

Лекция:

Факторный анализ: этапы, требования и область применения

(Основной источник использованного материала:

Copyright 2017 © Академия НАФИ. Москва www.nafi.ru)

1. Факторный анализ: понятие и назначение
2. Основные этапы факторного анализа
 - 2.1. Вычисление корреляционной матрицы
 - 2.2. Извлечение факторов
 - 2.3. Выбор и вращение факторов
 - 2.4. Интерпретация факторов
 - 2.5. Вычисление значений факторов
 - 2.6. Оценка качества модели

1. Факторный анализ: понятие и назначение

Факторный анализ – это процедура, с помощью которой большое число переменных, относящихся к имеющимся наблюдениям, сводят к меньшему количеству независимых влияющих величин, называемых факторами:

- в один фактор объединяются переменные, сильно коррелирующие между собой.
- переменные из разных факторов слабо коррелируют между собой.

Факторный анализ классифицирует признаки (переменные), описывающие наблюдения.

Фактор (Factor) – латентная (скрытая) переменная, конструируемая таким образом, чтобы можно было объяснить корреляцию между набором имеющихся переменных.

Концепция факторного анализа заключается в «сжатии» информации.

Цель факторного анализа – сокращение числа переменных на основе их классификации и определения структуры взаимосвязей между ними.

Благодаря сокращению числа переменных вместо исходного набора переменных появляется возможность анализировать данные по выделенным факторам, число которых значительно меньше исходного числа взаимосвязанных переменных.

Социологический смысл факторного анализа – измеряемые эмпирические показатели считаются следствием других, глубинных, скрытых от непосредственного измерения характеристик (латентных переменных).

Примеры применения факторного анализа

1. В экономике:

- Расчет прибыли от продаж компании. Прибыль зависит от четырех основных факторов: объема продаж, ассортимента реализованной продукции, себестоимости продукции и цены реализации продукции. С

помощью факторного анализа можно рассчитать, как каждый из перечисленных факторов влияет на величину прибыли компании, и, исходя из полученных результатов, выработать пути максимизации прибыли.

- Аналогичным образом можно рассчитать и проанализировать затраты на производство продукции.

2. В социологии:

- Факторный анализ является одним из наиболее распространенных и используемых в социологических исследованиях. Самым известным примером является анализ Института Социологии Маргбургского университета об отношении работников металлургических предприятий к иностранцам.

Технические требования (или – ограничения) метода факторного анализа.

– Тип шкалы признаков – выше <не ниже> интервального.

- Все признаки должны быть количественными переменными (интервальными либо метрическими).

- Выборка должна быть однородна.

- Номинальные переменные должны быть переведены в дихотомические (переменные, имеющие только две категории)

– Форма связи между наблюдаемыми признаками – прямолинейная.

– Форма связи между признаками и факторами – прямолинейная.

– Требуется вращения для оптимизации интерпретации.

– Форма двумерного распределения любой пары наблюдаемых признаков – нормальная.

- Число наблюдений должно быть минимум в два раза больше числа переменных.

<И>

– Наблюдения независимы друг от друга.

- Исходные переменные должны быть распределены симметрично.

2. Основные этапы факторного анализа

Порядок выполнения факторного анализа

1. Вычисление корреляционной матрицы для всех переменных, участвующих в анализе.

2. Извлечение факторов.

3. Выбор факторов и вращение факторов для создания упрощенной структуры.

4. Интерпретация факторов.

2.1 Вычисление корреляционной матрицы

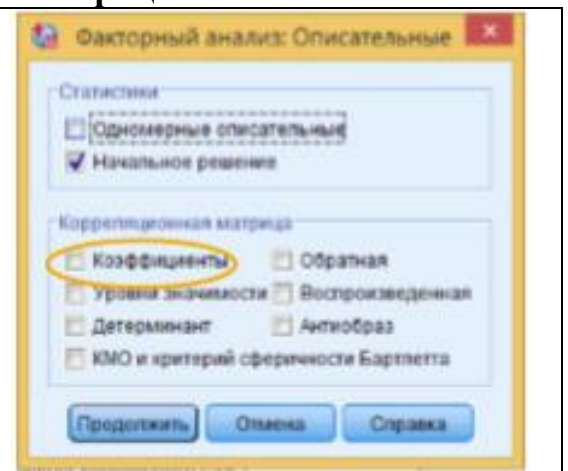
- Первая операция, которая производится при выполнении факторного анализа — **вычисление корреляционной матрицы для переменных, участвующих в анализе.**
- Для проведения факторного анализа совсем не обязательно специально строить корреляционную матрицу: при необходимости программа SPSS создаст ее сама на основе данных файла.
- Иногда не нужны даже исходные данные — достаточно иметь корреляционную матрицу, которая в этом случае вводится в командный файл SPSS.

Последовательность операций

- «Анализ» → «Снижение размерности» → «Факторный анализ».
- На панели нажать на «Описательные».

В разделе «Корреляционная матрица» отметить «Коэффициенты».

- Нажать продолжить



В окне просмотра появляется –

Корреляционная матрица

		Минимальное значение в матрице	Максимальное значение в матрице	Среднее значение в матрице	Среднее квадратичное значение в матрице	Среднее кубическое значение в матрице	Среднее четвертое значение в матрице	Среднее пятое значение в матрице	Среднее шестое значение в матрице	Среднее седьмое значение в матрице	Среднее восьмое значение в матрице	Среднее девятое значение в матрице	Среднее десятое значение в матрице	Среднее одиннадцатое значение в матрице	Среднее двенадцатое значение в матрице	Среднее тринадцатое значение в матрице	Среднее четырнадцатое значение в матрице	Среднее пятнадцатое значение в матрице
Политическая	История развития культуры	1,000	0,00	-0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Математическая	История развития культуры	0,00	1,000	0,00	-0,00	-0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Средневековая	История развития культуры	-0,00	0,00	1,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Современная	История развития культуры	0,00	-0,00	0,00	1,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Средневековая	История развития культуры	-1,00	0,00	0,00	0,00	1,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Современная	История развития культуры	0,00	-0,00	0,00	0,00	0,00	1,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Средневековая	История развития культуры	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Современная	История развития культуры	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

2.2 Извлечение факторов

Извлечение факторов

Извлечение фактора начинается с подсчета суммарного разброса значений всех участвующих в анализе переменных. Для этого «суммарного разброса» непросто подобрать логическую интерпретацию, однако он является вполне строго определенной математической величиной. Извлечение факторов может производиться несколькими методами.

1. Извлечение факторов заключается в выборе взаимодействующих переменных, чья взаимная корреляция обуславливает наибольшую долю общей дисперсии. Эти переменные образуют **первый фактор**.

2. Затем первый фактор исключается и из оставшегося множества переменных снова выбираются те, чье взаимодействие определяет наибольшую долю оставшейся общей дисперсии. Эти переменные образуют **второй фактор**.

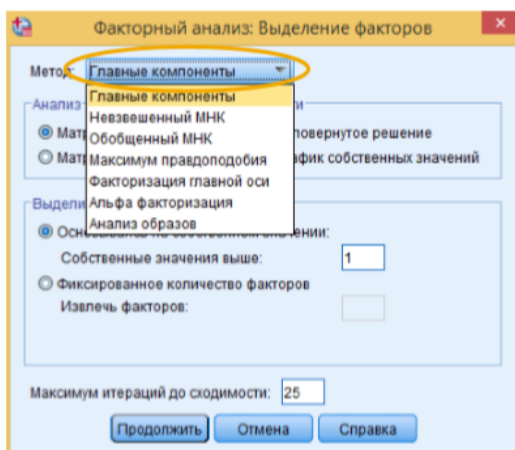
3. Процедура извлечения факторов продолжается до тех пор, пока не будет исчерпана вся общая дисперсия переменных.

4. После того как процедура извлекает каждый фактор, напротив его номера появляется **собственное значение**, которое пропорционально доле общей дисперсии, определяемой данным фактором.

Извлечение факторов: выбор метода

Методы факторного анализа различаются в зависимости от подходов для нахождения коэффициентов значения факторов.

Последовательность операций:

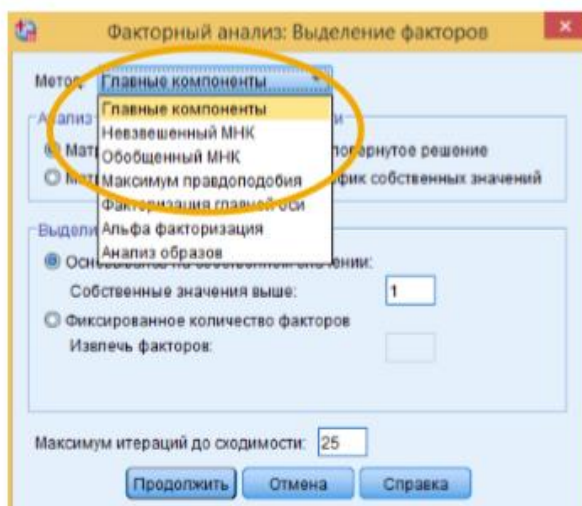


- «Анализ» → «Снижение размерности» → «Факторный анализ».
- На панели нажать на «Извлечение». В разделе «Метод» выбрать нужный метод.
- Нажать продолжить.

Наиболее популярным методом является **метод главных компонент**

Анализ главных компонент (АГК) – наиболее простой метод, однако именно оставшиеся 6 методов относятся к факторному анализу. Однако следует помнить, что АГК дает более грубое приближение к реальной структуре взаимосвязей, чем другие методы факторного анализа.

Последовательность операций:



Методы:

- Главные компоненты
- Невзвешенный МНК
- Обобщенный МНК
- Максимум правдоподобия
- Факторизация главной оси
- Альфа факторизация
- Анализ образов

Извлечение факторов

Значение общности равен доле дисперсии обусловленной влиянием факторов.

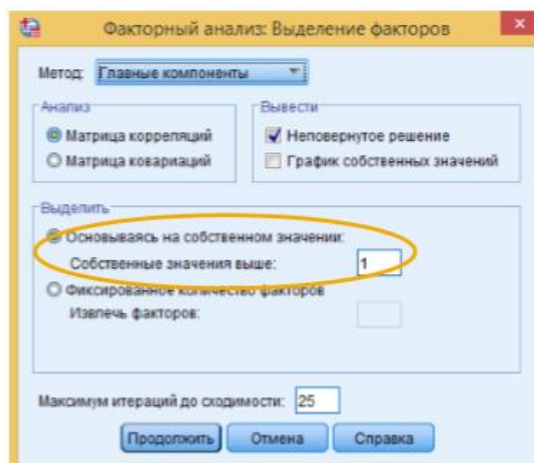
Если равно 0 – фактор не влияет на переменную.

Если равно 1 – дисперсия переменной целиком определяется выделяемым фактором.

Первое собственное значение всегда является наибольшим и превышает единицу. Факторы извлекаются в порядке убывания их влияния на дисперсию переменных.

Общности

	Начальная	Извлечение
Я слушаю музыку каждый день	1,000	,587
Мои музыкальные предпочтения однообразны. Я слушаю музыку одного стиля	1,000	,546
Современная музыка лучше, чем классическая	1,000	,585
Зарубежная музыка мне нравится больше, чем отечественная	1,000	,597
Прослушивание музыки требует концентрации, ее нельзя слушать на ходу	1,000	,539



Метод главных компонент

Метод главных компонент (Principal Components Analysis) основан на определении минимального числа факторов, вносящих наибольший вклад в дисперсию данных. Они называются главными компонентами.

- Метод основан на допущении, что характеристики всех признаков равны нулю, а число общих факторов F равно числу исходных признаков X .

- Главные компоненты независимы, т.е. в геометрическом плане ортогональны. Выделение первой главной компоненты по максимальному вкладу в дисперсию признаков означает, что мы находим такое направление в пространстве признаков, которому соответствует максимальная дисперсия, т.е. наибольшая дифференциация, разброс объектов. Затем находится вторая главная компонента, ортогональная первой и дающая вновь наибольшую дифференциацию объектов, не объясненную первой компонентой и т.д.

- После построения всех главных компонент (число которых равно числу признаков X) остаточная дисперсия равна 0, т.е. задача имеет точное математическое решение. Обычно суммарная дисперсия признаков раскладывается таким образом, что первые несколько компонент уже объясняют большую долю этой дисперсии, а остальные почти ничего не добавляют, поэтому совсем не обязательно выделение всех компонент.

2.3 Выбор и вращение факторов

Выбор факторов

1. Если факторов окажется столько же, сколько исходных переменных, факторный анализ теряет смысл, поскольку его целью является сокращение исходного набора переменных.

2. Необходимо принять решение, какие из факторов следует оставить для дальнейшего анализа. Для этого исследователи пользуются следующими критериями:

- формальные критерии - все факторы, чьи собственные значения превышают единицу, сохраняются для дальнейшего анализа
- критерий «каменистой осыпи» Р. Кеттелла - состоит в поиске точки, где убывание собственных значений замедляется наиболее сильно.

3. В любом случае, окончательное решение о числе факторов обычно принимается после интерпретации факторов, следовательно, факторный анализ предполагает неоднократное выделение различного числа факторов.

Семь собственных факторов имеют значения, превосходящие 1. Следовательно для анализа отобрано только семь факторов. Первая главная компонента объясняет 9,2% общей дисперсии, вторая 17,9% и т.д. Всего в модели отобрано семь факторов, которые объясняют 55,2% общей дисперсии.

Объясненная совокупная дисперсия

Компонент	Начальные собственные значения			Суммы квадратов нагрузок извлечения		
	Всего	% дисперсии	Суммарный %	Всего	% дисперсии	Суммарный %
1	1,392	9,278	9,278	1,392	9,278	9,278
2	1,293	8,623	17,901	1,293	8,623	17,901
3	1,234	8,224	26,125	1,234	8,224	26,125
4	1,155	7,701	33,826	1,155	7,701	33,826
5	1,091	7,274	41,100	1,091	7,274	41,100
6	1,065	7,098	48,198	1,065	7,098	48,198
7	1,052	7,011	55,209	1,052	7,011	55,209
8	,953	6,353	61,561			
9	,940	6,269	67,831			
10	,900	6,002	73,833			
11	,855	5,699	79,532			
12	,817	5,450	84,982			
13	,784	5,224	90,206			
14	,762	5,079	95,284			
15	,707	4,716	100,000			

Метод выделения факторов: метод главных компонент.

Метод «каменистой осыпи»

- Чтобы получить график «каменистой осыпи», необходимо в «Извлечение» выбрать «График собственных значений».
- С помощью данного графика также можно определять количество факторов. Там, где начинается резкий спад – на том количестве факторов стоит остановиться.

Факторный анализ: Выделение факторов

Метод: **Главные компоненты**

Анализ

Матрица корреляций
 Матрица ковариаций

Вывести

Невернутое решение
 График собственных значений

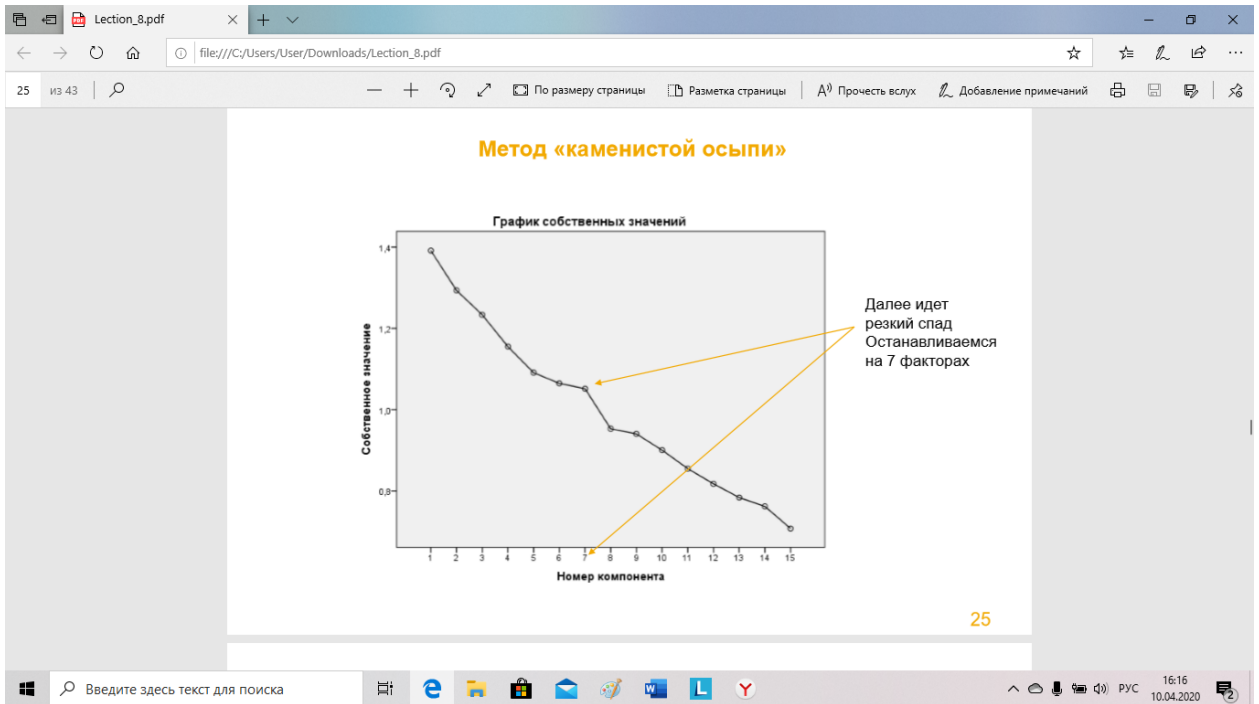
Выделить

Основываясь на собственном значении:
Собственные значения выше:

Фиксированное количество факторов
Извлечь факторов:

Максимум итераций до сходимости:

Метод «каменистой осыпи»

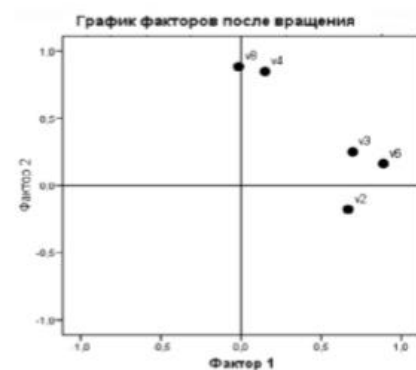
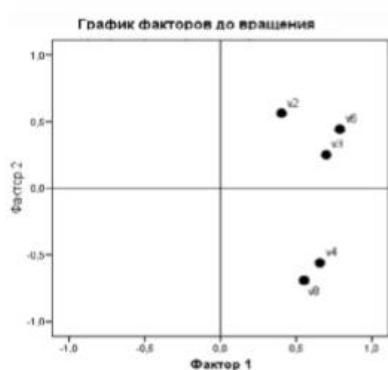


Вращение факторов

Целью вращения является получение простой структуры, которой соответствует большое значение нагрузки каждой переменной только по одному фактору и малое по всем остальным факторам.

Нагрузка отражает связь между переменной и фактором, являясь подобием коэффициента корреляции. Значение нагрузки лежит в пределах $(-1; 1)$.

- До вращения точки, соответствующие переменным, расположены на удалении от осей факторов.
- После поворота осей переменные оказываются вблизи осей, что соответствует максимальной нагрузке каждой переменной только по одному фактору.



Вращение факторов

- Вариант вращения «Варимакс» является ортогональным, поскольку при таком вращении оси сохраняют свое взаимное расположение под прямым углом.

- Иногда можно получить более предпочтительную простую структуру, если изменить угол между осями. Для этого предназначены варианты косоугольного вращения «Прямой облимин» и «Промакс». Наличие непрямого угла между осями факторов означает, что они не являются полностью независимыми друг от друга.

Факторный анализ: Вращение

Метод

Нет Квартимакс

Варимакс Эквимакс

Прямой облимин Промакс

Дельта: 0 Каппа: 4

Вывести

Повернутое решение График(и) нагрузок

Максимум итераций до сходимости: 25

Продолжить Отмена Справка

Вращение факторов

- Необходимо попытаться объяснить отобранные факторы. Для этого в каждой строке повернутой факторной матрицы необходимо отметить ту факторную нагрузку, которая имеет наибольшее абсолютное значение.

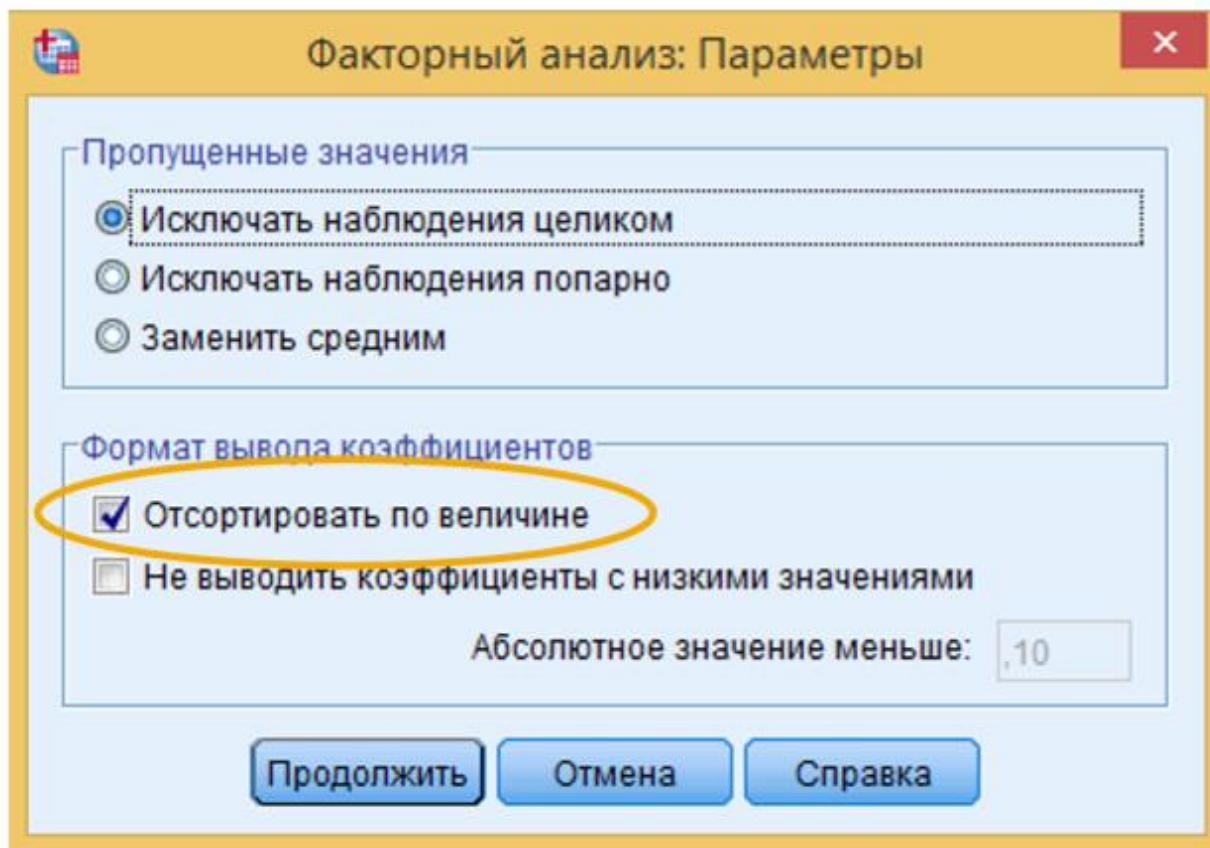
- Эти факторные нагрузки следует понимать как корреляционные коэффициенты между переменными и факторами. Так переменная а1 сильнее всего коррелирует с фактором 6, а именно, величина корреляции составляет 0,720, переменная а2 с фактором 1 (0,663), переменная а3 коррелирует сильнее всего с фактором 5 (0,569) и т.д.

Повернутая матрица компонентов^a

	Компонент						
	1	2	3	4	5	6	7
Я слушаю музыку каждый день	-,018	,050	,139	,117	-,044	-,720	,17
Мои музыкальные предпочтения однообразны. Я слушаю музыку одного стиля	,663	,285	,059	,101	,073	-,077	-,01
Современная музыка лучше, чем классическая	,197	-,008	,397	-,005	-,569	,103	-,23
Зарубежная музыка мне нравится больше, чем отечественная	-,143	-,065	,746	-,017	-,085	-,057	-,06
Прослушивание музыки требует концентрации, ее нельзя слушать на ходу	-,074	-,044	,196	,092	,049	,663	,20
Мои друзья слушают примерно такую же музыку, как и я	-,095	-,053	-,060	,776	,119	-,105	,07
Фоновая музыка помогает мне лучше работать, учиться, делать	,151	,754	-,102	-,205	,025	-,072	-,09

Вращение факторов

- На панели нажать «Параметры». В разделе «Формат вывода коэффициентов» выбрать «Отсортировать по величине». Нажать «Продолжить».
- Это позволит отсортировать переменные в соответствии с величиной их нагрузок по соответствующим факторам.
- Например, если 3 переменные нагружают фактор 1, то эти переменные будут перечислены в порядке убывания их нагрузок в столбце с названием «Фактор 1».



- Обычно предполагается, что X – стандартизованы, а факторы F ... - независимы (ортогональны).

- Коэффициент взаимосвязи между некоторым признаком (X) и общим фактором (F), выражающий меру влияния фактора на признак – факторная нагрузка данного признака по данному общему фактору.

- Матрица, состоящая из факторных нагрузок и имеющая число столбцов, равная числу общих факторов, и число строк равное числу исходных признаков, называется факторной матрицей. Факторная матрица фиксирует степень линейной связи каждого признака с каждым общим фактором.

- Величина факторной нагрузки не превышает по модулю 1, а знак говорит о положительной/отрицательной связи признака с фактором. Значение факторной нагрузки, близкое к нулю – фактор практически не влияет на данный признак.

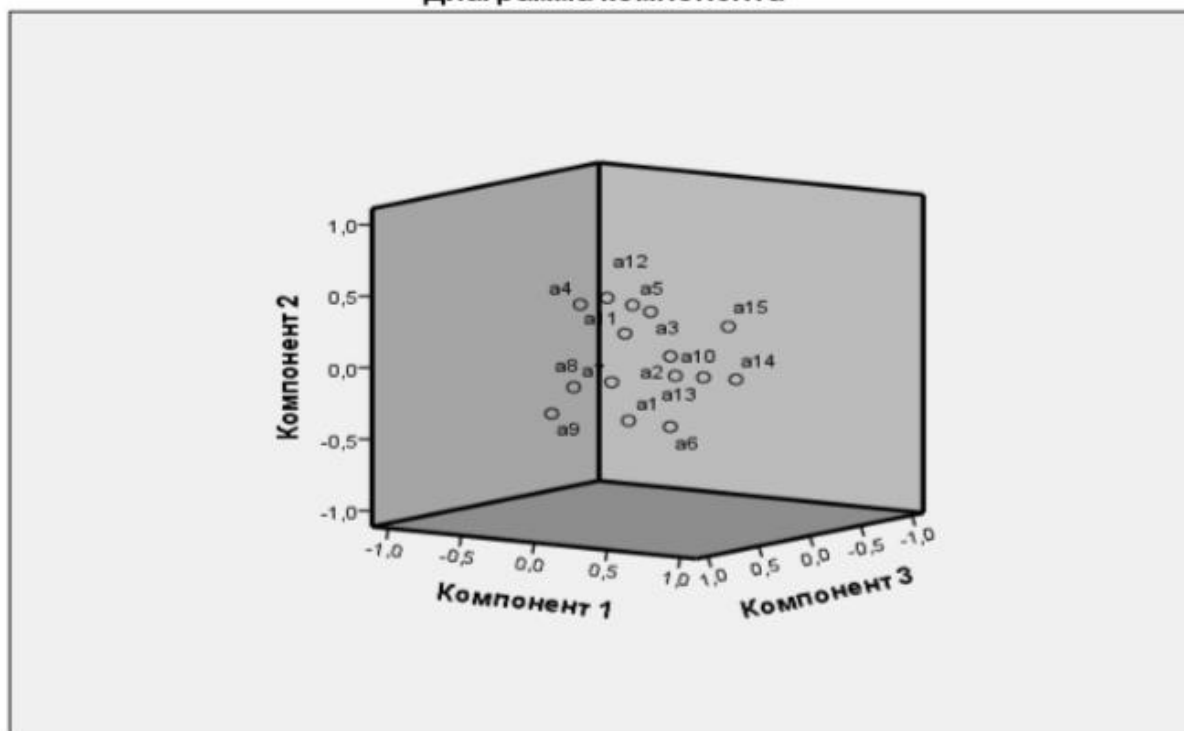
- Можно вычислить вклады факторов в общую дисперсию всех признаков (путем вычисления суммы квадратов факторных нагрузок для каждого фактора по всем признакам). Чем выше доля этого вклада в общей дисперсии, тем более значимым является данный фактор

2.4 Интерпретация факторов

Интерпретация факторов

Возможно графическое изображение переменных, координатами которых служат величины факторных нагрузок. Так, в конце оси расположены переменные, которые имеют большие нагрузки только в связи с этим фактором и, следовательно, характеризуют его. Переменные в начале координат имеют небольшие нагрузки в связи с обоими факторами. Переменные, расположенные вдали от осей, связаны с обоими факторами. Если фактор нельзя четко определить с точки зрения связи с исходными переменными, то его следует пометить как неопределяемый или генеральный (общий для всех переменных)

Диаграмма компонента



2.5 Вычисление значений факторов

После интерпретации факторов необходимо вычислить их значения. Факторный анализ имеет собственную ценность. Однако если цель факторного анализа заключается в снижении исходного числа переменных до небольшого набора составных переменных (факторов), которые в дальнейшем используются в многомерном анализе, то имеет смысл вычислить для каждого респондента значение фактора. Фактор представляет собой линейную комбинацию исходных переменных. Значение для f -го фактора можно вычислить по формуле:

$$F_i = b_{i1}X_1 + b_{i2}X_2 + \dots + b_{ik}X_k$$

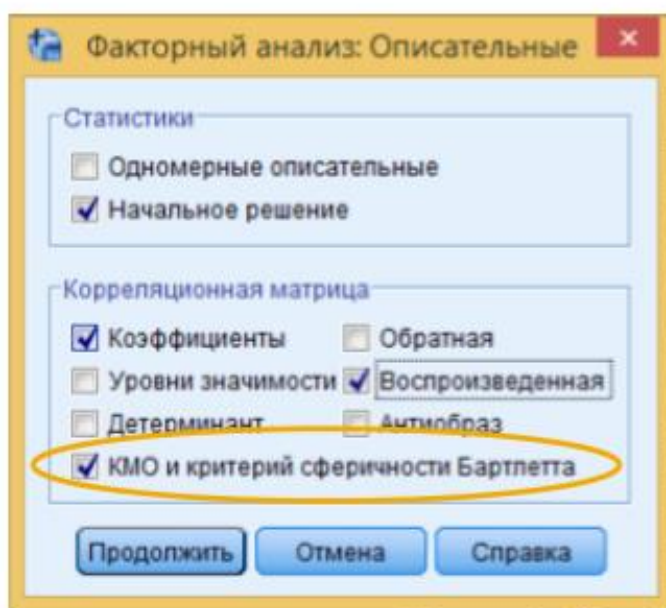
Отбор переменных-заменителей

- **Переменные-заменители (Surrogate Variables)** выбираются из исходных переменных для последующего анализа.
- Это позволяет проводить анализ с точки зрения исходных переменных, а не значения факторов. Наиболее приемлемо, если одна из факторных нагрузок значительно выше остальных.

2.6 Оценка качества модели

Критерий КМО

- Критерий адекватности выборки Кайзера-Мейера-Олкина – величина, характеризующая степень применимости факторного анализа к данной выборке.
- Правило интерпретации этого критерия:
 - $\geq 0,9$ - безусловная адекватность
 - $[0,8; 0,9)$ - высокая адекватность
 - $[0,7; 0,8)$ - приемлемая адекватность
 - $[0,6; 0,7)$ - удовлетворительная адекватность
 - $[0,5; 0,6)$ - низкая адекватность
 - $< 0,5$ - факторный анализ неприменим к выборке

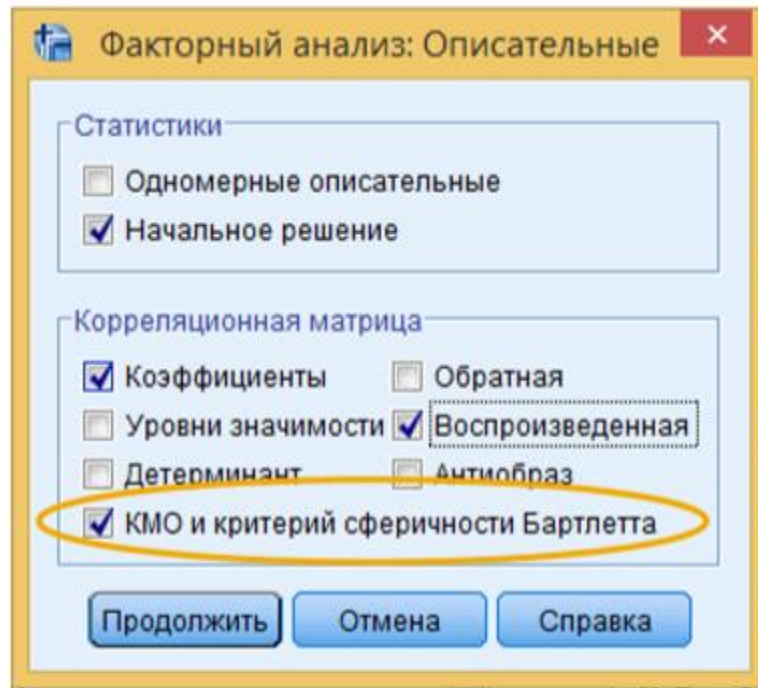


КМО и критерий Бартлетта

Мера адекватности выборки Кайзера-Майера-Олкина (КМО).		.512
Критерий сферичности Бартлетта	Примерная Хи-квадрат	85,903
	ст.св.	105
	Знач.	,913

Критерий сферичности Бартлетта

- Критерий сферичности Бартлетта – критерий многомерной нормальности для распределения переменных.
- Помимо нормальности критерий проверяет, отличаются ли корреляции от 0.
- Уровень значимости $p < 0,05$ указывает на то, что данные вполне приемлемы для проведения факторного анализа.

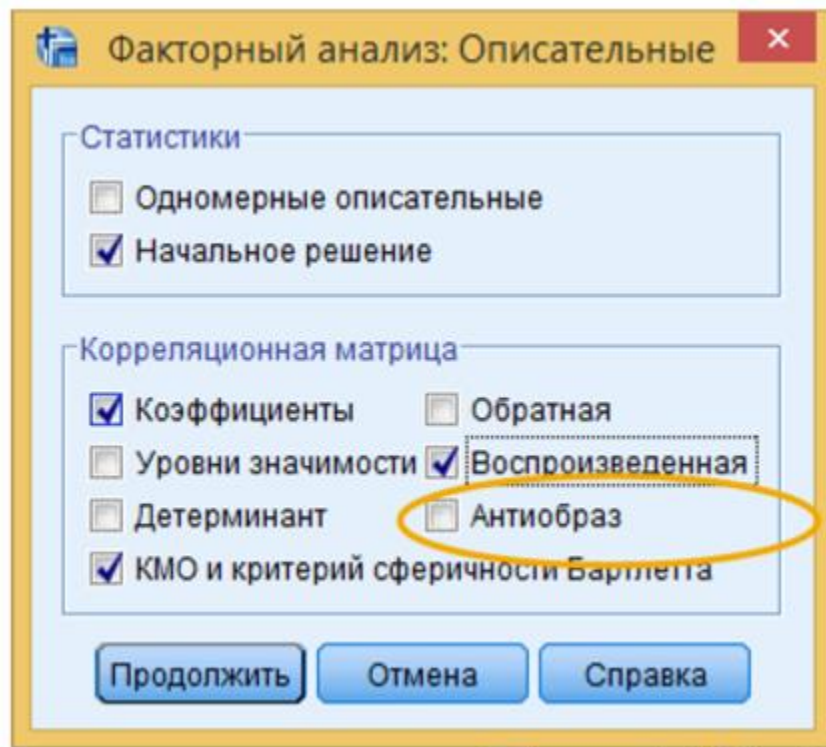


КМО и критерий Бартлетта

Мера адекватности выборки Кайзера-Майера-Олкина (КМО).		,512
Критерий сферичности Бартлетта	Примерная Хи-квадрат	85,903
	ст.св.	105
	Знач.	,913

Воспроизведенные корреляции

- Воспроизведенные корреляции – это корреляционная матрица оригинальных пунктов, которая бы получилась, если предположить, что рассчитанные факторы являются правильными и единственными факторами.
- Для любой взятой пары переменных репродуцированная корреляция равна произведению их факторных нагрузок на первый фактор плюс произведение таких нагрузок на второй фактор и т.д. по всем факторам.



Воспроизведенные корреляции

	Я слушаю музыку каждый день	Мои музыкальные предпочтения и образ жизни соответствуют образу жизни одного студента	Современная музыка лучше, чем классическая	Зарубежная музыка мне нравится больше, чем отечественная	Прослушивание музыки требует концентрации и не мешает слушать музыку	Меня раздражает слушать музыку, как и раньше	Фоновая музыка помогает мне лучше работать, учиться, делать покупки и т.д.	Я люблю мероприятия, которые можно посетить без фоновой музыки	В последнее время я слушаю музыку чаще, чем раньше	Мне больше нравится слушать музыку, чем студийная	Обычно я слушаю музыку с платных ресурсов	Мне интересна жизнь исполнителей и их биографии, новости	В очереди и в транспорте я стараюсь слушать музыку, которая соответствует моему настроению	Я люблю ходить в клубы на концерты	Я люблю танцевать
Воспроизведенная корреляция	.582*	.272	-.039	.134	-.405	.164	.030	-.054	.130	.202	-.144	-.007	-.137	.033	-.055
Мои музыкальные предпочтения и образ жизни соответствуют образу жизни одного студента	.272	.546*	.106	-.072	-.002	.012	.298	-.160	.058	.108	.097	.244	.247	.156	.307
Современная музыка лучше, чем классическая	-.039	.106	.595*	.326	.056	-.141	-.015	-.103	-.031	-.147	-.310	.031	.234	-.060	.122
Зарубежная музыка мне нравится больше, чем отечественная	.134	-.072	.326	.597*	.103	-.050	-.134	-.125	.076	-.033	-.002	.282	-.124	-.260	-.120
Прослушивание музыки требует концентрации и не мешает слушать музыку	-.405	-.002	.056	.103	.538*	.030	-.150	.203	.037	.085	.106	.193	.088	-.128	-.029

- Остатки воспроизведенных корреляций или «матрица остатков корреляций» является матрицей разностей между воспроизведенными и реальными корреляциями. Чем ближе такие остатки к нулю (т.е., низкие или незначимые), тем выше уверенность исследователя в своем выборе числа факторов.

- В SPSS, в примечаниях к таблице остатков корреляций приводится процент остатков корреляций, чей уровень значимости превышает 0,05. В хорошем факторном анализе такой процент оказывается низким.

Воспроизведенные корреляции

		Мне музыкальным и произведениям и однообразны. Я слушаю музыку одного стиля	Современная музыка лучше, чем классическая	Зарубежная музыка мне нравится больше, чем отечественная	Послушивание музыки требует концентрации и ее нельзя слушать на ходу	Мне больше нравится слушать музыку на концертах	Я люблю музыку, которая помогает мне думать, работать, учиться, делать повседневные дела	Я люблю музыку, которая может вытупить из фона	В последние время я слушаю музыку, чем раньше	Мне больше нравится живая музыка, чем студийная	Обычно я слушаю музыку с помощью рингтонов	Мне интереснее читать статьи о музыке, чем читать новости	В целом я предпочитаю слушать музыку, которую слышу в клубе на концерте	Я люблю читать и писать на концерты	Понравилось также	
Воспроизведенная корреляция	Я слушаю музыку каждый день	.587*	.072	-.039	.134	-.405	.184	.210	-.054	.130	.262	-.144	-.087	-.137	.033	-.055
	Мне музыкальным произведениям однообразны. Я слушаю музыку одного стиля	.072	.546*	.190	-.072	-.080	.012	.268	-.190	.058	.186	.267	.244	.247	.156	.387
	Современная музыка лучше, чем классическая	-.039	.190	.536*	.328	.058	-.141	-.015	-.103	-.031	-.147	-.316	.031	.234	-.060	.122
	Зарубежная музыка мне нравится больше, чем отечественная	.134	-.072	.328	.587*	.103	-.050	-.134	-.125	.076	-.033	-.002	.282	-.124	-.200	-.120
	Послушивание музыки требует концентрации, ее нельзя слушать	-.405	-.080	.058	.103	.536*	.020	-.158	.203	.037	.085	.105	.193	.088	-.128	-.029

• Матрица остатков воспроизведенных корреляций помогает исследователю выявить конкретные корреляции, которые плохо воспроизводятся факторной моделью с данным числом факторов. Путем экспериментирования с разными моделями с разным числом факторов, исследователь может оценить, какая модель лучше воспроизводит корреляции, являющиеся наиболее критическими для его исследовательских целей

Литература

1. Бююль А., Цеффель П. SPSS: искусство обработки информации. – М., 2005
 - Глава 12. Анализ множественных ответов
 - Глава 19. Факторный анализ.
2. Наследов А. IBM SPSS Statistics 20 и AMOS: профессиональный статистический анализ данных. – СПб., 2013
 - Глава 20. Факторный анализ
 - Глава 17. Простая линейная регрессия
3. Электронный учебник по статистике StatSoft. Главные компоненты и факторный анализ. URL: <http://www.statsoft.ru/home/textbook/modules/stfacan.html>

Основной источник использованного материала:
 Copyright 2017 © Академия НАФИ. Москва
www.nafi.ru