

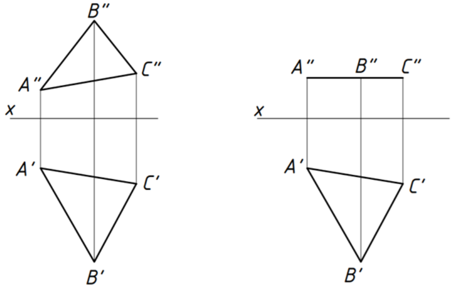
1. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 4
1.1. Способ замены плоскостей проекций 5
1.2. Способ плоскопараллельного перемещения 9
2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ И УГЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПОСОБОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 16
2.1. Определение высоты пирамиды 17
2.2. Определение истинного вида основания пирамиды 19
2.3. Определение величины двугранного угла 22
2.4. Определение угла наклона ребра к основанию пирамиды 25
2.5. Определение длин ребер и углов их наклона к основанию пирамиды способом вращения вокруг проецирующей прямой (высоты пирамиды) 30
2.6. Построение проекций плоской фигуры и определение углов ее наклона к плоскостям проекций 31
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ 34
ЛИТЕРАТУРА 34

1. Способы преобразования

Проекции геометрических фигур не сохраняют размеры и формы оригиналов, если расположены произвольным образом по отношению к плоскостям проекций.

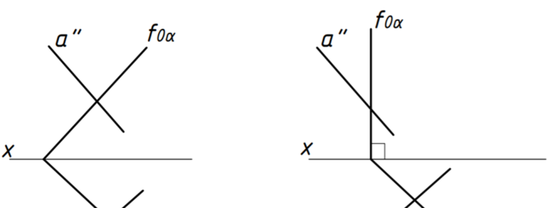
Частные положения фигур относительно плоскостей проекций более удобны для решения геометрических задач:

- метрических задач (определение длины, угла, площади) (рис. 1);
- позиционных задач (взаимное положение геометрических фигур) (рис. 2).



а *б*

Рис. 1 Чертеж плоскости: плоскость общего положения (*а*), плоскость уровня (*б*)



а *б*

Рис. 2 Чертеж плоскости: плоскость общего положения (*а*), проецирующая плоскость (*б*)

Переход от общего положения геометрической фигуры к частному можно осуществить путем преобразования исходного положения фигур в пространстве.

Преобразование – приведение геометрических фигур в частное положение (параллельное или перпендикулярное) относительно плоскостей проекций с целью обеспечения наглядности изображения и упрощения решения метрических и позиционных задач.

Преобразование сводится к решению следующих задач:

– преобразование прямой общего положения в прямую уровня;

– преобразование прямой общего положения в проецирующую;

– преобразование плоскости общего положения в проецирующую;

– преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня.

Задача преобразования при ортогональном проецировании может быть выполнена двумя путями:

– выбором новой плоскости проекций, по отношению к которой геометрическая фигура, не меняющая своего положения в пространстве, окажется в частном положении (способ замены плоскостей проекций);

– перемещением в пространстве геометрической фигуры так, чтобы она заняла частное положение относительно плоскостей проекций, которые при этом не меняют своего положения (способ плоскопараллельного перемещения).

1.1. Способ замены плоскостей проекций

Способ замены плоскостей проекций может быть использован для решения как метрических, так и позиционных задач.

Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что в системе двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций заменяют одну из плоскостей проекций на новую плоскость, перпендикулярную неизменной плоскости проекций. При этом положение геометрических фигур в пространстве остается неизменным.

При выборе положения новой плоскости проекций исходят из того, что в новой системе плоскостей проекций геометрическая фигура должна занять частное положение (параллельное или перпендикулярное новой плоскости проекций), обеспечивающее получение чертежа, удобного для решения поставленных задач.

Если замена одной плоскости проекций не позволяет решить задачу, выполняют замену двух плоскостей. При этом всегда сохраняется взаимная перпендикулярность двух плоскостей проекций. Плоскости проекций пересекаются по оси проекций. Линии связи перпендикулярны оси проекций. Одна из плоскостей является общей для двух систем плоскостей проекций (рис. 3).

При этом переход от исходной системы плоскостей проекций к новой может проходить по одному из алгоритмов:

$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\frac{\pi_3}{\pi_1} \rightarrow x_2\frac{\pi_3}{\pi_4}$ или $x\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\frac{\pi_2}{\pi_3} \rightarrow x_2\frac{\pi_4}{\pi_3}$.

Условия преобразования:

1) положение фигуры неизменно;

2) изменяется положение одной из двух плоскостей проекций;

3) новую плоскость проекций располагают перпендикулярно оставшейся плоскости проекций.

Рассмотрим способ замены плоскостей проекций на примере проецирования точки A (см. рис. 3).

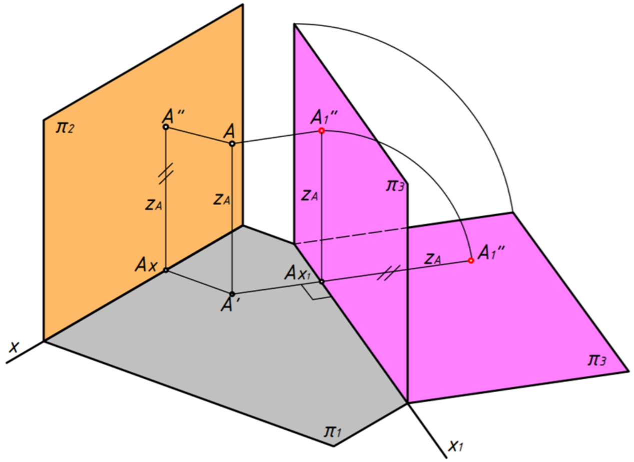


Рис. 3 Способ замены плоскостей проекций

Задана точка A (A', A'') в системе плоскостей проекций $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$. Определим положение проекций точки A, если плоскость π_2 заменить новой плоскостью π_3, расположенной перпендикулярно к плоскости π_1. Плоскость π_3 и π_1 образуют новую систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций с новой осью проекций x_1 ($x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$).

В новой системе плоскостей проекций положение горизонтальной проекции A' точки A остается без изменения, так как точка A и плоскость π_1 не меняли своего положения в пространстве. Для нахождения новой фронтальной проекции A_1'' достаточно ортогонально спроецировать точку A на плоскость π_3.

Для получения проекционного чертежа плоскость проекций π_3 поворотом вокруг оси x_1 совмещают с плоскостью π_1. Поскольку плоскость π_1 не изменяет своего положения, расстояние от точки A до этой плоскости не изменяется в старой $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ и новой $x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$ системах плоскостей проекций, поэтому, координата Z_A точки A на плоскостях π_2 и π_3 сохраняет свое значение. На рис. 4 показано, как выглядит способ замены плоскостей проекций на чертеже. Задав новую ось проекций x_1, перпендикулярно к ней через точку A' проводят линию связи, на которой от оси x_1 откладывают координату Z_A точки A и отмечают точку A_1''.

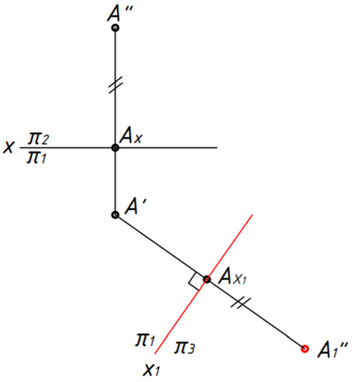


Рис. 4 Способ замены плоскостей проекций

При обозначении проекции точки на новой плоскости проекций к буквенному обозначению точки добавляют индекс равный индексу новой оси проекций и добавляют такое же количество штрихов, какое было на замененной плоскости проекций. Для данного примера – A_1''.

Свойства комплексного чертежа точки в новой системе плоскостей проекций:

1. Проекция точки на новую плоскость проекций располагается на одной линии связи с оставшейся неизменной проекцией этой точки; линия связи перпендикулярна к новой оси проекций;

2. Расстояние от новой оси проекций до новой проекции точки равно расстоянию от точки до неизменной плоскости проекций.

Знаная правила построения одной точки в новой системе плоскостей проекций, можно построить проекции любого числа точек, следовательно, и любой геометрической фигуры.

Рассмотрим преобразования прямой AB общего положения в прямую уровня и в проецирующую прямую. Прямая общего положения в положение прямой уровня переводится за одну замену плоскостей проекций (рис. 5). Условия замены:

$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$ $(\pi_3 \perp \pi_1;\ \pi_3 || AB;\ x_1 || A'B'.\ |A_1''B_1''| = |AB|;\ \alpha^0 = AB \wedge \pi_1)$.

Второй заменой плоскостей проекций прямую AB переводят в проецирующее положение относительно новой плоскости проекций π_4 (см. рис. 5).

Условия замены:

$x_1\frac{\pi_3}{\pi_1} \rightarrow x_2\frac{\pi_3}{\pi_4}$ $(\pi_4 \perp \pi_3;\ \pi_4 \perp AB;\ x_2 \perp A_1''B_1'')$.

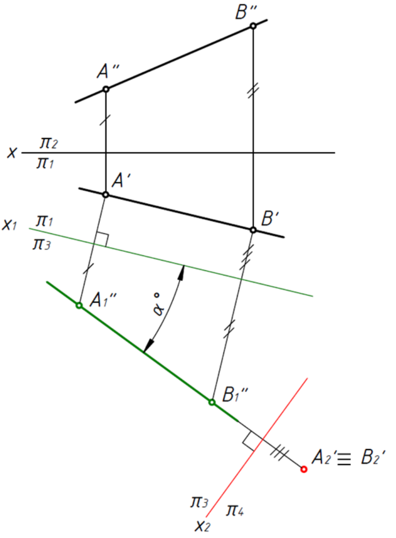


Рис. 5 Преобразование прямой общего положения в проецирующее положение способом замены плоскостей проекций

Рассмотрим преобразования плоскости общего положения в проецирующее положение и в положение плоскости уровня (рис. 6).

Для того, чтобы плоскость общего положения заняла положение проецирующей плоскости, необходимо задать новую плоскость проекций так, чтобы плоскость общего положения располагалась перпендикулярно ей.

Плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них содержит перпендикуляр к другой плоскости. Отсюда, чтобы заданная плоскость общего положения была перпендикулярна к новой плоскости проекций, необходимо преобразовать какую-либо прямую этой плоскости в проецирующую. Любая плоскость содержит прямые уровня (горизонтали, фронтали). Так как их преобразование в проецирующие прямые требует замены одной плоскости проекций, то задача преобразования плоскости общего положения в проецирующее положение рещается заменой одной плоскости проекции. При этом, новую плоскость проекций нужно расположить перпендикулярно к прямой уровня заданной плоскости общего положения.

Для того, чтобы преобразовать плоскость общего положения в положение плоскости уровня необходимо произвести две последовательные замены плоскостей проекций.

При первой замене новую плоскость проекций π_3 следует расположить перпендикулярно к заданной плоскости общего положения. Для этого в плоскости общего положнеия проводят горизонталь h (или фронталь f) (см. рис. 6).

Условие замены:

$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \to x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$ ($\pi_3 \perp \pi_1$; $\pi_3 \perp (ABC)$; $x_1 \perp h'$; $\alpha^0 = (ABC) \wedge \pi_1$).

Второй заменой новую плоскость проекций π_4 располагают параллельно заданной плоскости (ABC) (см. рис. 6).

Условие замены:

$x_1\frac{\pi_3}{\pi_1} \to x_2\frac{\pi_3}{\pi_4}$ ($\pi_4 \perp \pi_3$; $\pi_4 \| (ABC)$; $x_2 \| (A_1''B_1''C_1'')$; $\Delta ABC = \Delta A_2'B_2'C_2'$).

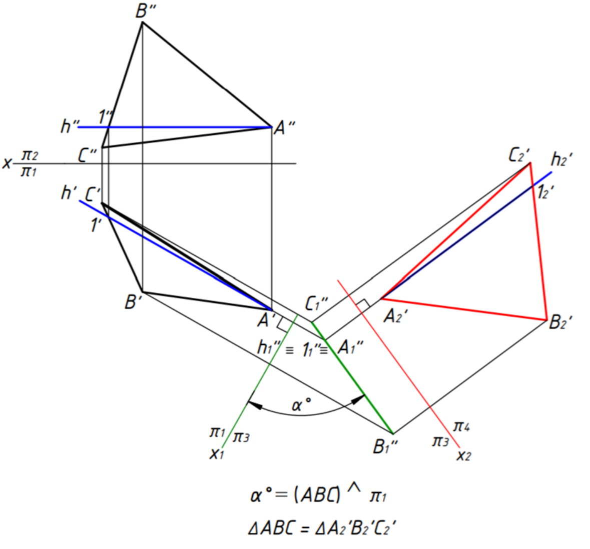


Рис. 6 Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня способом замены плоскостей проекций

1.2. Способ плоскопараллельного перемещения

Плоскопараллельным перемещением геометрической фигуры называется такое перемещение, при котором все точки геометрической фигуры перемещаются в плоскостях, параллельных одной из плоскостей проекций (π_1 или π_2).

Условия преобразования:

1). положение плоскостей проекций неизменно;

2). изменяется положение фигуры – все точки фигуры движутся в плоскостях, параллельных плоскости проекций.

Если в системе двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций выполнить плоскопараллельное перемещение фигуры относительно одной из плоскостей проекций, то проекция фигуры на эту плоскость сохранит свои форму и размеры. Проекция той же фигуры на другую плоскость непрерывно изменяется: при этом все точки этой проекции будут перемещаться по прямым, перпендикулярным линиям связи (или параллельным оси проекций).

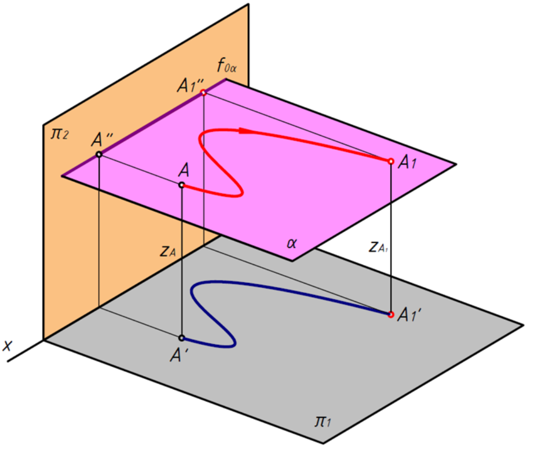


Рис. 7 Способ плоскопараллельного перемещения

Плоскопараллельное перемещение точки A в положение A_1 относительно горизонтальной плоскости проекций показано на рис. 7. Точка A перемещается по произвольной траектории в плоскости α, параллельной горизонтальной плоскости проекций π_1.

Построение новых проекций точки A при плоскопараллельном перемещении показано на рис. 8.

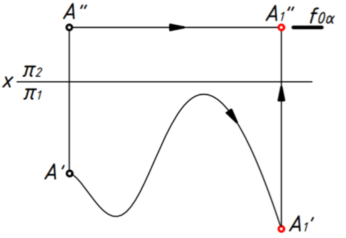


Рис. 8 Построение проекций точки при плоскопараллельном перемещении

Горизонтальную проекцию A' точки A перемещают в новое положение A_1'. Фронтальную проекцию A_1'' точки A_1 строят, проводя горизонтальную линию связи из фронтальной проекции A'' и вертикальную линию связи из A_1'.

Отрезок общего положения в проецирующее положение способом плоскопараллельного перемещения переводят за два преобразования (рис. 9). Первым преобразованием отрезок общего положения переводят в положение отрезка уровня, а вторым преобразованием – в проецирующее положение.

Последовательность построений:

1. Горизонтальную проекцию $A'B'$ отрезка AB перемещают в новое положение $A_1'B_1'$, параллельное оси x. При этом $A'B' = A_1'B_1'$, Фронтальную проекцию $A_1''B_1''$ отрезка строят, проводя горизонтальные линии связи через точки A'' и B'' и вертикальные линии связи через точки $A1'$ и $B1'$. Угол α между осью x и новой проекцией $A_1''B_1''$ будет равен углу наклона отрезка AB к горизонтальной плоскости проекций. $AB || \pi_2$.

2. Фронтальную проекцию $A_1''B_1''$ отрезка AB перемещеют в положение перпендикулярное оси x. Горизонтальную проекцию $A_2'B_2'$ (в данном случае – точку) строят, проводя вертикальную линию связи через проекции A_2'' и B_2'' точек и горизонтальную линию связи через проекции A_1' и B_1' . На горизонтальню плоскость проекции отрезок спроецируется в точку $A_2' \equiv B_2'$; $AB \perp \pi_1$.

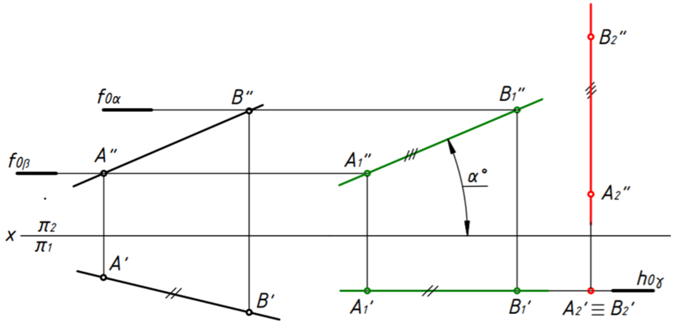


Рис. 9 Преобразование отрезка общего положения
в горизонтальнопроецирующее положение
способом плоскопараллельного перемещения

Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня способом плоскопараллельного перемещения показано на рис. 10. Плоская фигура проецируется без искажения, если ее плоскость параллельна одной из плоскостей проекций. Задача преобразования плоскости общего положения (ΔABC) в плоскость уровня решается в два этапа.

Последовательность построений:

1. плоскость общего положения преобразуют в проецирующую плоскость, при этом горизонталь плоскости треугольника ABC при перемещени всей плоскости должна стать фронтально проецирующей прямой, а фронтальная проекция $A_1''B_1''C_1''$ треугольника спроецируется в отрезок, при этом $\Delta\, A'B'C' = \Delta\, A_1'B_1'C_1'$;

2. проецирующую плоскость преобразуют в плоскость уровня, для этого фронтальную проекцию $A_1''B_1''C_1''$ треугольника перемещают в положение параллльное оси x. На горизонтальную плоскость проекций треугольник проецируется в натуральную величину $\Delta ABC = \Delta\, A_2'B_2'C_2'$.

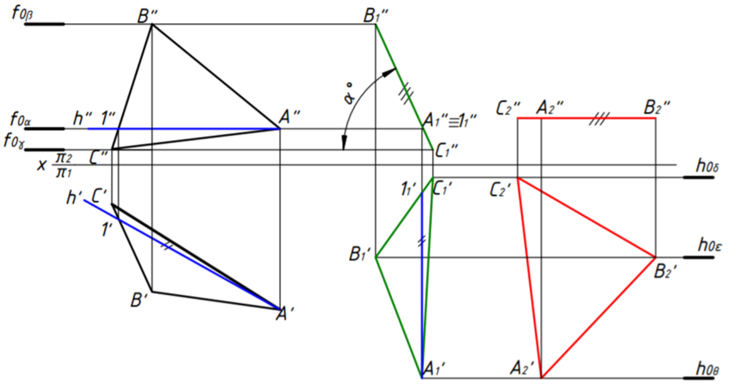


Рис. 10 Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня способом плоскопараллельного перемещения

Способ вращения вокруг проецирующей прямой

Способ вращения вокруг проецирующей прямой – частный случай плоскопараллельного перемещения.

Вращение – перемещение точки по окружности в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Условия преобразования:

1) ось вращения i неподвижна и перпендикулярна плоскости проекций;
2) все точки фигуры перемещаются по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси i;
3) точки лежащие на оси вращения i неподвижны.

При вращении (рис. 11) вокруг некоторой неподвижной оси i, называемой осью вращения, каждая точка A вращаемой фигуры перемещается в плоскости α, перпендикулярной оси вращения. Эта плоскость называется плоскостью вращения. Точка перемещается по окружности m (окружности вращения), центр O которой (центр вращения) находится на пересечении оси вращения i с плоскостью вращения α. Радиус окружности m (радиус вращения) равен расстоянию от центра вращения O до вращаемой точки A (R=|OA|). Поскольку ось вращения на рис. 11 перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то на горизонтальную плоскость проекций окружность вращения m проецируется без искажения в окружность m', а на фронтальную плоскость проекций в отрезок m'', лежащий на проекции $f_{o\alpha}$ плоскости вращения. При перемещении точки A в положение A_1 горизонтальная проекция этой точки A' перемещается по окружности m' в положение A_1', а фронтальная проекция A'' – в положение A_1'' (рис. 12), $A1'' \in fo\alpha$.

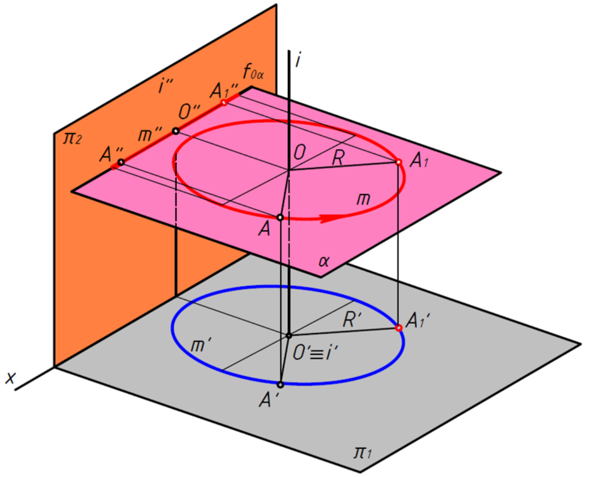


Рис. 11 Способ вращения вокруг проецирующей прямой

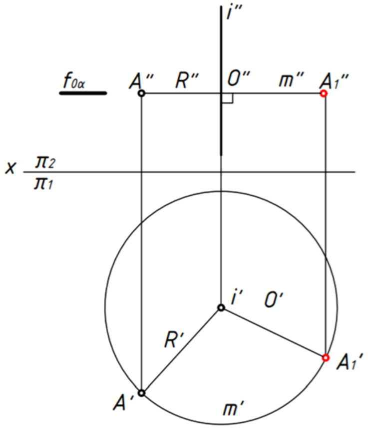


Рис. 12 Преобразование положения точки вращением вокруг проецирующей прямой

На рис.13 отрезок AB прямой общего положения поворотом вокруг горизонтальнопроецирующей оси i переводят в положение, параллельное фронтальной плоскости проекций. Точка B принадлежит оси вращения и своего положения при вращении не изменяет. Точка A переходит в положение A_1, т.е. отрезок совмещается с плоскостью β (плоскостью совмещения), которая проходит через ось вращения и параллельна фронтальной плоскости проекций. После поворота фронтальная проекция отрезка равна его натуральной величине

$|AB|=|A_1''B''|$, а угол $\alpha°$ равен углу наклона отрезка AB к горизонтальной плоскости проекций.

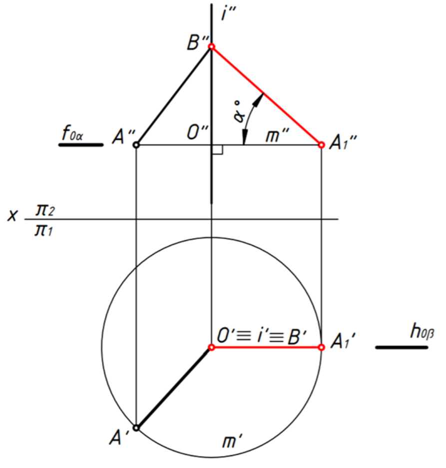


Рис. 13 Преобразование отрезка прямой общего положения в отрезок уровня вращением вокруг проецирующей прямой

Способ вращения вокруг прямой уровня

Вращение геометрической фигуры вокруг ее линии уровня выполняют с целью преобразования плоскости общего положения в плоскость уровня при решении следующих задач:

1) определение величины плоской фигуры;

2) определение величины плоского угла;

3) построение в заданной плоскости какой-либо фигуры по заданным условиям.

Прямая уровня, вокруг которой вращается плоскость общего положения, должна принадлежать этой плоскости. В этом случае вращение плоскости сводится к вращению только одной ее точки, не принадлежащей оси вращения.

Условия преобразования:

1) ось вращения i неподвижна и параллельна плоскости проекций (является прямой уровня);

2) прямая уровня принадлежит плоскости общего положения;

3) все точки фигуры перемещаются по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси i ;

4) точки лежащие на оси вращения i неподвижны.

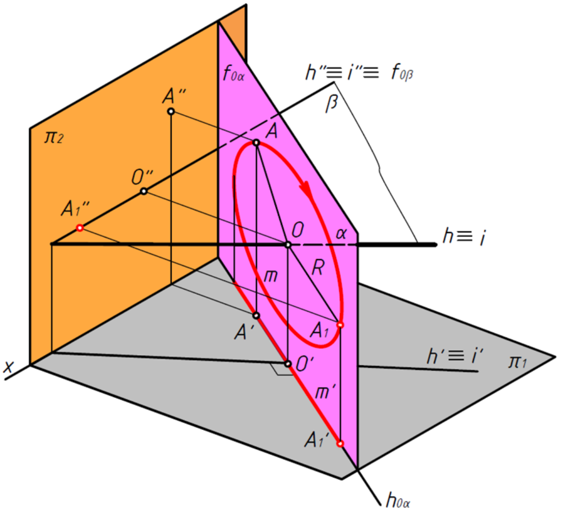


Рис. 14 Вращение вокруг прямой уровня

На рис. 14, 15 плоскость общего положения задана точкой A и прямой h. Вращением точки A вокруг горизонтали h плоскость общего положения преобразуют в плоскость уровня, параллельную плоскости π_1. Плоскость α, перпендикулярная оси вращения, в которой точка A вращется по окружности радиуса R, называется плоскостью вращения. O – центр вращения; отрезок OA – радиус вращения. Плоскость β – плоскость совмещения, параллельная горизонтальной плоскости проекций.

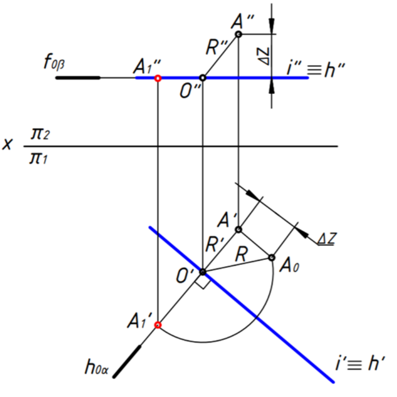


Рис. 15 Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня вращением вокруг прямой уровня

Плоскость вращения α является горизонтально проецирующей. Ее горизонтальная проекция $h_{o\alpha}$ перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали h'. При вращении точки вокруг горизонтали ее горизонтальная проекция перемещается по горизонтальной проекции плоскости вращения $h_{o\alpha}$. После поворота отрезок OA будет проецироваться на π_1 без искажения. Длину отрезка OA определяют по правилу прямоугольного треугольника и это расстояние откладывают от точки O'. (A_1'; A_1'') – новые проекции точки A после вращения.

Следует отметить, что вращение вокруг прямой уровня можно рассматривать как композицию способа замены плоскостей проекций и вращения вокруг проецирующей прямой.

2. Решение задач на определение расстояний и углов с использованием способов преобразования

Дана пирамида $SABC$ (рис. 16). Ребра и грани пирамиды – прямые и плоскости общего положения.

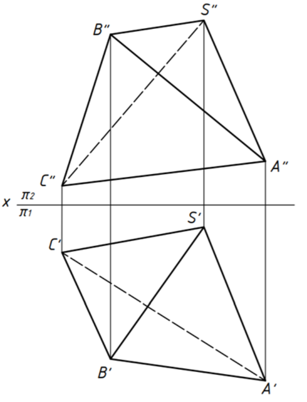


Рис. 16 Условие задачи

Необходимо определить:

1. высоту пирамиды;
2. истинный вид основания ABC;
3. угол межде гранью SAB и основанием ABC;
4. угол между ребром SA и основаним ABC;
5. длины ребер и углы их наклона к основанию пирамиды вращением вокруг высоты.

Решение каждой задачи можно разбить на следующие этапы:

– анализ задачи;

– составление плана решения;

– построения на чертеже.

Цель анализа – определить, какими свойствами обладают данные и искомые геометрические фигуры, и установить связь между ними. По заданным проекциям точек и линий необходимо определить, какие фигуры заданы, как они расположены в пространстве относительно плоскостей проекций и друг относительно друга.

План решения устанавливает последовательность действий, необходимых для решения задачи. На этом этапе важно определить рациональный способ преобразования чертежа. Используя только один из рассмотренных выше способ преобразования, всегда можно перейти от общего положения геометрической фигуры в пространстве к частному положению. Но бывает целесообразно применить не один какой-либо способ, а использовать композицию способов, например, последовательное применение способов замены плоскостей проекций, затем вращения вокруг проецирующей прямой.

В соответствии с принятым планом решения выполнить последовательные построения на чертеже. Правильность полученного результата зависит от выбора рационального пути решения и от точности выполнения графических построений.

Доказательством правильности решения задачи является соответствие искомого результата поставленным условиям при соблюдении необходимых теоретических положений начертательной геометрии.

2.1. Определение высоты пирамиды

Высота пирамиды определяется длиной перпендикуляра, опущенный из вершины пирамиды *S* на плоскость основания (*ABC*). Этот отрезок *SH* проецируется на какую-либо плоскость проекций без искажения, если параллелен ей, а плоскость основания при этом занимает проецирующее положение. Рассмотрим варианты решения данной задачи различными способами преобразования.

Способ замены плоскостей проекций

Процесс преобразования сводится к преобразованию плоскости общего положения (*ABC*) в проецирующую плоскость.

Последовательность построений:

1. Новая плоскость проекций π_3 должна быть перпендикуляна основанию (*ABC*) (рис. 17).

Условия замены:

$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \to x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$ ($\pi_3 \perp \pi_1$; $\pi_3 \perp (ABC)$; $x_1 \perp h'$)

2. Высота *SH* на плоскость π_3 спроецируется в натуральную величину. $S_1''H_1'' \perp B_1''S_1''$ (по теореме о частном случае проецирования прямого угла); $|SH|=|S_1''H_1''|$.

3. На основании признака перпендикулярности прямой и плоскости горизонтальную проекцию точки H – H' определяют как точку пересечения горизонтальной проекции перпендикуляра, опущенного из точки S', к

основанию пирамиды ($S'H' \perp h'$) и линии связи, на которой расположены две проекции точки H (H', H_1''). Фронтальную проекцию точки H – H'' определяют по координате Z точки H.

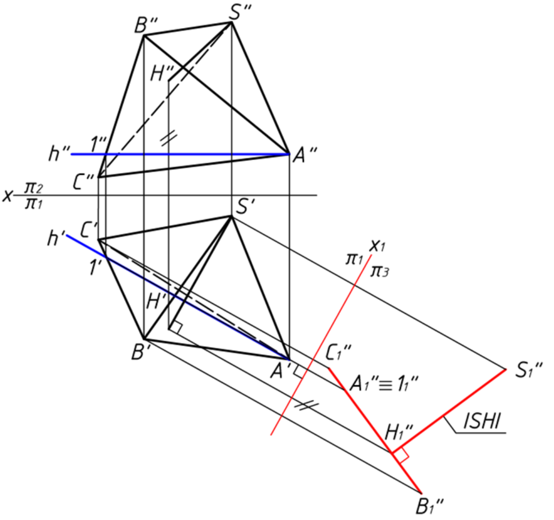


Рис.17 Определение высоты пирамиды способом замены плоскостей проекций

Способ плоскопараллельного перемещения

Решение задачи определения высоты пирамиды способом плоскопараллельного перемещения представлено на рис. 18.

Последовательность построений:

1. Плоскость основания пирамиды переводят в положение проецирующей плоскости (на рис. 18 – фронтальнопроецирующей). Горизонтальную проекцию пирамиды $S'A'B'C'$ перемещают так, чтобы горизонтальная проекция горизонтали h' плоскости основания пирамиды заняла положение препендикулярное оси x. По отношению к фронтальной плоскости проекций основание пирамиды займет проецирующее положение, а высота SH – параллельное плоскости π_2.

2. Высота SH на плоскость π_2 спроецируется в натуральную величину. $S'H' \perp B_1''S_1''$; $|SH|=|S_1''H_1''|$.

3. Горизонтальную проекцию точки H – H' определяют на основании признака перпендикулярности прямой и плоскости $S'H' \perp h'$ и условия $|S'H'|=|S_1'H_1'|$. Фронтальную проекцию точки H – H'' определяют на пересечении линии связи для проекций H' – H'' с прямой, параллельной оси x и проходящей через точку H_1''.

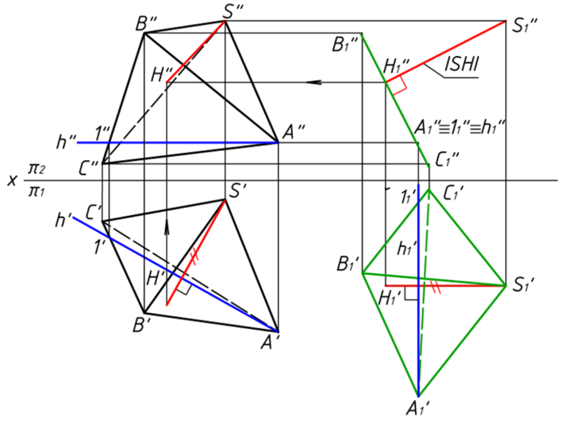


Рис.18 Определение высоты пирамиды
способом плоскопараллельного перемещения

2.2. Определение истинного вида основания пирамиды

Основание пирамиды – плоскость общего положения. Для определения истинного вида основания, необходимо плоскость основания преобразовать в плоскость уровня. Задача может быть решена следующими способами:

– вращением вокруг прямой уровня (рис. 19);
– заменой плоскостей проекций (рис. 20);
– плоскопараллельным перемещением (рис. 21; рис. 22);
– вращением вокруг проецирующей прямой (рис. 23).

Вращение вокруг прямой уровня

Плоскость основания пирамиды (ABC) – плоскость общего положения. Вращением вокруг горизонтали или фронтали плоскость (ABC) переводят в положение плоскости уровня, параллельной соответствующей плоскости проекций. На рис. 19 показано преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня, вращением вокруг фронтали.

Последовательность построений:

1. $f \equiv i$ – ось вращения;
2. α – плоскость вращения точки C; плоскость вращения перпендикулярна оси вращения $f_{o\alpha} \perp f''$;
3. O – центр вращения точки C; OC – радиус вращения точки C; Проекции точки C после поворота – (C_1', C_1''). Проекции точки A (A_1', A_1'') можно получить аналогичным вращением либо достроить геометрически, исходя из того, что каждая точка геометрической фигуры вращается в своей плоскости, перпендикулярной оси вращения (для точки A $f_{o\alpha 1} \perp f''$) и $1 \in AC$;
4. β – плоскость совмещения; $\Delta ABC || \pi_2$; $\Delta ABC = \Delta A_1''B_1''C_1''$.

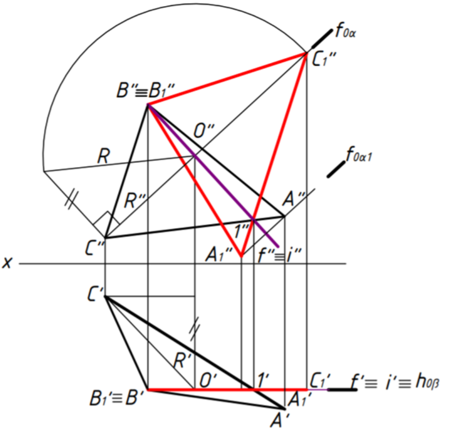


Рис. 19 Определение истинного вида основания пирамиды способом вращения вокруг прямой уровня

Замена плоскостей проекций

Плоскость общего положения в положение плоскости уровня переводят за две замены плоскостей проекций (см. рис. 20).

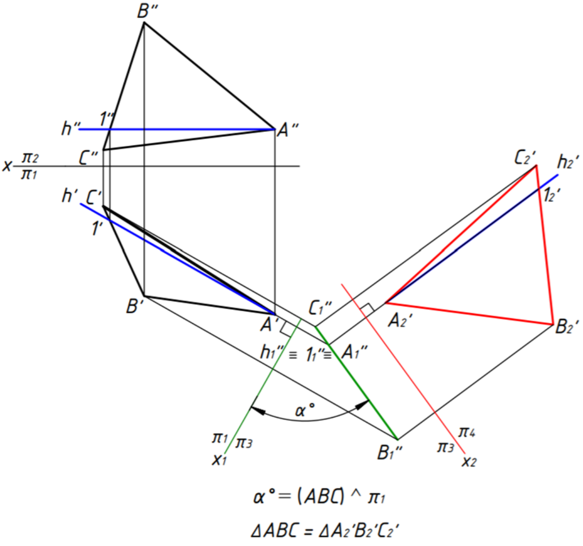


Рис. 20 Определение истинного вида основания пирамиды способом замены плоскостей проекций

Последовательность построений:

1. Плоскость (ABC) первой заменой плоскости проекций переводят в проецирующее положение.

Условия замены:

$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \to x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$ ($\pi_3 \perp \pi_1$; $\pi_3 \perp ABC$; $\pi_3 \perp h$; $x_1 \perp h'$)

2. Вторая замена плоскости проекций переводит проецирующую плоскость в положение плоскости уровня.

Условия замены:

$x_1\frac{\pi_3}{\pi_1} \to x_2\frac{\pi_3}{\pi_4}$ ($\pi_4 \perp \pi_3$; $\pi_4 || ABC$; $x_2 || A_1''B_1''C_1''$; $\Delta ABC = \Delta A_2'B_2'C_2'$).

Плоскопараллельное перемещение

Первым перемещением переводят плоскость основания в проецирующее положение. Вторым – в положение плоскости уровня (рис. 21, 22).

$\alpha^0 = (ABC) \wedge \pi_1$, $\beta^0 = (ABC) \wedge \pi_2$.

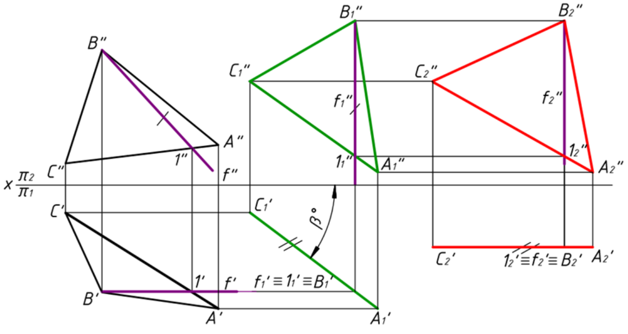


Рис. 21 Определение истинного вида основания пирамиды способом плоскопараллельного перемещения

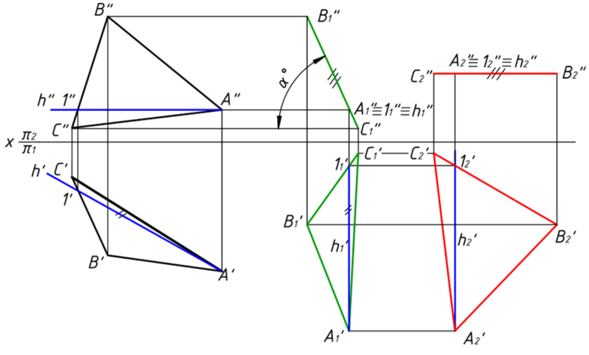


Рис. 22 Определение истинного вида основания пирамиды способом плоскопараллельного перемещения

Вращение вокруг проецирующей прямой

Плоскость общего положения в положение плоскости уровня вращением вокруг проецирующей прямой переводят за два преобразования:

1 вращение – плоскость общего положения переводят в положение проецирующей плоскости относительно какой-либо плоскости проекций;

2 вращение – проецирующую плоскость переводят в положение плоскости уровня по отношению ко второй плоскости проекций.

Последовательность построений:

1. На рис. 23 вращением вокруг горизонтальнопроецирующей прямой i, проходящей через точку A, плоскость (ABC) из общего положения переведена в проецирующее относительно плоскости π_2 , $(ABC) \perp \pi_2$. При этом $h_1' \perp x$. Все точки плоскости ABC при повороте перемещаются на одинаковй угол φ.

$A'1' = A_1'1_1'$; $\Delta A'B'C' = \Delta A_1'B_1'C_1'$.

2. Вращением вокруг фронтальнопроецирующей прямой i_1, проходящей через точку B, плоскость (ABC) из фронтальнопроецирующего положения переведена в положение горизонтальной плоскости , $(ABC) \| \pi_1$. $A_2''B_2''C_2'' \| x$; $\Delta ABC = \Delta A_2'B_2'C_2'$.

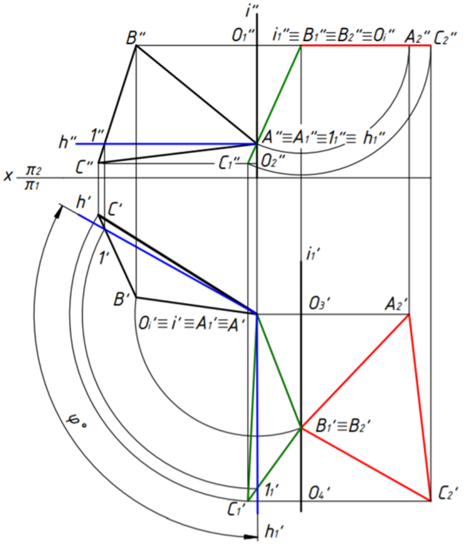


Рис. 23 Определение истинного вида основания пирамиды способом вращения вокруг проецирующей прямой

2.3. Определение величины двугранного угла

Двугранный угол между плоскостями измеряется величиной линейного острого угла между прямыми, перпендикулярными ребру двугранного угла и принадлежащими заданным плоскостям. Если плоскость линейного угла будет параллельна плоскости проекций, то угол будет проецироваться на данную плоскость проекций без искажения. Следовательно, ребро двугранного угла должно быть перпендикулярно этой плоскости проекций.

Эта задача может быть решена способом замены плоскостей проекций (рис. 24), способом плоскопараллельного перемещения (рис. 25) и способом вращения вокруг проецирующей прямой (рис. 26).

Способ замены плоскостей проекций

Ребро двугранного угла – прямая AB – прямая общего положения в проецирующее положение переводят двумя заменами плоскостей проекций.

Последовательность построений:

1. Общую для плоскостей (ABC) и (SAB) прямую AB переводят в положение прямой уровня.

Условия замены:

$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$ ($\pi_3 \perp \pi_1$; $\pi_3 || AB$; $x_1 || A'B'$)

2. Прямую AB переводят в проецирующее положение.

Условия замены:

$x_1\frac{\pi_3}{\pi_1} \rightarrow x_2\frac{\pi_3}{\pi_4}$ ($\pi_4 \perp \pi_3$; $\pi_4 \perp AB$; $x_2 \perp A_1''B_1''$). $(ABC) \perp \pi_4$, $(SAB) \perp \pi_4$.

$\alpha^0 = (ABC) \wedge (SAB)$.

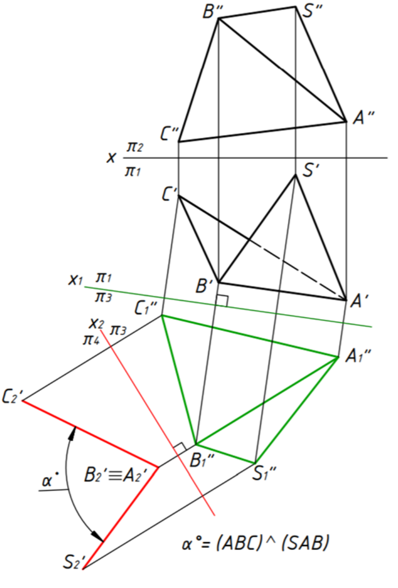


Рис. 24 Определение величины двугранного угла способом замены плоскостей проекций

Способ плоскопараллельного перемещения

Задача определения величины двугранного угла способом плоскопараллельного перемещения решается в два этапа.

Последовательность построений:

1. При первом перемещении геометрические фигуры перемещают так, чтобы отрезок AB занял положение, параллельное плоскости проекций (на рис. 25 $AB \| \pi_1$).
2. Вторым перемещением отрезок AB переводят в проецирующее положение (на рис. 25 – фронтальнопроецирущее). $\alpha^0 = (ABC) \wedge (SAB)$.

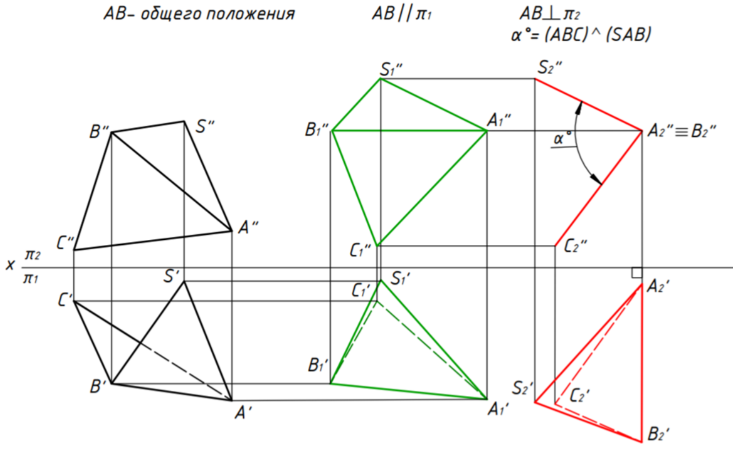


Рис. 25 Определение величины двугранного угла способом плоскопараллельного перемещения

Способ вращения вокруг проецирующей прямой

Задачу определения величины двугранного угла способом вращения вокруг проецирующей прямой решают также двумя преобразованиями.

Последовательность построений:

1. Вращением вокруг проецирующей прямой i ребро двугранного угла AB из общего положения переводят в положение, параллельное плоскости π_1 (см. рис. 26). i – ось вращения, фронтальнопроецирующая прямая. $A \in i$; $A_1''B_1'' \| x$. Все точки геометрических фигур, не лежащие на оси вращения, при данном вращении перемещаются на одинаковй угол φ.
2. Вторым вращением ребро двугранного угла AB переводят в проецирующее положение. i_1 – ось вращения, горизонтальнопроецирующая прямая. $B \in i_1$; $A_2'B_2' \perp x$. Все точки геометрических фигур, не лежащие на оси вращения, при повороте перемещаются на одинаковй угол φ_1.

$\alpha^0 = (ABC) \wedge (SAB)$.

Для уменьшения количества построений, оси вращения i и i_1 задают через точки, принадлежащие преобразуемой фигуре.

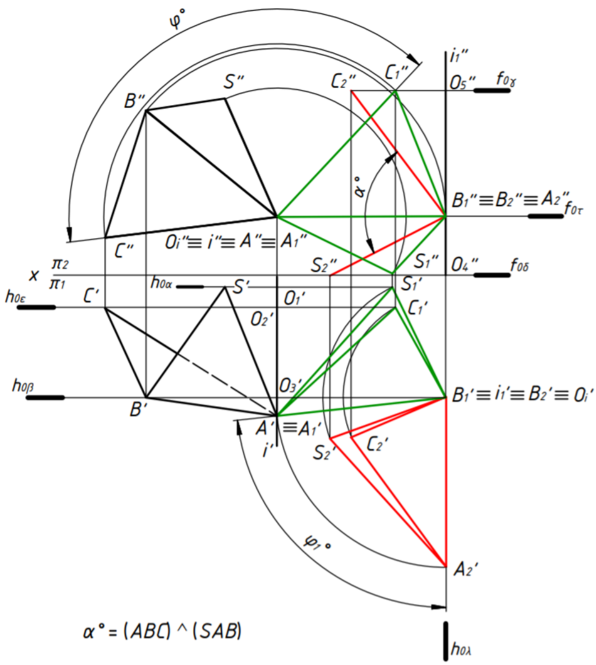


Рис. 26 Определение величины двугранного угла способом вращения вокруг проецирующей прямой

2.4. Определение угла наклона ребра к основанию пирамиды

Угол φ^0 наклона прямой a к плоскости α определяется величиной острого угла между прямой a и ее проекцией на данную плоскость α (рис. 27). Графическое решение задачи упрощается, если определить величину вспомогательного угла σ^0 между заданной прямой a и перпендикуляром n, опущенном из точки A (A – произвольная точка), принадлежащей прямой a, на плоскость α. Если плоскость угла σ^0 будет параллельна какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость проекций угол σ^0 спроецируется без искажения. А угол $\varphi^0 = 90^0 - \sigma^0$.

Таким образом, сначала определяют угол σ^0, затем, используя способы преобразования, переводят плоскость угла σ^0 в положение плоскости уровня.

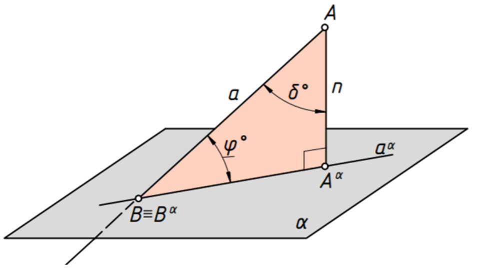


Рис. 27 Угол наклона прямой *a* к плоскости α

Задача определения угла между ребром *SA* и основаним *ABC* может быть решена следующими способами:

– вращением вокруг прямой уровня;

– заменой плоскостей проекций;

– плоскопараллельным перемещением;

– композицией способов (замена плоскостей проекций и вращение вокруг проецирующей прямой).

Вращение вокруг прямой уровня

Определение ула наклона ребра *SA* к плоскости основания пирамиды (*ABC*) способом вращения вокруг прямой уровня (фронтали f_1) показано на рис. 28.

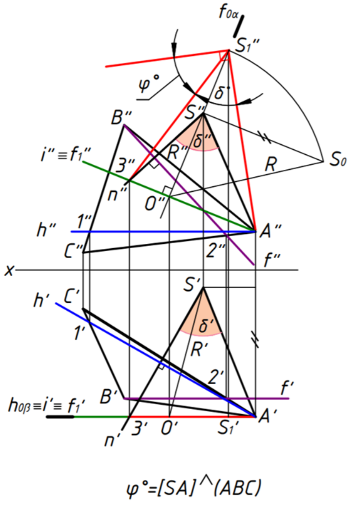


Рис. 28 Определение ула наклона ребра к плоскости основания пирамиды способом вращения вокруг прямой уровня

Последовательность построений:

1. Из вершны пирамиды S опускают перпендикуляр n к плоскости основания (ABC). Исходя из признака перпендикулярности прямой и плоскости, на чертеже горизонтальная проекция перпедикуляра к плоскости *(ABC)* – n' – должна быть перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости *(ABC)*, $n' \perp h'$; фронтальная проекция перпендикуляра к плоскости *(ABC)* – n'' – должна быть перпендикулярна фронтальной проекции фронтали плоскости *(ABC)*, $n'' \perp f''$.

Плоскость угла σ^0, образованная пересекающимися прямыми SA и n, – плоскость общего положения. f_1 – фронталь плоскости угла σ^0. Точки *3*, A принадлежат фронтали f_1.

2. Вращением вокруг фронтали f_1 плоскость угла σ^0 совмещают с плоскостью β, переводя ее в положение, параллельное плоскости проекций π_2. Плоскость угла σ^0 определяют три точки: S, *3*, A. Точки *3*, A принадлежат оси вращения $i \equiv f_1$, они неподвижны, поэтому, достаточно повернуть только точку S до плоскости совмещения β.

3. Угол σ^0 дополняют до угла 90^0. Угол $\varphi^0 = 90^0 - \sigma^0$ – искомый.

Способ замены плоскостей проекций

Определение ула наклона ребра SA к плоскости основания пирамиды *(ABC)* способом замены плоскостей проекций показано на рис. 29.

Последовательность построений:

1. Из вершны пирамиды S опускают перпендикуляр n к плоскости основания *(ABC)*. $n' \perp h'$; $n'' \perp f''$.

Плоскость угла σ^0, образованная пересекающимися прямыми SA и n, – плоскость общего положения. f_1 – фронталь плоскости угла σ^0. Точки *3*, A принадлежат фронтали f_1.

2. Плоскость угла σ^0 – плоскость общего положения – за две замены плоскостей проекций переводят в положение плоскости уровня.

Условия замены:

$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\frac{\pi_2}{\pi_3}$ ($\pi_3 \perp \pi_2$; $\pi_3 \perp (AS3)$; $\pi_3 \perp f_1$; $x_1 \perp f_1''$) $\rightarrow x_2\frac{\pi_4}{\pi_3}$ ($\pi_4 \perp \pi_3$; $\pi_4 \parallel (AS3)$; $x_2 \parallel (A_1'S_1'3_1')$).

3. Плоскость угла σ^0 параллельна плоскости проекций π_4 и проецируется на нее без искажения. Угол σ^0 дополняют до угла 90^0.

Угол $\varphi^0 = 90^0 - \sigma^0$ – искомый.

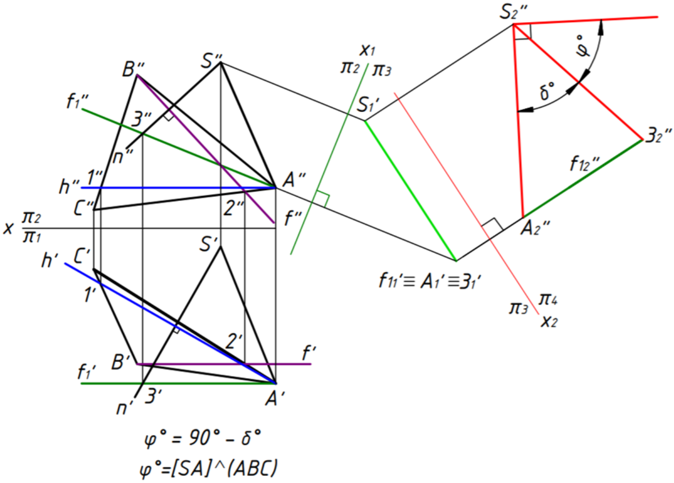


Рис. 29 Определение ула наклона ребра к плоскости основания пирамиды способом замены плоскостей проекций

Плоскопараллельное перемещение

На рис. 30 показано решение задачи определения ула наклона ребра *SA* к плоскости основания пирамиды (*ABC*) способом плоскопараллельного перемещения.

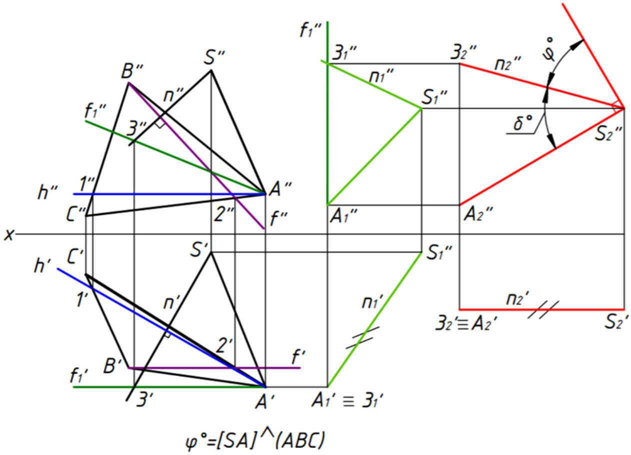


Рис. 30 Определение угла наклона ребра к плоскости основания пирамиды способом плоскопараллельного

Последовательность построений:

1. Из вершны пирамиды S опускают перпендикуляр n к плоскости основания (ABC). $n' \perp h'$; $n'' \perp f''$.

Плоскость угла σ^0, образованная пересекающимися прямыми SA и n, – плоскость общего положения. f_1 – фронталь плоскости угла σ^0. Точки 3, A принадлежат фронтали f_1.

2. Плоскость общего положение ($AS3$) в положение плоскости уровня переводят за два перемещения. Сначала – в проецирующее положение (($AS3$) $\perp \pi_1$, $f_1'' \perp x$), затем – в положение плоскости уровня (($AS3$)$||\pi_2$; ($A_2'S_2'3_2'$)$||x$).

3. Угол σ^0 дополняют до угла 90^0. Угол $\varphi^0 = 90^0 - \sigma^0$

Композиция преобразований

(замена плоскостей проекций и вращение вокруг проецирующей прямой)

Последовательность построений (рис. 31):

1. Из вершны пирамиды S опускают перпендикуляр n к плоскости основания (ABC). $n' \perp h'$; $n'' \perp f''$.

Плоскость угла σ^0, образованная пересекающимися прямыми SA и n, – плоскость общего положения. f_1 – фронталь плоскости угла σ^0.

2. Способом замены плоскостей проекций плоскость угла σ^0 переводят в проецирующее положение относительно плокости π_3.

Условия замены:

$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\frac{\pi_2}{\pi_3}$ ($\pi_3 \perp \pi_2$; $\pi_3 \perp (AS3)$; $\pi_3 \perp f_1$; $x_1 \perp f_1''$).

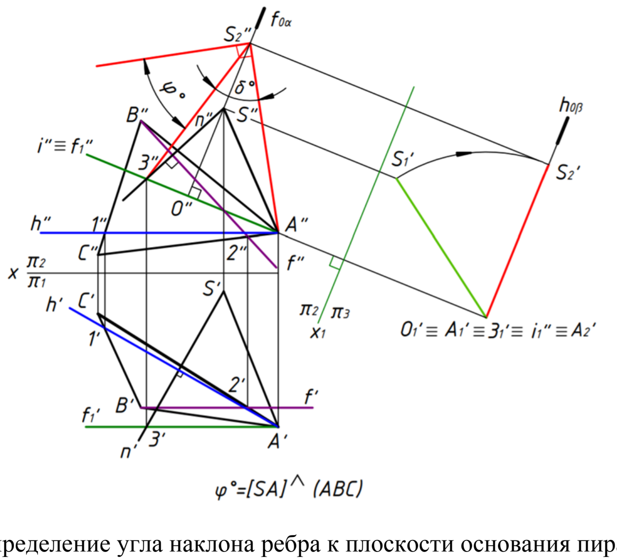


Рис. 31 Определение угла наклона ребра к плоскости основания пирамиды комбинацией способов замены плоскостей проекций и вращения вокруг проецирующей прямой

3. Вращением вокруг проецирующей прямой $f_1 \equiv i_1$ плоскость угла σ^0 переводят в положение плоскости уровня, параллельной фронтальной плоскости проекций: $(AS3) \parallel \pi_2$; $(A_2'S_2'3_2') \parallel x_1$. Точки 3, A принадлежат оси вращения i_1, они неподвижны, поэтому, достаточно повернуть только точку S до плоскости совмещения β. Точка S перемещается по окружности в плоскости α, перпендикулярной оси вращения i_1. Фронтальная проекция S_2'' точки S принадлежит плоскости α.

4. Угол σ^0 дополняют до угла 90^0. Угол $\sigma^0 = 90^0 - \sigma^0$.

2.5. Определение длин ребер и углов их наклона к основанию пирамиды способом вращения вокруг проецирующей прямой (высоты пирамиды)

Высота SH пирамиды $SABC$ – прямая общего положения. По условию задачи необходимо определить длины ребер и углы их наклона к основанию способом вращения вокруг проецирующей прямой. Следовательно, высоту пирамиды необходимо перевести в проецирующее положение. Решение задачи представлено на рис. 32.

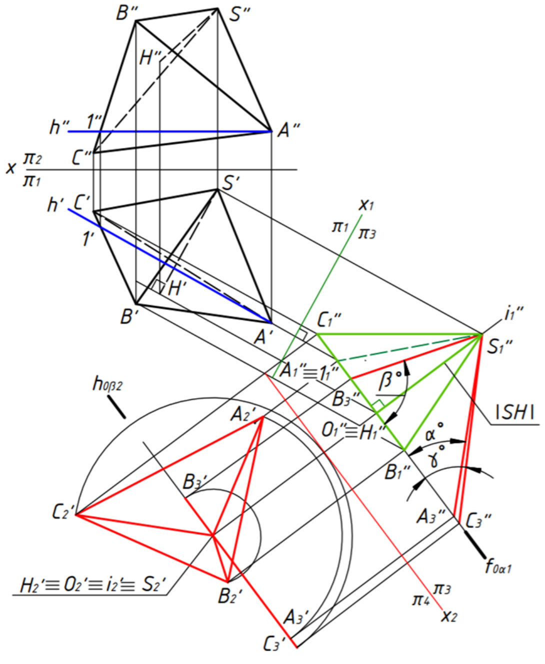


Рис. 32 Определение длин ребер и углов их наклона к основанию пирамиды способом вращения вокруг проецирующей прямой (высоты пирамиды)

Последовательность построений:

1. Способом замены плоскостей проекций плоскость основания (ABC) переводят в проецирующее положение. Высота SH параллельна плоскости π_3.

Условие замены:

$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$; $\pi_3 \perp \pi_1$; $\pi_3 \perp (ABC)$; $x_1 \perp h'$. $S_1''H_1'' \perp (A_1''B_1''C_1'')$; $SH \,||\, \pi_3$.

Второй заменой новую плоскость проекций π_4 располагают параллельно плоскости (ABC). Высота пирамиды SH относительно плоскости π_4 занимает проецирующее положение.

Условие замены:

$x_1\frac{\pi_3}{\pi_1} \rightarrow x_2\frac{\pi_3}{\pi_4}$; $\pi_4 \perp \pi_3$; $\pi_4 \,||\, (ABC)$; $x_2 \,||\, (A_1''B_1''C_1'')$. $SH \perp \pi_4$.

2. Вращением вокруг проецирующей прямой $SH \equiv i$ ребра пирамиды последовательно переводят в положение, параллельное плоскости π_3 и определяют длину соответствующего ребра и угол его наклона к основанию пирамиды:

$\alpha^0 = SA \wedge (ABC)$; $SA = S_1''A_3''$;
$\beta^0 = SB \wedge (ABC)$; $SB = S_1''B_3''$;
$\gamma^0 = SC \wedge (ABC)$; $SC = S_1''C_3''$.

2.6. Построение проекций плоской фигуры и определение углов ее наклона к плоскостям проекций

Задача: Построить ромб $ABCD$ с стороной BC на прямой MN (рис. 33) при условии, что его стороны равнны 80 мм. Определить углы наклона плоскости ромба к плоскостям проекций.

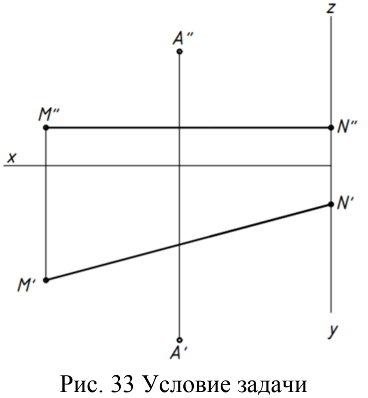


Рис. 33 Условие задачи

Задана точка A – вершина ромба и прямая MN, на которой лежит сторона BC. Прямая MN – горизонталь, т.к. $Z_M = Z_N$. Плоскость ромба – плоскость общего положения (это следует из значений координат Y и Z заданных точек A, M, N).

Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны. Высота ромба – перпендикуляр, опущенный из вершины ромба к противоположной стороне. Если плоская фигура параллельна какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость проекций она проецируется без искажения.

Следовательно, необходимо перевести плоскость ромба в положние плоскости уровня. Используя знания планиметрии, построить проекцию ромба на плоскости, которой он параллелен. Это позволит определить все метрические характеристики ромба и построить горизонтальную ($A'B'C'D'$) и фронтальную ($A''B''C''D''$) проекции ромба.

На рис. 34 задача решена способом плоскопараллельного перемещения.

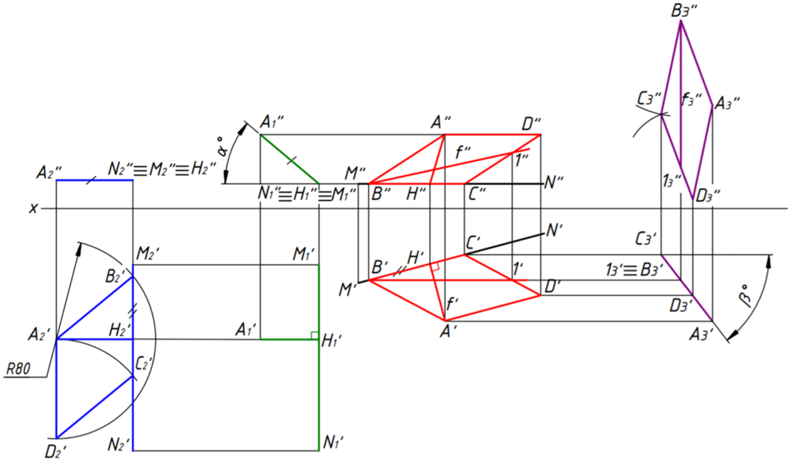


Рис. 34 Построение проекций плоской фигуры и определение улов ее наклона к плоскостям проекций способом плоскопараллельного перемещения

Последовательность построений:

1. Используя теорему о частном случае проецирования прямого угла, строят проекции высоты AH ($A'H'$, $A''H''$); $A'H' \perp M'N'$.

2. Первым перемещением переводят плоскость ромба в положение, перпендикулярное фронтальной плоскости проекций, $(ABCD) \perp \pi_2$.

$\alpha^0 = (ABCD) \wedge \pi_1$;

3. Вторым перемещением проецирующую плоскость ромба переводят в положение плоскости уровня, $(ABCD) \,||\, \pi_1$, $A_2''N_2''H_2''M_2'' \,||\, x$. Используя свойства ромба и заданные геометрические характеристики фигуры, строят проекцию ромба $(A_2'B_2'C_2'D_2') = (ABCD)$.

4. Т.к. прямая MN – горизонталь, то $H_2'B_2' = H'B' = HB$; $H_2'C_2' = H'C' = HC$. Используя свойства ортогонального проецирования, достраивают горизонтальную ($A'B'C'D'$) и фронтальную ($A''B''C''D''$) проекции ромба.

5. Для определения угла наклона плоскости ромба к фронтальной плоскости проекций, плоскость ромба перемещают в положение,

перпендикулярное горизонтальной плоскости проекций, при этом фронтальная проекция фронтали f'' плоскости перпендикурна оси x.

$B_3''1_3'' \perp x$; $\beta^0 = (ABCD) \wedge \pi_2$.

На рис. 35 задача построения проекций ромба и определения углов его наклона к плоскостям проекций решена способом замены плоскостей проекций.

Последовательность построений:

1. Используя теорему о частном случае проецирования прямого угла, строят проекции высоты AH ($A'H'$, $A''H''$); $A'H' \perp M'N'$.

2. Двумя заменами плоскостей проекций плоскость общего положения переводят в положение плоскости уровня.

Условие замены:

$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$ ($\pi_3 \perp \pi_1$; $\pi_3 \perp (AMN)$; $x_1 \perp h'$; $\varphi_2{}^0 = (ABCD) \wedge \pi_1) \rightarrow x_2\frac{\pi_3}{\pi_4}$; $\pi_4 \perp \pi_3$; $\pi_4 \,||\, (AMN)$; $x_2 \,||\, (A_1''M_1''N_1'')$. $(ABCD)=(A_2'B_2'C_2'D_2')$.

3. Т.к. прямая $MN \,||\, \pi_1$, то $H_2'B_2' = H'B'$; $H_2'C_2' = H'C'$. Используя свойства ромба, сохраняющиеся при ортогональном проецировании, достраивают горизонтальную ($A'B'C'D'$) и фронтальную ($A''B''C''D''$) проекции ромба.

4. Для определения угла наклона плоскости ромба к плоскости π_2, заменой плоскости проекций π_1 на π_5, плоскость ромба переводят в проецирующее положение.

Условия замены:

$x\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_3\frac{\pi_2}{\pi_5}$ ($\pi_5 \perp \pi_2$; $\pi_5 \perp (ABCD)$; $f'' \perp x_3$; $\varphi_1{}^0 = (ABCD) \wedge \pi_2$).

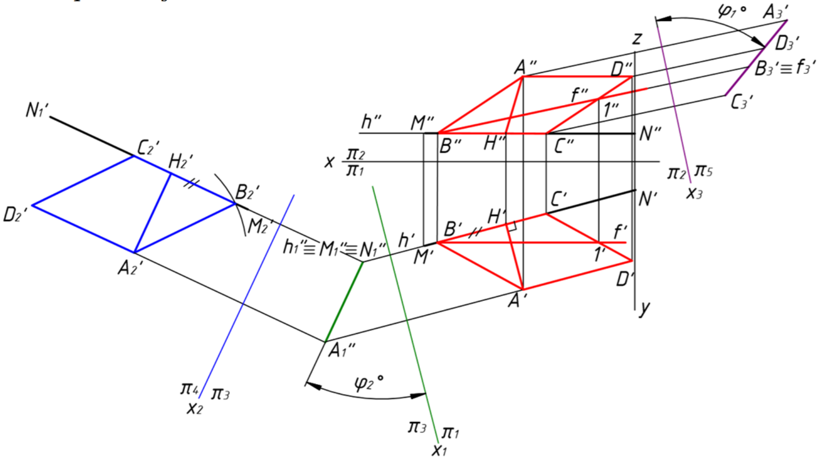


Рис. 35 Построение проекций плоской фигуры и определение углов ее наклона к плоскостям проекций способом замены плоскостей проекций

Вопросы для самопроверки

1. Для решения каких задач используют способы преобразования?
2. С какой целью применяют способы преобразования?
3. Сформулируйте теорему о частном случае проецирования прямого угла.
4. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5. В чем сущность способа замены плоскостей проекций?
6. За сколько замен плоскостей проекций прямую общего положения переводят в положение проецирующей прямой?
7. За сколько замен плоскостей проекций прямую общего положения переводят в положение прямой уровня?
8. За сколько замен плоскостей проекций плоскость общего положения переводят в положение плоскости уровня?
9. За сколько замен плоскостей проекций плоскость общего положения переводят в положение проецирующей плоскости?
10. Что называется вращением точки вокруг прямой?
11. Что такое плоскость вращения, плоскость совмещения, центр вращения, радиус вращения?
12. В чем сущность вращения вокруг линии уровня?
13. В каких случаях целесообразно применять вращение вокруг линии уровня?
14. Какой величиной определяется угол наклона прямой к плоскости?
15. Какой величиной определяется двугранный угол между плоскостями?
16. Какое перемещение геометрической фигуры называют плоскопараллельным?
17. Как плоскость общего положения преобразовать в проецирующую плоскость способом плоскопараллельного перемещения?
18. Как проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня способом плоскопараллельного перемещения?
19. Какова последовательность плоскопараллельного перемещения отрезка прямой общего положения в проецирующее?

Литература

1. Жирных, Б.Г. Начертательная геометрия: учебник / Б.Г. Жирных, В.И. Серегин, Ю.Э. Шарикян. М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 168 с.
2. Иванов Г.С. Начертательная геометрия: учебник. 3-е изд. М. : ФГБОУ ВПО МГУЛ, 2012. – 340 с.
3. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М. : ИНФРА-М, 2007.

Для заметок

Учебное издание

Горячкина Александра Юрьевна,
Корягина Ольга Михайловна

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Издательство «Спутник +»
109428, Москва, Рязанский проспект, д. 8А.
Тел.: (495) 730-47-74, 778-45-60 (с 9.00 до 18.00)
Подписано в печать 10.01.2020. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,25. Тираж 50 экз. Заказ 423.
Отпечатано в ООО «Издательство «Спутник +»