

Е.Б. Павельева

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

*Методические указания к решению задач
по курсу «Интегралы и дифференциальные уравнения»*



Москва

ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

2014

УДК 517.31
ББК 22.161.1
П12

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*
по адресу: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/109/book318.html>

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

Рецензент

канд. физ.-мат. наук, доцент И. Л. Покровский

*Рекомендовано Учебно-методической комиссией
Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки»
МГТУ им. Н.Э. Баумана*

П12 **Павельева, Е. Б.**

Неопределенные интегралы : методические указания к решению задач по курсу «Интегралы и дифференциальные уравнения» / Е. Б. Павельева. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. — 91, [1] с.

ISBN 978-5-7038-3929-4

Рассмотрены основные приемы и методы вычисления неопределенных интегралов. Приведены краткие теоретические сведения, и подробно разобрано около ста примеров различной степени сложности. В конце каждого подраздела даны примеры для самостоятельного решения, а в конце работы — ответы к этим примерам.

Для студентов всех специальностей МГТУ им. Н. Э. Баумана. Может быть полезным при самостоятельном изучении методов вычисления неопределенных интегралов.

УДК 517.31
ББК 22.161.1

ISBN 978-5-7038-3929-4

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014

Глава 1. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПУТЕМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Понятие неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Простейшие правила и приемы интегрирования

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b) , если для любого $x \in (a, b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Например, функция $F(x) = \sqrt{4-x^2}$ является первообразной для функции $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ на интервале $(-2, 2)$, так как $(\sqrt{4-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \forall x \in (-2, 2)$; функция $F(x) = \cos x$ является первообразной для функции $f(x) = -\sin x$ на бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$, так как $(\cos x)' = -\sin x \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$. Функция $F(x) = \ln x$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на полупрямой $(0, +\infty)$, так как $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0, +\infty)$; функция $F(x) = \ln(-x)$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на полупрямой $(-\infty, 0)$, так как $(\ln(-x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (-\infty, 0)$; таким образом, функция $F(x) = \ln|x|$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Теорема 1.1. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на (a, b) , то любая первообразная для функции $f(x)$ на интервале (a, b) имеет вид $F(x) + C$, где C — некоторая постоянная.

Определение 1.2. Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на интервале (a, b) и обозначается символом $\int f(x) dx$.

Если функция $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на (a, b) , то $\int f(x) dx = F(x) + C$, где C — любая постоянная.

Например, $\int -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \sqrt{4-x^2} + C$ на интервале $(-2, 2)$, так как функция $F(x) = \sqrt{4-x^2}$ является первообразной для функции $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ на интервале $(-2, 2)$; $\int (-\sin x) dx = \cos x + C$ на бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$; $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Теорема 1.2. Для любой функции, непрерывной на интервале (a, b) , на этом интервале существует неопределенный интеграл.

Свойства неопределенного интеграла:

1) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$;

2) $\int (A f(x)) dx = A \int f(x) dx$, $A \neq 0$, A — постоянная;

3) $(\int f(x) dx)' = f(x)$; $d \int f(x) dx = f(x) dx$;

4) $\int F'(x) dx = F(x) + C$; $\int dF(x) = F(x) + C$, C — любая постоянная.

Основные неопределенные интегралы приведены в табл. 1.1.

№ п/п	Основные неопределенные интегралы
1	$\int 0 dx = C$
2	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \forall \alpha \neq -1.$ <p>В частности:</p> <p>при $\alpha = 0$ $\int 1 dx = x + C,$</p> <p>при $\alpha = -1/2$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C,$</p> <p>при $\alpha = -2$ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$</p>
3	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C,$ $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln x+a + C \quad \forall a$
4	$\int e^x dx = e^x + C,$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \forall a > 0, a \neq 1$
5	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
6	$\int \cos x dx = \sin x + C$
7	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
8	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9	$\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right + C = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
10	$\int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right + C = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
11	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
12	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
13	$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$

№ п/п	Основные неопределенные интегралы
14	$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C, \end{cases} \quad \forall a > 0$
16	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C, \quad \forall a \neq 0$
17	$\int \frac{dx}{x^2+1} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C, \end{cases}$ $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, \end{cases} \quad \forall a \neq 0$
18	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, \quad \forall a \neq 0$ $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C, \quad \forall a \neq 0$

Для проверки формул, приведенных в табл. 1.1, достаточно убедиться в том, что производные выражений, стоящих в правых частях этих формул, совпадают с соответствующими подынтегральными функциями.

Примеры

Используя свойства неопределенного интеграла и формулы табл. 1.1, найти следующие интегралы.

Пример 1.1. $\int \left(\frac{5}{x^3} - 4\sqrt[3]{x} + \frac{6}{\sqrt[7]{x^2}} + 1 \right) dx.$

Разобьем интеграл на сумму и разность интегралов, вынесем за знак интеграла постоянные множители и запишем подынтегральные функции в таком виде, чтобы легко было воспользоваться формулой 2 из табл. 1.1:

$$\int \left(\frac{5}{x^3} - 4\sqrt[3]{x} + \frac{6}{\sqrt{x^2}} + 1 \right) dx = 5 \int x^{-3} dx - 4 \int x^{\frac{1}{3}} dx + 6 \int x^{-\frac{2}{7}} dx + \int 1 dx =$$

$$= 5 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - 4 \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 6 \frac{x^{-\frac{2}{7}+1}}{-\frac{2}{7}+1} + x + C = -\frac{5}{2x^2} - 3\sqrt[3]{x^4} + \frac{42}{5}\sqrt[7]{x^5} + x + C.$$

Пример 1.2. $\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - x + 2) dx.$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - x + 2) dx = \int (-x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2) dx =$$

$$= -\int x^{\frac{3}{2}} dx + 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int 1 dx =$$

$$= -\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 3 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2x + C = -\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + 2x + C.$$

Пример 1.3. $\int \frac{\sqrt[5]{x^7} - 2}{\sqrt{x}} dx.$

Разделим почленно числитель на знаменатель:

$$\int \frac{\sqrt[5]{x^7} - 2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^{\frac{7}{5}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx - 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int x^{\frac{9}{10}} dx - 2 \cdot 2\sqrt{x} + C = \frac{x^{\frac{9}{10}+1}}{\frac{9}{10}+1} - 4\sqrt{x} + C = \frac{10}{19} \sqrt[10]{x^{19}} - 4\sqrt{x} + C.$$

Пример 1.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

Чтобы можно было воспользоваться формулой 15 из табл. 1.1, вынесем множитель 9 за знак радикала:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{\left(\frac{2}{3}\right)} + C = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C.$$

Пример 1.5. $\int \frac{5}{3x^2 - 6} dx.$

Чтобы можно было воспользоваться формулой 18 из табл. 1.1, вынесем множитель 3 за скобки. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{3x^2 - 6} dx &= \frac{5}{3} \int \frac{dx}{x^2 - 2} = \frac{5}{3} \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + C = \frac{5}{6\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 1.6. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx.$

Разделим почленно числитель на знаменатель и воспользуемся формулой 4 из табл. 1.1. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx &= \int \left(\frac{3 \cdot 2^x}{2^x} - \frac{2 \cdot 3^x}{2^x} \right) dx = 3 \int 1 dx - 2 \int \left(\frac{3}{2} \right)^x dx = \\ &= 3x - 2 \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^x}{\ln \left(\frac{3}{2} \right)} + C = 3x - \frac{3^x}{2^{x-1} \ln \left(\frac{3}{2} \right)} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.7. $\int \frac{(1 + 2x^2)}{x^2(1 + x^2)} dx.$

Представив числитель в виде $(1 + x^2) + x^2$, разделим почленно числитель на знаменатель:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 + 2x^2)}{x^2(1 + x^2)} dx &= \int \frac{(1 + x^2) + x^2}{x^2(1 + x^2)} dx = \\ &= \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{1 + x^2} dx = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Пример 1.8. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

Используя основное тригонометрическое тождество и поделив почленно числитель на знаменатель, представим $\operatorname{ctg}^2 x$ в виде

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Далее воспользуемся формулой 8 из табл. 1.1. Тогда

$$\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx - \int 1 \, dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

Пример 1.9. $\int \frac{4x^2}{x^2 - 16} \, dx.$

Представив числитель в виде $4x^2 = 4(x^2 - 16) + 64$ и разделив почленно числитель на знаменатель, воспользуемся формулой 18 из табл. 1.1:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2}{x^2 - 16} \, dx &= \int \frac{4(x^2 - 16) + 64}{(x^2 - 16)} \, dx = \int 4 \, dx + 64 \int \frac{dx}{x^2 - 4^2} = \\ &= 4x + 64 \frac{1}{2 \cdot 4} \ln \left| \frac{x - 4}{x + 4} \right| + C = 4x + 8 \ln \left| \frac{x - 4}{x + 4} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 1.10. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} \, dx.$

Учитывая, что

$$x^4 + x^{-4} + 2 = (x^2 + x^{-2})^2, \quad \sqrt{x^4 + x^{-4} + 2} = x^2 + x^{-2},$$

получим

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} \, dx &= \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx + \int x^{-5} \, dx = \\ &= \ln|x| + \frac{x^{-4}}{-4} + C = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.11*. $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} \, dx, \quad \forall a \neq b.$

* Здесь и далее «звездочкой» обозначены примеры повышенной сложности.

Учитывая, что $(x-a)-(x-b)=b-a$, представим числитель в виде

$$1 = \frac{1}{b-a}((x-a)-(x-b)).$$

Далее, разделив почленно числитель на знаменатель, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx &= \frac{1}{b-a} \int \frac{(x-a)-(x-b)}{(x-a)(x-b)} dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\int \frac{1}{x-b} dx - \int \frac{1}{x-a} dx \right) = \frac{1}{b-a} (\ln|x-b| - \ln|x-a|) + C. \end{aligned}$$

Пример 1.12*. $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}.$

Учитывая, что $1 = (1+x^2) - x^2$, и разделив почленно числитель на знаменатель, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} &= \int \frac{(1+x^2)-x^2}{x^4(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^4} dx - \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \\ &= -\frac{1}{3x^3} - \int \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} dx = -\frac{1}{3x^3} - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Пример 1.13*. $\int \frac{x}{(x+1)(x-2)} dx.$

Представим числитель x в виде линейной комбинации $(x+1)$ и $(x-2)$: $x \equiv \alpha(x+1) + \beta(x-2)$. Множители α и β найдем, приравняв коэффициенты при x и x^0 :

$$x: 1 = \alpha + \beta; \quad x^0: 0 = \alpha - 2\beta.$$

Таким образом, $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$ и $x = \frac{2}{3}(x+1) + \frac{1}{3}(x-2)$. Далее, разделив почленно числитель на знаменатель, получим

$$\int \frac{x}{(x+1)(x-2)} dx = \int \frac{\frac{2}{3}(x+1) + \frac{1}{3}(x-2)}{(x+1)(x-2)} dx =$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{2}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x+1| + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

- 1.1. $\int \frac{(1-x)^3}{x^3 \sqrt{x}} dx$. 1.2. $\int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx$. 1.3. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$.
- 1.4. $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$. 1.5. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$. 1.6. $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^{2x} + x^2}{x^3} dx$. 1.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 4}}$.
- 1.8. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$. 1.9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. 1.10. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$.
- 1.11. $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$. 1.12. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$. 1.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}$.

1.2. Интегрирование методом подведения под знак дифференциала

Напомним, что дифференциал $df(x)$ дифференцируемой функции $f(x)$ определяется формулой $df(x) = f'(x)dx$.

При сведении заданного интеграла к табличному интегралу часто используются следующие преобразования дифференциалов:

1) $df(x) = d(f(x) + C) \quad \forall C;$

2) $df(x) = \frac{1}{C} d(C \cdot f(x)) \quad \forall C \neq 0;$

3) $f(x)dx = dF(x) = d\left(\int f(x)dx\right)$, где $F(x)$ первообразная для $f(x)$.

Например,

$$x dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} d(x^2); \quad \frac{1}{\sqrt{x}} dx = d(2\sqrt{x}) = 2d(\sqrt{x});$$

$$\frac{1}{x} dx = d(\ln|x|); \quad \frac{1}{x^2} dx = d\left(-\frac{1}{x}\right) = -d\left(\frac{1}{x}\right); \quad e^x dx = d(e^x);$$

$$\sin x dx = d(-\cos x) = -d(\cos x); \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\operatorname{tg} x);$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\arcsin x)$$

и т. д.

Утверждение (свойство инвариантности формул интегрирования). Если $\int f(t) dt = F(t) + C$ на интервале (a, b) и $t(x)$ — дифференцируемая функция на интервале (α, β) , множество значений которой принадлежит интервалу (a, b) , то

$$\int f(t(x)) t'(x) dx = F(t(x)) + C$$

на интервале (α, β) , т. е.

$$\int f(t(x)) d(t(x)) = F(t(x)) + C.$$

Таким образом, формулы интегрирования не меняются, если вместо независимой переменной t подставить дифференцируемую функцию $t = t(x)$.

Например, поскольку

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C,$$

то

$$\int \frac{d(5x^2 + 4)}{\sqrt{5x^2 + 4}} = 2\sqrt{5x^2 + 4} + C;$$

так как

$$\int \sin t dt = -\cos t + C,$$

то

$$\int \sin(4\sqrt{x} + 5) d(4\sqrt{x} + 5) = -\cos(4\sqrt{x} + 5) + C$$

и т. д.

Замечание. Если $\int f(t) dt = F(t) + C$, то

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

Примеры

Пример 1.14. $\int \frac{1}{(2x+4)^5} dx$.

Преобразуем dx : $dx = \frac{1}{2} d(2x) = \frac{1}{2} d(2x+4)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2x+4)^5} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+4)}{(2x+4)^5} = \\ &= \frac{1}{2} \int (2x+4)^{-5} d(2x+4) = -\frac{1}{8} (2x+4)^{-4} + C = -\frac{1}{8(2x+4)^4} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.15. $\int \operatorname{tg} x dx$.

Преобразуем $\sin x dx = -d(\cos x)$. Тогда

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Пример 1.16. $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

Способ 1. Умножим числитель и знаменатель на $\sin x$, преобразуем $\sin x dx = -d(\cos x)$ и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) + C. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$1 - \cos x = \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) - \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

и что $1 + \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$, окончательно получим

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Способ 2. Учтывая, что

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$$

и что $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = 2d \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$, получим

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{d \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Пример 1.17. $\int \frac{1}{\cos x} dx$.

Учтывая, что $\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$, $dx = d \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ и что $\cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x$, легко получить интеграл $\int \frac{1}{\cos x} dx$ из интеграла $\int \frac{1}{\sin x} dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} d \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{1 + \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C. \end{aligned}$$

Также справедливо:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} d\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \right| + C = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.\end{aligned}$$

Пример 1.18. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}.$

Преобразуем $x^3 dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{1}{4} d(x^4) = \frac{1}{4} d(x^4 + 1)$. Тогда

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4 + 1)}{\sqrt[3]{x^4 + 1}} = \frac{1}{4} \int (x^4 + 1)^{-\frac{1}{3}} d(x^4 + 1) = \frac{3}{8} (x^4 + 1)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Пример 1.19. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4}.$

Преобразуем $e^x dx = d(e^x)$. Тогда

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C.$$

Пример 1.20. $\int \frac{\sin(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}} dx.$

Преобразуем $\frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = 2d(\sqrt{x-1})$. Тогда

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}} dx = 2 \int \sin(\sqrt{x-1}) d(\sqrt{x-1}) = -2 \cos(\sqrt{x-1}) + C.$$

Пример 1.21. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}.$

Преобразуем $xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$. Тогда

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin x^2 + C.$$

Пример 1.22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}.$

Преобразуем $\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$ и вынесем множитель 4 за знак радикала. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}} &= \int \frac{d(\ln x)}{2\sqrt{\frac{1}{4}-\ln^2 x}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{2}}\right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(2\ln x) + C. \end{aligned}$$

Пример 1.23. $\int x(5x^2-3)^8 dx.$

Преобразуем $x dx = \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} d(5x^2) = \frac{1}{10} d(5x^2-3)$. Тогда

$$\int x(5x^2-3)^8 dx = \frac{1}{10} \int (5x^2-3)^8 d(5x^2-3) = \frac{1}{90} (5x^2-3)^9 + C.$$

Пример 1.24. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

Преобразуем $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\arcsin x)$. Тогда

$$\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) = \frac{1}{3} (\arcsin x)^3 + C.$$

Пример 1.25. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

Разобьем интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

В последнем интеграле внесем x под знак дифференциала:

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2) = -\frac{1}{2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} d(1-x^2).$$

Тогда

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + \int \frac{-\frac{1}{2} d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 1.26. $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$

Разобьем интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}} dx + \int \frac{(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$$

В первом интеграле внесем x под знак дифференциала:

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} d(-9x^2) = -\frac{1}{18} d(1-9x^2).$$

Тогда

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}} dx = -\frac{1}{18} \int \frac{d(1-9x^2)}{\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{1}{9} \sqrt{1-9x^2} + C.$$

Во втором интеграле внесем $\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$ под знак дифференциала:

$$\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx = -\frac{1}{3} d(\arccos 3x).$$

Тогда

$$\int \frac{(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx = -\frac{1}{3} \int (\arccos 3x)^2 d(\arccos 3x) = -\frac{1}{9} (\arccos 3x)^3 + C.$$

Итак,

$$\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx = -\frac{1}{9} \sqrt{1-9x^2} - \frac{1}{9} (\arccos 3x)^3 + C.$$

Пример 1.27. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx.$

Представим e^{2x} в виде произведения $e^{2x} = e^x e^x$, внесем e^x под знак дифференциала $e^x dx = d(e^x)$ и сделаем замену переменной $t = e^x$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx &= \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} e^x dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} d(e^x) = \\ &= \int \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt = \int \frac{(t+1) - 1}{\sqrt{t+1}} dt = \int \sqrt{t+1} dt - \int \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt = \\ &= \frac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t+1} + C = \frac{2}{3}(e^x + 1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{e^x + 1} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.28. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^4 x + 3}} dx.$

Представим $\sin 2x$ в виде произведения $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, внесем $\sin x$ под знак дифференциала $\sin x dx = -d(\cos x)$ и сделаем замену переменной $t = \cos x$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^4 x + 3}} dx &= \int \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos^4 x + 3}} \sin x dx = \\ &= -\int \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos^4 x + 3}} d(\cos x) = -\int \frac{2t}{\sqrt{t^4 + 3}} dt. \end{aligned}$$

В получившемся интеграле внесем $2t$ под знак дифференциала $2t dt = d(t^2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^4 x + 3}} dx &= -\int \frac{2t}{\sqrt{t^4 + 3}} dt = -\int \frac{d(t^2)}{\sqrt{(t^2)^2 + 3}} = \\ &= -\ln\left(t^2 + \sqrt{(t^2)^2 + 3}\right) + C = -\ln\left(\cos^2 x + \sqrt{\cos^4 x + 3}\right) + C. \end{aligned}$$

Пример 1.29. $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$

Учитывая, что подынтегральная функция определена при $x \in (0, 1)$, получим $\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x}\sqrt{1-x}$. Преобразуем $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d(\sqrt{x})$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} d(\sqrt{x}) = \\ &= 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} d(\sqrt{x}) = 2 \arcsin(\sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

Пример 1.30*. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

Воспользовавшись формулой приведения $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и формулой $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, учитывая, что

$$dx = -2d\left(-\frac{x}{2}\right) = -2d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right),$$

получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x} &= \int \frac{dx}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \int \frac{dx}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \\ &= - \int \frac{d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C. \end{aligned}$$

Пример 1.31*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Вынесем x^2 за знак радикала:

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \operatorname{sgn} x \cdot x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

и преобразуем $\frac{1}{x^2} dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{\operatorname{sgn} x \cdot x^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\operatorname{sgn} x \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$$

$$= -\operatorname{sgn} x \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right| + C.$$

Пример 1.32*. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

При $x \neq 0$ разделим числитель и знаменатель на x^2 . Имеем

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}.$$

Учитывая, что $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = d\left(x - \frac{1}{x}\right)$ и что $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$,

получим

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2} dx = \int \frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}} d\left(x - \frac{1}{x}\right) = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} d\left(x - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} \right) + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

1.14. $\int x^4 \sqrt{2-3x^2} dx$. 1.15. $\int \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$. 1.16. $\int \frac{x^4 dx}{(x^5+1)^4}$. 1.17. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

1.18. $\int \frac{dx}{x(2-3\ln^2 x)}$. 1.19. $\int 27^{-4x} dx$. 1.20. $\int \frac{e^x dx}{(5-e^x)^2}$. 1.21. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

1.22. $\int \frac{\cos x}{3+4\cos^2 x} dx$. 1.23. $\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 1.24. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

$$1.25. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}. \quad 1.26. \int \frac{(1+x)^2}{x^2+1} dx. \quad 1.27. \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} \text{ при } x > 0.$$

$$1.28. \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}. \quad 1.29. \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}. \quad 1.30. \int \frac{x dx}{x^4 + 3x^2 + 2}.$$

$$1.31. \int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}} dx. \quad 1.32. \int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}. \quad 1.33. \int x^2 \operatorname{tg}^2(x^3-3) dx.$$

$$1.34. * \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}. \quad 1.35. * \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx.$$

1.3. Замена переменной в неопределенном интеграле. Некоторые специальные подстановки для интегрирования отдельных классов функций

В приведенных выше примерах мы сначала подводили функцию под знак дифференциала, а затем (чаще мысленно) выполняли замену переменной. Однако часто, чтобы найти интеграл, надо сразу выполнить замену переменной.

Пусть требуется вычислить $\int f(x) dx$. Сделаем замену $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — дифференцируемая и строго монотонная функция новой переменной t . Тогда $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$. Закончив интегрирование, надо вернуться к первоначальной переменной.

Для удобства изложения материала определим рациональную функцию. **Рациональной функцией** или **рациональной дробью** называется отношение двух алгебраических многочленов:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}.$$

Рациональная дробь $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется **правильной**, если степень многочлена $P_n(x)$, стоящего в числителе, меньше степени многочлена $Q_m(x)$, стоящего в знаменателе, т. е. $n < m$. Если $n \geq m$, то рациональная дробь называется **неправильной**. Любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена степени $n - m$ и правильной рациональной

дроби. Для этого надо разделить числитель на знаменатель столбиком.

Алгебраическим многочленом $P_n(x, y)$ **степени** n **от двух аргументов** называется функция вида

$$P_n(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots + a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{0n}y^n.$$

Рациональной функцией или **рациональной дробью от двух аргументов** называется отношение двух многочленов от двух аргументов:

$$R(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}.$$

В табл. 1.2 приведены некоторые виды интегралов и рекомендуемые для них замены переменной.

Таблица 1.2

№ п/п	Вид интеграла	Замена переменной (подстановка)
1	$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$	$t = \sqrt[n]{ax+b}$
2	$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$	$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
3	$\int \frac{dx}{(x+\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$	$t = \frac{1}{x+\alpha}$
4	$\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx,$ $p_i, q_i \in N, i = 1, 2, \dots, n$	$x = t^k$, где k — наименьшее общее кратное чисел q_1, q_2, \dots, q_n ($k = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_n)$)
5	$\int R(e^x) dx$ $\int R(a^x) dx$	$t = e^x$ $t = a^x$
6	$\int R(\operatorname{tg} x) dx$	$t = \operatorname{tg} x$
7	$\int R(\operatorname{ctg} x) dx$	$t = \operatorname{ctg} x$
8	$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$	$x = a \sin t$ или $x = a \cos t$

№ п/п	Вид интеграла	Замена переменной (подстановка)
9	$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$	$x = a \operatorname{tg} t$ или $x = a \operatorname{sh} t$
10	$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$	$x = \frac{a}{\operatorname{cost}}$ или $x = \pm a \operatorname{cht}$

Рассмотрим подробнее тригонометрические и гиперболические подстановки.

1. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$.

Положим $x = a \sin t$ или $x = a \operatorname{th} t$.

При $x \in [-a, a]$ интеграл берется с помощью подстановки $x = a \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$t = \arcsin \frac{x}{a}, \quad dx = a \operatorname{cost} dt,$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t)} = a \sqrt{\cos^2 t} = a |\operatorname{cost}| = a \operatorname{cost}.$$

При $x \in (-a, a)$ можно применить подстановку $x = a \operatorname{th} t$. Тогда

$$dx = \frac{a}{\operatorname{ch}^2 t} dt, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}\right)} = a \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}} = \frac{a}{\operatorname{ch} t}.$$

2. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$.

Положим $x = a \operatorname{tg} t$ или $x = a \operatorname{sh} t$.

При подстановке $x = a \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, справедливо

$$t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt,$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 t)} = a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{|\operatorname{cost}|} = \frac{a}{\operatorname{cost}}.$$

При подстановке $x = a \operatorname{sh} t$ справедливо

$$dx = a \operatorname{cht} dt, \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 (1 + \operatorname{sh}^2 t)} = a \operatorname{cht}.$$

3. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$.

Положим $x = \frac{a}{\operatorname{cost}}$ или $x = \pm a \operatorname{ch} t$.

При подстановке $x = \frac{a}{\operatorname{cost}}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ справедливо

$$t = \arccos \frac{a}{x}, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t} \sin t dt;$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right)} = a \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{a |\sin t|}{|\cos t|} = \frac{a \sin t}{\operatorname{sgn}(\cos t) \cos t}.$$

Заметим, что $\operatorname{sgn}(\cos t) = \operatorname{sgn} x$.

При $x \in [a, +\infty)$ можно применить подстановку $x = a \operatorname{ch} t$, $t \in [0, +\infty)$; при $x \in (-\infty, -a]$ — подстановку $x = -a \operatorname{ch} t$, $t \in [0, +\infty)$. Тогда

$$dx = \pm a \operatorname{sh} t dt, \quad \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 (\operatorname{ch}^2 t - 1)} = a \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = a \operatorname{sh} t.$$

Примеры

Пример 1.33. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

Задан интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax+b}) dx$. Положим $t = \sqrt{2x+1}$.

Тогда $x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, $dx = t dt$ и

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} = \int \frac{t dt}{\frac{1}{2}(t^2 - 1) t} = 2 \int \frac{dt}{(t^2 - 1)} = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sqrt{2x+1} + 1} \right| + C.$$

Пример 1.34. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}$.

Задан интеграл вида $\int \frac{dx}{(x+\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$. Положим $t = \frac{1}{x}$.

Тогда

$$x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt, \quad \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-\frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|} = \operatorname{sgn} t \frac{\sqrt{4t^2-1}}{t}.$$

Заметим, что $\operatorname{sgn} t = \operatorname{sgn} x$, $\operatorname{sgn} x \cdot |x| = x$,

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} = \operatorname{sgn} t \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^2} \frac{\sqrt{4t^2-1}}{t}} = -\operatorname{sgn} t \int \frac{t dt}{\sqrt{4t^2-1}}.$$

В получившемся интеграле внесем t под знак дифференциала:

$$t dt = \frac{1}{2} d(t^2) = \frac{1}{8} d(4t^2) = \frac{1}{8} d(4t^2-1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} &= -\operatorname{sgn} t \int \frac{t dt}{\sqrt{4t^2-1}} = -\operatorname{sgn} t \frac{1}{8} \int \frac{d(4t^2-1)}{\sqrt{4t^2-1}} = \\ &= -\frac{1}{8} \operatorname{sgn} t \cdot 2\sqrt{4t^2-1} + C = -\frac{1}{4} \operatorname{sgn} x \sqrt{\frac{4}{x^2}-1} + C = \\ &= -\frac{1}{4} \operatorname{sgn} x \frac{\sqrt{4-x^2}}{|x|} + C = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

Замечание. Поясним, почему в данном примере удобна подстановка $t = \frac{1}{x}$. Вынесем множитель x^2 за знак корня. Учитывая, что $\frac{1}{x^2} dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$, получим

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} = \int \frac{\frac{1}{x^2} dx}{\sqrt{x^2 \left(\frac{4}{x^2}-1\right)}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{|x| \sqrt{\frac{4}{x^2}-1}} = -\operatorname{sgn} x \int \frac{\frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}}.$$

Далее естественно сделать замену переменной $t = \frac{1}{x}$.

Пример 1.35. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$

Способ 1. Учитывая, что

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^3(x-2)} &= \sqrt{(x-1)^2(x-1)(x-2)} = \\ &= |x-1|\sqrt{(x-1)(x-2)},\end{aligned}$$

получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \frac{dx}{|x-1|\sqrt{(x-1)(x-2)}}.$$

Таким образом, задан интеграл вида $\int \frac{dx}{(x+\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Положим $t = \frac{1}{x-1}$. Тогда $x-1 = \frac{1}{t}$, $x-2 = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$,
 $\sqrt{(x-1)(x-2)} = \sqrt{\frac{1}{t} \frac{1-t}{t}} = \frac{\sqrt{1-t}}{|t|}$, $x = 1 + \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. В итоге

имеем

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} &= \int \frac{dx}{|x-1|\sqrt{(x-1)(x-2)}} = \int \frac{-1/t^2}{(1/|t|)(\sqrt{1-t}/|t|)} dt = \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2\sqrt{1-t} + C = 2\sqrt{1 - \frac{1}{x-1}} + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C.\end{aligned}$$

Способ 2. Учитывая, что

$$\sqrt{(x-1)^3(x-2)} = \sqrt{(x-1)^4 \frac{x-2}{x-1}},$$

получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}(x-1)^2}.$$

Получен интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$. Положим

$$t = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}, \text{ тогда } x = \frac{t^2-2}{t^2-1} = \frac{(t^2-1)-1}{t^2-1} = 1 - \frac{1}{t^2-1}, \quad x-1 = -\frac{1}{t^2-1},$$

$$dx = \frac{2t}{(t^2-1)^2} dt \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}(x-1)^2} = \int \frac{\frac{2t}{(t^2-1)^2}}{t \frac{1}{(t^2-1)^2}} dt = \\ &= \int 2dt = 2t + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.36. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}$.

Положим $t = e^x$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t} dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} = \int \frac{\frac{1}{t} dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 + t + 1}}.$$

Получили интеграл вида $\int \frac{dt}{(t+\alpha)^n \sqrt{at^2 + bt + c}}$. Положим

$$u = \frac{1}{t}. \text{ Тогда } t = \frac{1}{u}, \quad dt = -\frac{1}{u^2} du,$$

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + 1} = \frac{\sqrt{u^2 + u + 1}}{|u|} = \operatorname{sgn} u \frac{\sqrt{u^2 + u + 1}}{u}.$$

Заметим, что $\operatorname{sgn} u = \operatorname{sgn} t = 1$, так как $t = e^x > 0$. Итак,

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 + t + 1}} = \int \frac{-\frac{1}{u^2} du}{\frac{1}{u} \frac{\sqrt{u^2 + u + 1}}{u}} = -\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + u + 1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\int \frac{d\left(u + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = -\ln \left| u + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right| + C = \\
&= -\ln \left| \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1} \right| + C = -\ln \left(e^{-x} + \frac{1}{2} + e^{-x} \sqrt{e^{2x} + e^x + 1} \right) + C.
\end{aligned}$$

Пример 1.37. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$.

Пусть $t = \sqrt{e^x - 1}$. Тогда $e^x = t^2 + 1$, $x = \ln(t^2 + 1)$,

$$dx = \frac{2t}{t^2 + 1} dt,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{2t}{t^2 + 1} \frac{dt}{t} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C.$$

Пример 1.38. $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx$.

Задан интеграл вида $\int R\left(x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right) dx$. Положим $x = t^6$, здесь $6 = \text{НОК}(2, 3)$. Тогда $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5 dt$, $t = x^{\frac{1}{6}}$ и

$$\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx = \int \frac{t^3 - 1}{t^2 + 1} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8 - t^5}{t^2 + 1} dt.$$

Получился интеграл вида $\int R(t) dt$, где $R(t) = \frac{P_8(t)}{Q_2(t)}$ — неправильная рациональная дробь. Разделив числитель на знаменатель, получим

$$\frac{t^8 - t^5}{t^2 + 1} = t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 + \frac{-t + 1}{t^2 + 1}.$$

Тогда

$$\int \frac{t^8 - t^5}{t^2 + 1} dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \int \frac{-tdt}{t^2 + 1} + \int \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

В интеграле $\int \frac{-tdt}{t^2 + 1}$ внесем t под знак дифференциала:

$$tdt = \frac{1}{2}d(t^2) = \frac{1}{2}d(t^2 + 1),$$

тогда

$$\int \frac{-tdt}{t^2 + 1} = -\int \frac{\frac{1}{2}d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} = -\frac{1}{2}\ln(t^2 + 1) + C.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx &= 6 \int \frac{t^8 - t^5}{t^2 + 1} dt = \frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} - \frac{6t^4}{4} + \frac{6t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} - \\ &- 6t - \frac{6}{2}\ln(t^2 + 1) + 6\operatorname{arctg} t + C = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} - \\ &- 6x^{\frac{1}{6}} - 3\ln\left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right) + 6\operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.39. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

Представив x^5 в виде произведения $x^5 = x^4x$, внесем x под знак дифференциала: $x dx = \frac{1}{2}d(x^2)$. Сделаем замену переменной $t = x^2$. Тогда

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x^4x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} d(x^2) = \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t}} dt.$$

Получили интеграл вида $\int R(t, \sqrt[4]{at+b}) dt$.

Положим $\alpha = \sqrt{1-t}$. Тогда $t = 1 - \alpha^2$, $dt = -2\alpha d\alpha$ и

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(1-\alpha^2)^2}{\alpha} (-2) \alpha d\alpha = \\ &= -\int (1-2\alpha^2 + \alpha^4) d\alpha = -\left(\alpha - \frac{2}{3}\alpha^3 + \frac{1}{5}\alpha^5\right) + C = \\ &= -\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.40. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$.

Выполним тригонометрическую подстановку. Положим

$$x = 2 \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тогда

$$t = \arcsin \frac{x}{2}, \quad dx = 2 \cos t dt,$$

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4(1-\sin^2 t)} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2|\cos t| = 2 \cos t,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx &= \int \frac{2 \cos t}{2 \sin t} 2 \cos t dt = 2 \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = 2 \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t} dt = \\ &= 2 \int \frac{1}{\sin t} dt - 2 \int \sin t dt = \ln \left(\frac{1-\cos t}{1+\cos t} \right) + 2 \cos t + C. \end{aligned}$$

Из подстановки $x = 2 \sin t$ выразим $\sin t = \frac{x}{2}$. Учитывая, что

$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, получим

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2};$$

$$\frac{1-\cos t}{1+\cos t} = \frac{1-\sqrt{4-x^2}/2}{1+\sqrt{4-x^2}/2} = \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}}.$$

Итак,

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = \ln \left(\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}} \right) + \sqrt{4-x^2} + C.$$

Пример 1.41. $\int \sqrt{a^2+x^2} dx$.

Выполним гиперболическую подстановку. Положим $x = a \operatorname{sh} t$.

Тогда

$$dx = a \operatorname{ch} t dt, \quad \sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+\operatorname{sh}^2 t)} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = a \operatorname{ch} t,$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2} dx = \int a^2 \operatorname{ch}^2 t dt = a^2 \int \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t \right) + C.$$

Из подстановки $x = a \operatorname{sh} t$ выразим $\operatorname{sh} t = \frac{x}{a}$. Учитывая, что

$$\operatorname{ch} t = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a},$$

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \frac{x}{a} \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}, \quad \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t = e^t,$$

$$t = \ln(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2+a^2}}{a} \right),$$

получим

$$\int \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{a^2}{2} \left(\ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2+a^2}}{a} \right) + \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{a^2} \right) + C.$$

Пример 1.42. $\int \frac{dx}{(x^2+5)\sqrt{x^2+1}}$.

Выполним тригонометрическую подстановку. Положим

$$x = \operatorname{tg} t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Тогда

$$t = \operatorname{arctg} x, \quad dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt,$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{|\cos t|} = \frac{1}{\cos t}.$$

Учитывая, что

$$x^2 + 5 = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 5 = \frac{\sin^2 t + 5 \cos^2 t}{\cos^2 t},$$

получим

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{1/\cos^2 t}{((\sin^2 t + 5 \cos^2 t)/\cos^3 t)} dt = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t + 5 \cos^2 t}.$$

Учитывая, что

$$\cos t dt = d(\sin t) \text{ и } \cos^2 t = 1 - \sin^2 t,$$

получим

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t + 5 \cos^2 t} &= \int \frac{d(\sin t)}{5 - 4 \sin^2 t} = \frac{1}{4} \int \frac{d(\sin t)}{\frac{5}{4} - \sin^2 t} = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sin t + \sqrt{5}/2}{\sin t - \sqrt{5}/2} \right| + C = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left(\frac{2 \sin t + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2 \sin t} \right) + C. \end{aligned}$$

Так как $x = \operatorname{tg} t$ и $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, то

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+x^2}, \quad \sin t = \operatorname{tg} t \cos t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left(\frac{2x + \sqrt{5}\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{5}\sqrt{x^2 + 1} - 2x} \right) + C.$$

Пример 1.43. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Способ 1. Выполним тригонометрическую подстановку. Положим

$$x = \frac{1}{\cos t}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Тогда

$$t = \arccos\left(\frac{1}{x}\right), \quad dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt,$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{|\sin t|}{|\cos t|} = \frac{\sin t}{\operatorname{sgn}(\cos t) \cos t}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} &= \operatorname{sgn}(\cos t) \int \frac{\sin t / \cos^2 t}{(1/\cos t)(\sin t / \cos t)} dt = \operatorname{sgn}(\cos t) \int dt = \\ &= \operatorname{sgn}(\cos t)t + C = \operatorname{sgn} x \arccos\left(\frac{1}{x}\right) + C. \end{aligned}$$

Способ 2. Положим $t = \frac{1}{x}$. Тогда

$$x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt, \quad \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1} = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{|t|} = \operatorname{sgn} t \frac{\sqrt{1 - t^2}}{t},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} &= -\operatorname{sgn} t \int \frac{1/t^2}{(1/t)(\sqrt{1 - t^2}/t)} dt = -\operatorname{sgn} t \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \\ &= \operatorname{sgn} t \arccos t + C = \operatorname{sgn} x \arccos\left(\frac{1}{x}\right) + C. \end{aligned}$$

Примеры для самостоятельного решения

$$1.36. \int \frac{x^2}{(1-2x)^{100}} dx. \quad 1.37. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}. \quad 1.38. \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}. \quad 1.39. \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx.$$

$$1.40. \int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx. \quad 1.41. \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 1.42. \int x^3\sqrt[3]{x^2+1} dx.$$

$$1.43. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx. \quad 1.44. \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 1.45. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$$

Глава 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

2.1. Интегрирование по частям

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b) и существует $\int v(x)u(x)'dx$ на интервале (a, b) . Тогда существует $\int u(x)v(x)'dx$ на интервале (a, b) и $\int u(x)v(x)'dx = u(x)v(x) - \int v(x)u(x)'dx$ на интервале (a, b) .

Последнюю формулу можно записать в виде

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Эта формула называется формулой *интегрирования по частям*.

С помощью формулы интегрирования по частям нахождение интеграла $\int u dv$ сводится к нахождению интеграла $\int v du$, который в некоторых случаях вычислить достаточно легко. Значительная часть интегралов, берущихся методом интегрирования по частям, может быть разбита на три группы.

1. Интегралы вида

$$\int f(x)g(x) dx,$$

где $f(x)$ является одной из следующих функций: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arcctg } x$, $\ln^2 x$, $\arcsin^2 x$, ...

Для вычисления интегралов первой группы следует применить формулу интегрирования по частям, полагая в ней $u(x) = f(x)$.

2. Интегралы вида

$$\int P_n(x)g(x)dx,$$

где $P_n(x)$ многочлен степени n , а $g(x)$ является одной из следующих функций: e^{ax} , $\sin ax$, $\cos ax$.

Для вычисления интегралов второй группы следует применить формулу интегрирования по частям, полагая в ней $u(x) = P_n(x)$. Тогда $du = P'_n(x)dx = Q_{n-1}(x)dx$, и нахождение интеграла $\int P_n(x) \times g(x)dx$ сведется к нахождению похожего интеграла с многочленом меньшей степени.

3. Интегралы вида

$$\int e^{ax} \cos bx, \int e^{ax} \sin bx, \int \cos(\ln x)dx, \int \sin(\ln x)dx.$$

Обозначив искомый интеграл этой группы через $I(x)$ и выполнив двукратное интегрирование по частям, получим для неизвестной функции $I(x)$ уравнение первого порядка, из которого найдем эту функцию.

Примеры

Пример 2.1. $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

Этот интеграл является интегралом первой группы. Полагая $u(x) = \operatorname{arctg} x$, $dv(x) = x dx$, имеем

$$du(x) = \frac{1}{1+x^2} dx, \quad v(x) = \int dv(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{2} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Пример 2.2. $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

Этот интеграл является интегралом первой группы. Полагая $u(x) = \ln x$, $dv(x) = \sqrt{x} dx$, имеем

$$du(x) = \frac{1}{x} dx, \quad v(x) = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \ln x dx &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Пример 2.3. $\int \arcsin^2 x dx$.

Этот интеграл является интегралом первой группы. Полагая $u(x) = \arcsin^2 x$, $dv(x) = dx$, имеем

$$du(x) = 2 \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad v(x) = x.$$

Тогда

$$\int \arcsin^2 x dx = x \arcsin^2 x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx.$$

Последний интеграл также является интегралом первой группы.

Полагая $u(x) = \arcsin x$, $dv(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, имеем

$$du(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$v(x) = \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = -2\sqrt{1-x^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx &= -2\sqrt{1-x^2} \arcsin x + 2 \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= -2\sqrt{1-x^2} \arcsin x + 2x + C. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\int \arcsin^2 x \, dx = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C.$$

Пример 2.4. $\int x \sin 2x \, dx$.

Этот интеграл является интегралом второй группы. Полагая $u(x) = x$, $dv(x) = \sin 2x \, dx$, имеем

$$du(x) = dx, \quad v(x) = \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x.$$

Тогда

$$\int x \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Пример 2.5. $\int (x^2 + 4)e^{3x} \, dx$.

Этот интеграл является интегралом второй группы. Полагая $u(x) = x^2 + 4$, $dv(x) = e^{3x} \, dx$, имеем

$$du(x) = 2x \, dx, \quad v(x) = \int e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} e^{3x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 4)e^{3x} \, dx &= (x^2 + 4) \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 4) e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} \, dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл также является интегралом второй группы. Полагая $u(x) = x$, $dv(x) = e^{3x} \, dx$, имеем

$$du(x) = dx, \quad v(x) = \frac{1}{3} e^{3x}.$$

Тогда

$$\int x e^{3x} \, dx = x \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C.$$

Итак,

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 4)e^{3x} dx &= \frac{1}{3}(x^2 + 4)e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} \right) + C = \\ &= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{38}{27} \right) e^{3x} + C.\end{aligned}$$

Пример 2.6. $\int e^x \cos x dx$.

Этот интеграл является интегралом третьей группы. Обозначим искомый интеграл через $I(x)$. Полагая $u(x) = e^x$, $dv(x) = \cos x dx$, имеем $du(x) = e^x dx$, $v(x) = \int \cos x dx = \sin x$. Тогда

$$I(x) = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Последний интеграл еще раз проинтегрируем по частям. Полагая $u(x) = e^x$, $dv(x) = \sin x dx$, имеем $du(x) = e^x dx$, $v(x) = \int \sin x dx = -\cos x$. Тогда

$$\begin{aligned}I(x) &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right) = \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - I(x).\end{aligned}$$

Итак,

$$I(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - I(x).$$

Следовательно,

$$2I(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$$

и

$$I(x) = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

Пример 2.7. $\int \sin(\ln x) dx$.

Этот интеграл является интегралом третьей группы. Обозначим искомый интеграл через $I(x)$. Полагая $u(x) = \sin(\ln x)$, $dv(x) = dx$, имеем $du(x) = \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx$, $v(x) = x$. Тогда

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx = \\ &= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx.\end{aligned}$$

Последний интеграл еще раз проинтегрируем по частям. Полагая $u(x) = \cos(\ln x)$, $dv(x) = dx$, имеем $du(x) = -\frac{1}{x}dx \sin(\ln x)$, $v(x) = x$.

Тогда

$$\begin{aligned} I(x) &= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = \\ &= x \sin(\ln x) - \left(x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx \right) = \\ &= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I(x). \end{aligned}$$

Итак,

$$I(x) = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I(x).$$

Следовательно

$$I(x) = \int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} x (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$$

Пример 2.8. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$.

Задан интеграл вида $\int P_1(x)g(x)dx$, где $P_1(x)$ — многочлен первой степени, а $\int g(x)dx$ легко найти. Полагая $u(x) = x$,

$$dv(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx, \text{ имеем}$$

$$du(x) = dx, \quad v(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}.$$

Тогда

$$\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx = -x \frac{1}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x} dx = -\frac{x}{\sin x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Пример 2.9. $\int x \sin \sqrt{x} dx$.

Сначала выполним замену переменной. Положим $t = \sqrt{x}$. Тогда

$$x = t^2, \quad dx = 2t dt, \quad \int x \sin \sqrt{x} dx = \int t^2 \sin t \cdot 2t dt = 2 \int t^3 \sin t dt.$$

Получившийся интеграл является интегралом второй группы. Три раза проинтегрируем его по частям. Полагая $u(t) = t^3$, $dv(t) = \sin t dt$, имеем $du(t) = 3t^2 dt$, $v(t) = \int \sin t dt = -\cos t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int x \sin \sqrt{x} dx &= 2 \int t^3 \sin t dt = 2 \left(-t^3 \cos t + 3 \int t^2 \cos t dt \right) = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = t^2, \quad dv = \cos t dt \\ du = 2t dt, \quad v = \sin t \end{array} \right| = \\ &= -2t^3 \cos t + 6 \left(t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt \right) = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = t, \quad dv = \sin t dt \\ du = dt, \quad v = -\cos t \end{array} \right| = \\ &= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t - 12 \left(-t \cos t + \int \cos t dt \right) = \\ &= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12t \cos t - 12 \sin t + C = \\ &= -2x\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 6x \sin \sqrt{x} + 12\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 12 \sin \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Примеры для самостоятельного решения

- 2.1. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} dx$. 2.2. $\int \ln^2 x dx$. 2.3. $\int (x^2 + 3x - 1) \sin 2x dx$.
 2.4. $\int e^{-2x} \sin x dx$. 2.5. $\int \arcsin(2 - 3x) dx$. 2.6. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.
 2.7. $\int \cos(3 \ln x) dx$. 2.8. $\int (x^2 - 2x) \cdot 2^{-x} dx$. 2.9. $\int \cos \sqrt[3]{x} dx$.
 2.10. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$. 2.11. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$. 2.12. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$.
 2.13. $\int x^5 e^{x^3} dx$.

2.2. Интегралы вида $\int \sqrt{x^2 + A} dx$, $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$,
 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + A}} dx$, $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$, $\int \frac{dx}{(x^2 + A)^n}$

Покажем, как находить **интегралы вида** $\int \sqrt{x^2 + A} dx$, $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ методом интегрирования по частям. Для того чтобы

найти интеграл $\int \sqrt{x^2 + A} dx$, $A \neq 0$, или $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $a > 0$, обозначим искомый интеграл через $I(x)$, проинтегрируем его по частям и составим для $I(x)$ уравнение первого порядка. Например,

$$I(x) = \int \sqrt{x^2 + A} dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 + A}, \quad dv = dx \\ du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + A}}, \quad v = x \end{array} \right| = \\ = x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + A}}.$$

Представив в последнем интеграле числитель в виде $(x^2 + A) - A$, разделим почленно числитель на знаменатель:

$$I(x) = x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{(x^2 + A) - A}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \\ = x\sqrt{x^2 + A} - \int \sqrt{x^2 + A} dx + A \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \\ = x\sqrt{x^2 + A} - I(x) + A \ln|x + \sqrt{x^2 + A}|.$$

Итак, $I(x) = x\sqrt{x^2 + A} - I(x) + A \ln|x + \sqrt{x^2 + A}|$. Следовательно,

$$I(x) = \int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C.$$

Интегралы вида $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + A}} dx \forall A \neq 0$, $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \forall a > 0$ находят аналогично. Представим числитель в виде $(x^2 + A) - A$ или в виде $-(-x^2 + a^2) + a^2$ соответственно и разделим почленно числитель на знаменатель:

$$I(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \int \frac{(x^2 + A) - A}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \int \sqrt{x^2 + A} dx - \int \frac{A}{\sqrt{x^2 + A}} dx.$$

Первый из полученных интегралов проинтегрируем по частям, второй интеграл является табличным. В ходе преобразований получаем

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int \sqrt{x^2 + A} \, dx - \int \frac{A}{\sqrt{x^2 + A}} \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 + A}, \quad dv = dx \\ du = \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + A}}, \quad v = x \end{array} \right| = \\
 &= x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 + A}} - \int \frac{A}{\sqrt{x^2 + A}} \, dx = \\
 &= x\sqrt{x^2 + A} - I(x) - A \ln|x + \sqrt{x^2 + A}|.
 \end{aligned}$$

Итак, $I(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + A}} \, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + A} - \frac{A}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C.$

Рассмотрим **интеграл** $\int \frac{dx}{(x^2 + A)^n}$ ($A \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots$). Обозначим его через $I_n(x)$. Выведем рекуррентную формулу, позволяющую свести интеграл $I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + A)^n}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) к интегралу с меньшим индексом $I_{n-1}(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}}$. Для этого проинтегрируем интеграл $I_{n-1}(x)$ по частям:

$$\begin{aligned}
 I_{n-1}(x) &= \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}} = \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{(x^2 + A)^{n-1}}, \quad dv = dx \\ du = -\frac{(n-1) \cdot 2x}{(x^2 + A)^n} \, dx, \quad v = x \end{array} \right| = \\
 &= \frac{x}{(x^2 + A)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2}{(x^2 + A)^n} \, dx.
 \end{aligned}$$

Представив в последнем интеграле числитель в виде $(x^2 + A) - A$, разделим почленно числитель на знаменатель

$$\begin{aligned}
 I_{n-1}(x) &= \frac{x}{(x^2 + A)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{(x^2 + A) - A}{(x^2 + A)^n} dx = \\
 &= \frac{x}{(x^2 + A)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{1}{(x^2 + A)^{n-1}} dx - 2A(n-1) \int \frac{1}{(x^2 + A)^n} dx = \\
 &= \frac{x}{(x^2 + A)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1}(x) - 2A(n-1)I_n(x).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_{n-1}(x) = \frac{x}{(x^2 + A)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1}(x) - 2A(n-1)I_n(x)$$

и

$$I_n(x) = \frac{1}{2A(n-1)} \frac{x}{(x^2 + A)^{n-1}} + \frac{(2n-3)I_{n-1}(x)}{2A(n-1)} + C. \quad (2.1)$$

Таким образом, получена рекуррентная формула, сводящая интеграл $I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + A)^n}$ к интегралу $I_{n-1}(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n-1}}$, $n = 2, 3, 4, \dots$. В частности,

$$I_2(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + A)^2} = \frac{1}{2A} \cdot \frac{x}{x^2 + A} + \frac{1}{2A} \int \frac{dx}{x^2 + A} + C. \quad (2.2)$$

Замечание. Интеграл $I_2(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$ можно найти с помощью тригонометрической замены $x = a \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Действительно, учитывая, что $x^2 + a^2 = a^2(\operatorname{tg}^2 t + 1) = \frac{a^2}{\cos^2 t}$, $dx = a \frac{1}{\cos^2 t} dt$, $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$, получим

$$I_2(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \int \frac{\frac{a}{\cos^2 t}}{\left(\frac{a^2}{\cos^2 t}\right)^2} dt = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{a^3} \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2a^3} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C.$$

Учитывая, что $\frac{1}{2} \sin 2t = \sin t \cos t = \operatorname{tg} t \cos^2 t = \frac{x}{a} \frac{a^2}{x^2 + a^2}$, окончательно получим $I_2(x) = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + C$.

2.3. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интегралы вида

$$1) \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx, \quad 2) \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \quad 3) \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx,$$

$$4) \int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c} dx, \quad 5) \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx, \quad n=2, 3, \dots$$

Для вычисления этих интегралов выделим полный квадрат из квадратного трехчлена:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) =$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

и выполним замену переменной $t = x + \frac{b}{2a}$, $x = t - \frac{b}{2a}$, $dx = dt$. После замены переменной интегралы 1), 2), 4), 5) разобьются на два интеграла. В интеграле, содержащем t в числителе, внесем t под знак дифференциала. В процессе вычисления интегралов 3) и 4) встретятся интегралы вида $\int \sqrt{t^2 + A} dt$ или $\int \sqrt{a^2 - t^2} dt$, которые берутся по частям либо с помощью тригонометрической или гиперболической замены переменной. В процессе вычисления интеграла 5) встретится интеграл $\int \frac{dt}{(t^2 + A)^n}$, который можно найти, воспользовавшись рекуррентной формулой (2.1).

Примеры

Пример 2.10. $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+1} dx.$

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена: $x^2+4x+1=(x+2)^2-3$ и выполним замену $t=x+2$, $x=t-2$, $dx=dt$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^2+4x+1} dx &= \int \frac{3(t-2)-1}{t^2-3} dt = \int \frac{3t-7}{t^2-3} dt = 3 \int \frac{t dt}{t^2-3} - 7 \int \frac{dt}{t^2-3} = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2-3)}{(t^2-3)} - 7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| = \frac{3}{2} \ln |t^2-3| + \frac{7}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}} \right| + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln |x^2+4x+1| + \frac{7}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x+2+\sqrt{3}}{x+2-\sqrt{3}} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 2.11. $\int \frac{2x-7}{\sqrt{1-x-x^2}} dx.$

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена: $-x^2-x+1=-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$ и выполним замену $t=x+\frac{1}{2}$, $x=t-\frac{1}{2}$, $dx=dt$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-7}{\sqrt{1-x-x^2}} dx &= \int \frac{2(t-\frac{1}{2})-7}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}} dt = \int \frac{2t-8}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}} dt = \\ &= \int \frac{2t dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}} - 8 \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}} = - \int \frac{d(\frac{5}{4}-t^2)}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}} - 8 \arcsin \frac{t}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} = \\ &= -2\sqrt{\frac{5}{4}-t^2} - 8 \arcsin \frac{2t}{\sqrt{5}} + C = \\ &= -2\sqrt{-x^2-x+1} - 8 \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

Пример 2.12. $\int \frac{x}{x^4+3x^2+2} dx.$

Внесем x под знак дифференциала $x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$, выполним замену переменной $t = x^2$ и получим интеграл от функции, содержащей квадратный трехчлен:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 3t + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t + \frac{3}{2}\right)}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t + 3/2 - 1/2}{t + 3/2 + 1/2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t + 1}{t + 2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \right) + C. \end{aligned}$$

Пример 2.13. $\int \sqrt{x^2 + 6x + 2} dx$.

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена: $x^2 + 6x + 2 = (x + 3)^2 - 7$ и выполним замену $t = x + 3$, $x = t - 3$, $dx = dt$. Тогда $\int \sqrt{x^2 + 6x + 2} dx = \int \sqrt{t^2 - 7} dt$. Обозначим интеграл $\int \sqrt{t^2 - 7} dt$ через $I(t)$ и проинтегрируем его по частям (см. п. 2.2):

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \sqrt{t^2 - 7} dt = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{t^2 - 7}, \quad dv = dt \\ du = \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - 7}}, \quad v = t \end{array} \right| = t\sqrt{t^2 - 7} - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 - 7}} = \\ &= t\sqrt{t^2 - 7} - \int \frac{(t^2 - 7) + 7}{\sqrt{t^2 - 7}} dt = t\sqrt{t^2 - 7} - \int \sqrt{t^2 - 7} dt - 7 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 7}} = \\ &= t\sqrt{t^2 - 7} - I(t) - 7 \ln |t + \sqrt{t^2 - 7}|. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} I(t) &= t\sqrt{t^2 - 7} - I(t) - 7 \ln |t + \sqrt{t^2 - 7}|, \\ I(t) &= \frac{1}{2} t\sqrt{t^2 - 7} - \frac{7}{2} \ln |t + \sqrt{t^2 - 7}| + C, \\ \int \sqrt{x^2 + 6x + 2} dx &= \frac{1}{2} (x + 3) \sqrt{x^2 + 6x + 2} - \\ &\quad - \frac{7}{2} \ln |x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 2}| + C. \end{aligned}$$

Пример 2.14. $\int x\sqrt{1+2x-x^2} dx$.

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена: $-x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$ и выполним замену $t = x-1$, $x = t+1$, $dx = dt$. Тогда

$$\int x\sqrt{1+2x-x^2} dx = \int (t+1)\sqrt{2-t^2} dt = \int t\sqrt{2-t^2} dt + \int \sqrt{2-t^2} dt.$$

В первом интеграле внесем t под знак дифференциала:

$$t dt = \frac{1}{2} d(t^2) = -\frac{1}{2} d(2-t^2).$$

Тогда

$$\int t\sqrt{2-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int \sqrt{2-t^2} d(2-t^2) = -\frac{1}{3} (2-t^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Обозначим второй интеграл $\int \sqrt{2-t^2} dt$ через $I(t)$ и проинтегрируем его по частям:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \sqrt{2-t^2} dt = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{2-t^2}, \quad dv = dt \\ du = -\frac{t dt}{\sqrt{2-t^2}}, \quad v = t \end{array} \right| = t\sqrt{2-t^2} - \int \frac{-t^2 dt}{\sqrt{2-t^2}} = \\ &= t\sqrt{2-t^2} - \int \frac{(2-t^2)-2}{\sqrt{2-t^2}} dt = t\sqrt{2-t^2} - \int \sqrt{2-t^2} dt + 2 \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \\ &= t\sqrt{2-t^2} - I(t) + 2 \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$I(t) = t\sqrt{2-t^2} - I(t) + 2 \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}},$$

$$I(t) = \frac{1}{2} t\sqrt{2-t^2} + \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} + C.$$

Таким образом,

$$\int x\sqrt{1+2x-x^2} dx = -\frac{1}{3}(2-t^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}t\sqrt{2-t^2} + \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}(1+2x-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{1+2x-x^2} + \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример 2.15. $\int \frac{x+4}{(x^2-8x+7)^2} dx.$

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена: $x^2 - 8x + 7 = (x-4)^2 - 9$ и выполним замену $t = x-4$, $x = t+4$, $dx = dt$. Тогда

$$\int \frac{x+4}{(x^2-8x+7)^2} dx = \int \frac{t+8}{(t^2-9)^2} dt = \int \frac{t}{(t^2-9)^2} dt + 8 \int \frac{dt}{(t^2-9)^2}.$$

В первом интеграле внесем t под знак дифференциала: $t dt = \frac{1}{2} d(t^2) = \frac{1}{2} d(t^2-9)$. Тогда

$$\int \frac{t}{(t^2-9)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2-9)}{(t^2-9)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{t^2-9} + C.$$

Обозначив второй интеграл $\int \frac{dt}{(t^2-9)^2}$ через $I_2(t)$, найдем этот интеграл, воспользовавшись рекуррентной формулой (2.2):

$$I_2(t) = \int \frac{dt}{(t^2-9)^2} = -\frac{1}{18} \cdot \frac{t}{t^2-9} - \frac{1}{18} \int \frac{dt}{t^2-9} =$$

$$= -\frac{1}{18} \cdot \frac{t}{t^2-9} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{6} \ln \left| \frac{t+3}{t-3} \right| + C.$$

Итак,

$$\int \frac{x+4}{(x^2-8x+7)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2-9} + 8 \left(-\frac{1}{18} \cdot \frac{t}{t^2-9} + \frac{1}{108} \ln \left| \frac{t+3}{t-3} \right| \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2-8x+7} - \frac{4}{9} \cdot \frac{x-4}{x^2-8x+7} + \frac{2}{27} \ln \left| \frac{x-1}{x-7} \right| + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

2.14. $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+4x-1}} dx$. **2.15.** $\int \frac{4-3x}{x^2+6x+10} dx$. **2.16.** $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1-6\ln x-\ln^2 x}}$.

2.17. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x + 8\sin x + 15}$. **2.18.** $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3}} dx$.

2.19. $\int \sqrt{-x^2 + 2x + 4} dx$. **2.20.** $\int (2x-3)\sqrt{x^2 + 6x + 10} dx$.

2.21. $\int \frac{3-x}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$.

Глава 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Простейшими рациональными дробями называются рациональные дроби следующих четырех типов:

1) $\frac{A}{x-a}$;

2) $\frac{A}{(x-a)^n}$, $n = 2, 3, \dots$;

3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $D = p^2 - 4q < 0$;

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, $n = 2, 3, \dots$; $D = p^2 - 4q < 0$.

Рассмотрим интегралы от простейших рациональных дробей:

I. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$.

II. $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{-n+1} (x-a)^{-n+1} + C$.

III. Способ нахождения интеграла от простейшей рациональной дроби третьего типа $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ рассмотрен в п. 2.3.

IV. Способ нахождения интеграла от простейшей рациональной дроби четвертого типа $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$, $n = 2, 3, \dots$ рассмотрен в п. 2.3.

Интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию простейших рациональных дробей.

Теорема 3.1. Всякую правильную рациональную дробь $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей.

Для разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей представим знаменатель в виде произведения линейных и квадратичных множителей:

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 = \\ = b_m (x - x_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x - x_l)^{\alpha_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_k x + q_k)^{\beta_k},$$

где x_1, \dots, x_l — действительные корни многочлена кратности $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ соответственно, а $(x^2 + p_1 x + q_1), \dots, (x^2 + p_k x + q_k)$ — квадратные трехчлены, не имеющие действительных корней ($D < 0$). Для разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей воспользуемся табл. 3.1.

Таблица 3.1

№ п/п	Множитель знаменателя	Соответствующие слагаемые
1	$(x - a)$	$\frac{A}{x - a}$
2	$(x - a)^k, k = 2, 3, \dots$	$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k}$
3	$(x^2 + px + q), D < 0$	$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$
4	$(x^2 + px + q)^k, k = 2, 3, \dots, (D < 0)$	$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + px + q)^k}$

Примеры

Пример 3.1. $\int \frac{3x - 1}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx.$

Разложим знаменатель на множители $x^3 - 5x^2 + 4x = x(x - 1) \times (x - 4)$. Корни знаменателя действительные и различные. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей, воспользовавшись первой строкой табл. 3.1:

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{x^3-5x^2+4x} &= \frac{3x-1}{x(x-1)(x-4)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4} \equiv \\ &\equiv \frac{A(x-1)(x-4) + Bx(x-4) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-4)}, \end{aligned}$$

где A, B, C — некоторые действительные числа.

Две дроби с одинаковыми знаменателями тождественно равны тогда и только тогда, когда у них тождественно равны числители: $3x-1 \equiv A(x-1)(x-4) + Bx(x-4) + Cx(x-1)$ при $\forall x$. Подставляя в последнее тождество значения $x=0, x=1, x=4$, находим коэффициенты A, B, C . Положим $x=0$, тогда $-1=4A$, т. е. $A=-\frac{1}{4}$; если $x=1$, то $2=-3B$, т. е. $B=-\frac{2}{3}$; при $x=4$ имеем $11=12C$, т. е.

$C=\frac{11}{12}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^3-5x^2+4x} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{11}{12} \int \frac{1}{x-4} dx = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x| - \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{11}{12} \ln|x-4| + C. \end{aligned}$$

Пример 3.2. $\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} dx$.

Знаменатель имеет два действительных корня: $x=1$ — действительный корень кратности 1; $x=-1$ — действительный корень кратности 2. Разложим подинтегральную функцию на сумму простейших дробей, воспользовавшись первой и второй строками табл. 3.1:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} &\equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \equiv \\ &\equiv \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}, \end{aligned}$$

где A, B, C — некоторые действительные числа.

Справедливо тождество

$$x^2 + 2 \equiv A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1) \text{ при } \forall x.$$

Подставляя в это тождество значения $x=1$, $x=-1$ и приравнивая коэффициенты при x^2 , получаем коэффициенты A, B, C :

$$x=1: 3=4A \Rightarrow A=\frac{3}{4};$$

$$x=-1: 3=-2C \Rightarrow C=-\frac{3}{2};$$

$$x^2: 1=A+B \Rightarrow B=\frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{(x-1)(x+1)^2} dx &= \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

Пример 3.3. $\int \frac{x^7}{(x^4 + 2)(x^4 - 3)} dx.$

Учитывая, что $x^3 dx = \frac{1}{4} d(x^4)$, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x^7}{(x^4 + 2)(x^4 - 3)} dx &= \int \frac{x^4 x^3}{(x^4 + 2)(x^4 - 3)} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{(x^4 + 2)(x^4 - 3)} d(x^4). \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $t = x^4$. Тогда

$$\int \frac{x^7}{(x^4 + 2)(x^4 - 3)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{t}{(t+2)(t-3)} dt.$$

Корни знаменателя действительные и различные. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей, воспользовавшись первой строкой табл. 3.1:

$$\frac{t}{(t+2)(t-3)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-3} = \frac{A(t-3) + B(t+2)}{(t+2)(t-3)},$$

где A и B — некоторые действительные числа. Справедливо тождество $t \equiv A(t-3) + B(t+2)$ при $\forall t$. Подставляя в последнее тождество значения $t=3$ и $t=-2$, находим коэффициенты A и B . Положим $t=3$, тогда $3=5B$, т. е. $B=\frac{3}{5}$; положим $t=-2$, тогда $-2=-5A$, т. е. $A=\frac{2}{5}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^7}{(x^4+2)(x^4-3)} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{t}{(t+2)(t-3)} dt = \frac{1}{4} \int \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{t+2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{t-3} \right) dt = \\ &= \frac{1}{10} \ln|t+2| + \frac{3}{20} \ln|t-3| + C = \frac{1}{10} \ln(x^4+2) + \frac{3}{20} \ln|x^4-3| + C. \end{aligned}$$

Пример 3.4. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$.

Знаменатель имеет и действительные и комплексные корни кратности 1. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей, воспользовавшись первой и третьей строками табл. 3.1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} &\equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} \equiv \\ &\equiv \frac{A(x+1)(x^2+x+1) + Bx(x^2+x+1) + (Cx+D)x(x+1)}{x(x+1)(x^2+x+1)}, \end{aligned}$$

где A, B, C, D — некоторые действительные числа. Справедливо тождество $1 \equiv A(x+1)(x^2+x+1) + Bx(x^2+x+1) + (Cx+D)x(x+1)$ при $\forall x$.

Подставляя в последнее тождество значения $x=-1, x=0$ и приравнявая коэффициенты при x^3 и x^2 , получим коэффициенты A, B, C, D :

$$x = -1 : 1 = -B; \quad B = -1;$$

$$x = 0 : 1 = A;$$

$$x^3: 0 = A + B + C;$$

$$x^2: 0 = 2A + B + C + D.$$

Таким образом, $A = 1, B = -1, C = 0, D = -1$ и

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \\ &= \ln|x| - \ln|x+1| - \int \frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2 + 3/4} = \\ &= \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2(x+1/2)}{\sqrt{3}} + C = \\ &= \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Пример 3.5. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx.$

Задан интеграл от неправильной рациональной дроби. Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{x^3 + x + 1}{x^3 + x} = \frac{(x^3 + x) + 1}{x^3 + x} = 1 + \frac{1}{x^3 + x} = 1 + \frac{1}{x(x^2 + 1)}.$$

Разложим правильную рациональную дробь $\frac{1}{x(x^2 + 1)}$ на сумму простейших дробей, воспользовавшись первой и третьей строками табл. 3.1:

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \equiv \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 1)},$$

где A, B, C — некоторые действительные числа. Справедливо тождество $1 \equiv A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$ при $\forall x$. Коэффициенты A, B, C найдем, приравняв коэффициенты при x^2, x и x^0 :

$$x^2 : 0 = A + B;$$

$$x : 0 = C;$$

$$x^0 : 1 = A.$$

Таким образом, $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$ и $\frac{1}{x(x^2+1)} \equiv \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$. Итак,

имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x(x^2 + 1)} \right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= x + \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. \end{aligned}$$

Пример 3.6. $\int \frac{x^2 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx.$

Знаменатель имеет кратные комплексные корни. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей, воспользовавшись четвертой строкой табл. 3.1:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} &\equiv \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} \equiv \frac{(Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D}{(x^2 + 2)^2} \equiv \\ &\equiv \frac{Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D)}{(x^2 + 2)^2}, \end{aligned}$$

где A, B, C, D — некоторые действительные числа. Справедливо тождество $x^2 + x - 1 \equiv Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D)$ при $\forall x$. Коэффициенты A, B, C, D найдем, приравняв коэффициенты при x^3, x^2, x и x^0 :

$$x^3 : 0 = A;$$

$$x^2 : 1 = B;$$

$$x : 1 = 2A + C;$$

$$x^0 : -1 = 2B + D.$$

Таким образом, $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = -3$ и

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2 + 2} + \frac{x - 3}{(x^2 + 2)^2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \int \frac{x dx}{(x^2 + 2)^2} - 3 \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}.$$

В интеграле $\int \frac{x dx}{(x^2 + 2)^2}$ внесем x под знак дифференциала:

$x dx = \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} d(x^2 + 2)$, тогда

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 2)^2} = \int \frac{\frac{1}{2} d(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2} + C.$$

Второй интеграл обозначим через $I_2(x)$. Найдем $I_2(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$,

воспользовавшись рекуррентной формулой (2.2):

$$I_2(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{4} \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + 2} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Итак,

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{x^2 + 2} -$$

$$- \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2(x^2 + 2)} - \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{x^2 + 2} + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

3.1. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$ **3.2.** $\int \frac{4x^2 + 15x + 5}{(x-1)(x^2 + 5x + 6)} dx.$

3.3. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)} dx.$ **3.4.** $\int \frac{x}{x^3 - 1} dx.$ **3.5.** $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx.$

3.6. $\int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx.$ **3.7.** $\int \frac{5x^2 - 12}{(x^2 - 6x + 13)^2} dx.$ **3.8.** $\int \frac{dx}{1 + x^4}.$

Глава 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим несколько специальных видов интегралов от тригонометрических функций и рекомендуемые для них замены переменной (подстановки).

4.1. Интегралы вида $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$

Если n — четное положительное число, то интегралы можно упростить применением формул понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Если n — нечетное положительное число, то рекомендуется отделить от нечетной степени множитель (заданную функцию в первой степени) и эту отделенную функцию в первой степени ввести под знак дифференциала. Затем надо воспользоваться основным тригонометрическим тождеством, представив $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ или $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.

Примеры

Пример 4.1. $\int \sin^4 x dx$.

Поскольку степень синуса четная, то выделяем квадрат и применяем формулу понижения степени:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \frac{\sin 4x}{4} \right) + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C. \end{aligned}$$

Пример 4.2. $\int \sin^3 x dx$.

Так как степень синуса нечетная, то отделяем от нечетной степени $\sin x$ и вводим под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = \int \sin^2 x d(-\cos x) = \\ &= -\int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = -\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right) + C. \end{aligned}$$

Пример 4.3. $\int \cos^5 x dx$.

Отделяем от нечетной степени $\cos x$ и вводим под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cos x dx = \int \cos^4 x d(\sin x) = \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) = \\ &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C. \end{aligned}$$

Пример 4.4. $\int \cos^6 x dx$.

Выделяем квадрат и применяем формулу понижения степени:

$$\begin{aligned} \int \cos^6 x dx &= \int (\cos^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \left(x + \frac{3}{2}\sin 2x + 3 \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx + \int \cos^2 2x \cos 2x dx \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left(x + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}\sin 4x \right) + \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x) = \\ &= \frac{5}{16}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{16} \left(\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x \right) + C = \\ &= \frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

Замечание. Можно вывести рекуррентную формулу, позволяющую свести интеграл $I_n(x) = \int \sin^n x \, dx$ к интегралу с меньшим индексом

$$I_{n-2}(x) = \int \sin^{n-2} x \, dx, \quad n = 3, 4, \dots$$

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int \sin^n x \, dx = \int \sin^{n-2} x \sin^2 x \, dx = \int \sin^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx = \\ &= \int \sin^{n-2} x \, dx - \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = I_{n-2}(x) - \int \cos x \sin^{n-2} x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям. Полагая

$$u(x) = \cos x, \quad dv(x) = \sin^{n-2} x \cos x \, dx,$$

имеем

$$du(x) = -\sin x \, dx,$$

$$v(x) = \int \sin^{n-2} x \cos x \, dx = \int \sin^{n-2} x \, d \sin x = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \cos x \sin^{n-2} x \cos x \, dx &= \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{1}{n-1} \int \sin^n x \, dx = \\ &= \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{1}{n-1} I_n(x). \end{aligned}$$

Итак, $I_n(x) = I_{n-2}(x) - \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \cos x - \frac{1}{n-1} I_n(x)$. Выразив $I_n(x)$ из последнего неравенства, получим рекуррентную формулу:

$$I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x.$$

Таким образом,

$$\int \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x, \quad n = 3, 4, \dots$$

В частности,

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \frac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx - \frac{1}{4} \sin^3 x \cos x = \frac{3}{4} \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx - \frac{1}{4} \sin^3 x \cos x = \\ &= \frac{3}{8} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) - \frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + C. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить рекуррентную формулу для вычисления $\int \cos^n x \, dx$, $n = 3, 4, \dots$

4.2. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$

Если n и m — четные положительные числа, то интеграл можно упростить применением формул понижения степени.

Если одна из степеней n или m — нечетное положительное число, то рекомендуется отделить от нечетной степени множитель (заданную функцию в первой степени) и эту отделенную функцию в первой степени ввести под знак дифференциала.

Если обе степени n и m — нечетные положительные числа, то рекомендуется отделить множитель от меньшей нечетной степени.

Если сумма степеней $(n + m)$ — четное отрицательное число ($n + m = -2k, k = 1, 2, \dots$), то рекомендуется отделить множитель

$\frac{1}{\cos^2 x}$ или $\frac{1}{\sin^2 x}$ и этот множитель ввести под знак дифференци-

ала, а также воспользоваться тождеством $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ или

$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$:

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \cos^{-n-2k} x dx &= \int \frac{\sin^n x}{\cos^n x} \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^{k-1} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int (\operatorname{tg} x)^n (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} d(\operatorname{tg} x). \end{aligned}$$

Примеры

Пример 4.5. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Упростим интеграл, применив формулу понижения степени:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (\cos^3 2x - \cos^2 2x - \cos 2x + 1) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{8}x &= \frac{1}{16}\int(1 - \sin^2 2x)d(\sin 2x) - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \\
-\frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{8}x &= \frac{1}{16}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \\
-\frac{1}{16}\sin 2x + C &= -\frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + C.
\end{aligned}$$

Пример 4.6. $\int \sin^6 x \cos^3 x dx$.

Отделим от нечетной степени множитель и внесем его под знак дифференциала:

$$\begin{aligned}
\int \sin^6 x \cos^3 x dx &= \int \sin^6 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^6 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \\
&= \int (\sin^6 x - \sin^8 x) d(\sin x) = \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + C.
\end{aligned}$$

Пример 4.7. $\int \cos^9 x \cdot \sin^5 x dx$.

Отделим от меньшей нечетной степени множитель и внесем его под знак дифференциала:

$$\begin{aligned}
\int \cos^9 x \sin^5 x dx &= \int \cos^9 x \sin^4 x \sin x dx = \\
&= -\int \cos^9 x (\sin^2 x)^2 d(\cos x) = \\
&= -\int \cos^9 x (1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x) = \\
&= -\int (\cos^9 x - 2\cos^{11} x + \cos^{13} x) d(\cos x) = \\
&= -\frac{1}{10}\cos^{10} x + \frac{1}{6}\cos^{12} x - \frac{1}{14}\cos^{14} x + C.
\end{aligned}$$

Пример 4.8. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

Отделим от нечетной степени множитель и внесем его под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \sin x dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x) = \\ &= -\int (\cos^{-4} x - \cos^{-2} x) d(\cos x) = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C. \end{aligned}$$

Пример 4.9. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$.

В заданном интеграле сумма степеней – четное отрицательное число:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} &= \int \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^5 \cos^8 x} dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^5 x} \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^3 \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^5 x} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^3 d(\operatorname{tg} x) = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^5 x} (1 + 3\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^6 x) d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \int \left(\operatorname{tg}^{-5} x + 3\operatorname{tg}^{-3} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x \right) d(\operatorname{tg} x) = \\ &= -\frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x} - \frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x} + 3\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C. \end{aligned}$$

Пример 4.10. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx$.

В заданном интеграле сумма степеней – четное отрицательное число:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \operatorname{ctg}^2 x (1 + \operatorname{ctg}^2 x) d(\operatorname{ctg} x) = \\ &= -\int (\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x) d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C. \end{aligned}$$

4.3. Интегралы вида

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \int \sin \alpha x \sin \beta x dx, \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

В этих случаях применяются формулы:

$$\sin \varphi \cos \psi = \frac{1}{2} (\sin(\varphi + \psi) + \sin(\varphi - \psi));$$

$$\sin \varphi \sin \psi = \frac{1}{2}(\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi));$$

$$\cos \varphi \cos \psi = \frac{1}{2}(\cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi)).$$

Примеры

Пример 4.11. $\int \sin 2x \cos 8x dx$.

$$\begin{aligned} \int \sin 2x \cos 8x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 10x - \sin 6x) dx = \\ &= -\frac{1}{20} \cos 10x + \frac{1}{12} \cos 6x + C. \end{aligned}$$

Пример 4.12. $\int \cos(2x+1) \cos(4x-3) dx$.

$$\begin{aligned} \int \cos(2x+1) \cos(4x-3) dx &= \frac{1}{2} \int (\cos(2x-4) + \cos(6x-2)) dx = \\ &= \frac{1}{4} \sin(2x-4) + \frac{1}{12} \sin(6x-2) + C. \end{aligned}$$

4.4. Интегралы вида $\int \frac{1}{\cos^n x} dx$, $\int \frac{1}{\sin^n x} dx$

Если n — четное положительное число, то рекомендуется отделить множитель $\frac{1}{\cos^2 x}$ или $\frac{1}{\sin^2 x}$ соответственно и этот множитель ввести под знак дифференциала. Далее надо воспользоваться тождеством $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ или $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ соответственно.

Замечание. Можно вывести рекуррентную формулу, позволяющую свести интеграл $I_n(x) = \int \frac{1}{\cos^n x} dx$, $n = 3, 4, \dots$ к интегралу с меньшим индексом $I_{n-2}(x) = \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} dx$:

$$\begin{aligned}
 I_n(x) &= \int \frac{1}{\cos^n x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^n x} dx = \\
 &= \int \sin x \frac{\sin x}{\cos^n x} dx + \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} dx.
 \end{aligned}$$

Первый из получившихся интегралов проинтегрируем по частям.

Полагая $u(x) = \sin x$, $dv(x) = \frac{\sin x}{\cos^n x} dx$, имеем

$$du(x) = \cos x dx,$$

$$v(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^n x} dx = -\int (\cos^{-n} x) d(\cos x) = -\frac{\cos^{-n+1} x}{-n+1} = \frac{1}{n-1} \frac{1}{\cos^{n-1} x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \int \sin x \frac{\sin x}{\cos^n x} dx &= \frac{1}{n-1} \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x}{\cos^{n-1} x} dx = \\
 &= \frac{1}{n-1} \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} I_{n-2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 I_n(x) &= \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} I_{n-2}(x) + I_{n-2}(x) = \\
 &= \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}(x).
 \end{aligned}$$

Получена рекуррентная формула

$$\int \frac{1}{\cos^n x} dx = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} dx, \quad n = 3, 4, \dots \quad (4.1)$$

Аналогично получается рекуррентная формула для вычисления

$$\int \frac{1}{\sin^n x} dx:$$

$$\int \frac{1}{\sin^n x} dx = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\sin^{n-2} x} dx, \quad n = 3, 4, \dots \quad (4.2)$$

Рекуррентными формулами (4.1) и (4.2) удобно пользоваться соответственно для вычисления интегралов $\int \frac{1}{\cos^n x} dx$ и $\int \frac{1}{\sin^n x} dx$ при нечетных положительных значениях n .

Примеры

Пример 4.13. $\int \frac{1}{\cos^6 x} dx.$

Преобразуя исходный интеграл, получаем

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^6 x} dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \int (1 + 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x) d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C.\end{aligned}$$

Пример 4.14. $\int \frac{1}{\sin^8 x} dx.$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^8 x} dx &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)^3 \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^3 d(\operatorname{ctg} x) = \\ &= -\int (1 + 3\operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{ctg}^6 x) d(\operatorname{ctg} x) = \\ &= -\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x - \frac{3}{5} \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + C.\end{aligned}$$

Пример 4.15. $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx.$

Найдем этот интеграл, воспользовавшись рекуррентной формулой (4.1):

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Пример 4.16. $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx.$

Этот интеграл вычислим с помощью рекуррентной формулы (4.2):

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin x} dx = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Замечание. Интегралы вида $\int \frac{1}{\sin^n x} dx$, $n = 3, 4, \dots$ можно найти, применив тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Например,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{2/(1+t^2)}{(2t/(1+t^2))^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t \right) dt = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2t^2} + 2 \ln |t| + \frac{t^2}{2} \right) + C = -\frac{1}{8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C = \\ &= -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

4.5. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Здесь $R(\sin x, \cos x)$ — рациональная функция от двух аргументов.

1. Для нахождения интегралов этого вида применяют **универсальную тригонометрическую подстановку** $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Тогда, если

$\frac{x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, то

$$\begin{aligned} x &= 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \\ \sin x &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

2. Интегралы вида $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$ можно упростить, применив подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Тогда, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Учитывая, что $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, получаем

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

3. Если выполнено равенство $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то рекомендуется применить подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Тогда, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Учитывая, что

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

и что знак $\sin x$ и t совпадает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, получим

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

4. Если выполнено равенство $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рекомендуется применить подстановку $\cos x = t$. Тогда, если $x \in [0, \pi]$, то

$$x = \arccos t, \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}.$$

5. Если выполнено равенство $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рекомендуется применить подстановку $\sin x = t$. Тогда, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$x = \operatorname{arcsin} t, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}.$$

Примеры

Пример 4.17. $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$.

Применим универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x} &= \int \frac{2/(1+t^2)}{8 - 4 \frac{2t}{1+t^2} + 7 \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \\ &= \int \frac{2dt}{8(1+t^2) - 8t + 7(1-t^2)} = \int \frac{2dt}{t^2 - 8t + 15} = 2 \int \frac{d(t-4)}{(t-4)^2 - 1} = \\ &= \ln \left| \frac{(t-4)-1}{(t-4)+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 4.18. $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}$.

Способ 1. Задан интеграл вида $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$. Применим подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3 \frac{t^2}{1+t^2} + 5 \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3t^2 + 5} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 5/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}} \right) + C. \end{aligned}$$

Способ 2. Разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 x$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x} &= \int \frac{1/\cos^2 x}{3 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 5} dx = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{3 \operatorname{tg}^2 x + 5} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 5/3} = \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x \sqrt{3}}{\sqrt{5}} \right) + C. \end{aligned}$$

Пример 4.19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}$.

Способ 1. Выполнено равенство $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, поэтому применим подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x} &= \int \frac{dt/(1+t^2)}{\frac{t^2}{1+t^2} - 4 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + 5 \frac{1}{1+t^2}} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 5} = \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(t-2) + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 2) + C. \end{aligned}$$

Способ 2. Разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 x$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x} &= \int \frac{(1/\cos^2 x) dx}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 4 \frac{\sin x}{\cos x} + 5} = \\ &= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 5} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x - 2)}{(\operatorname{tg} x - 2)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 2) + C. \end{aligned}$$

Пример 4.20. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx$.

Выполнено равенство $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, поэтому применим подстановку $\cos x = t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx &= -\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^4}{t^2-1} dt = \int \frac{(t^4-1)+1}{t^2-1} dt = \\ &= \int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = \frac{1}{3} t^3 + t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \\ &= \frac{1}{3} \cos^3 x + \cos x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) + C. \end{aligned}$$

4.6. Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$, $\int R(\operatorname{ctg} x) dx$

Положим $t = \operatorname{tg} x$, $t = \operatorname{ctg} x$ соответственно. Тогда $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$,

$dx = -\frac{1}{1+t^2} dt$ соответственно.

Примеры

Пример 4.21. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

Способ 1. Применим подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Тогда

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \int t^5 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Разделив t^5 на $t^2 + 1$ столбиком, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{t^5}{t^2+1} dt &= \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \\ &= \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C. \end{aligned}$$

Способ 2. Отделим от $\operatorname{tg}^5 x$ множитель $\operatorname{tg}^2 x$, воспользуемся формулой $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ и $\frac{1}{\cos^2 x}$ внесем под знак дифференциала. Тогда

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^5 x dx &= \int \operatorname{tg}^3 x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^3 x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg}^3 x dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \int \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \operatorname{tg} x dx = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C. \end{aligned}$$

Пример 4.22. $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx$.

Применим подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Тогда

$$\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{1 + t}{(1-t)(1+t^2)} dt.$$

Разложим правильную рациональную дробь $\frac{1+t}{(1-t)(1+t^2)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{1+t}{(1-t)(1+t^2)} \equiv \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \equiv \frac{A(t^2+1) + (Bt+C)(1-t)}{(1-t)(1+t^2)},$$

где A, B, C — некоторые действительные числа. Справедливо тождество $1+t \equiv A(t^2+1) + (Bt+C)(1-t)$ при $\forall t$. Подставляя в последнее тождество значения $t=1$, $t=0$ и приравнявая коэффициенты при t^2 , получаем коэффициенты A, B, C :

$$\begin{aligned} t=1: 2 &= 2A \Rightarrow A=1; \\ t=0: 1 &= A+C \Rightarrow C=0; \\ t^2: 0 &= A-B \Rightarrow B=1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{1+t}{(1-t)(1+t^2)} dt &= \int \frac{1}{1-t} dt + \int \frac{t}{t^2+1} dt = \\ &= -\int \frac{1}{t-1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} d(t^2+1) = -\ln|t-1| + \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx &= -\ln|\operatorname{tg} x - 1| + \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C = \\ &= -\ln \left| \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \right| + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) + C = \end{aligned}$$

$$= -\ln|\sin x - \cos x| + \ln|\cos x| - \ln|\cos x| + C = -\ln|\sin x - \cos x| + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

4.1. $\int \sin^6 x dx$. 4.2. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx$. 4.3. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$.

4.4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$. 4.5. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx$. 4.6. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$.

4.7. $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$. 4.8. $\int \frac{dx}{4 - 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x}$. 4.9. $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$.

4.10. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$. 4.11. $\int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x}$. 4.12. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$. 4.13. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$.

4.14. $\int \frac{dx}{(2 - \sin x)(3 - \sin x)}$. 4.15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}$.

Глава 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

Примеры

Пример 5.1. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{12}} dx.$

Положим $t = x - 1$. В этом случае $x = t + 1$, $dx = dt$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)^{12}} dx &= \int \frac{(t+1)^3}{t^{12}} dt = \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^{12}} dt = \\ &= \int (t^{-9} + 3t^{-10} + 3t^{-11} + t^{-12}) dt = -\frac{1}{8}t^{-8} - \frac{3}{9}t^{-9} - \frac{3}{10}t^{-10} - \frac{1}{11}t^{-11} + C = \\ &= -\frac{1}{8(x-1)^8} - \frac{1}{3(x-1)^9} - \frac{3}{10(x-1)^{10}} - \frac{1}{11(x-1)^{11}} + C. \end{aligned}$$

Пример 5.2. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx.$

Проведем преобразования:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \int (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x) d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x + C. \end{aligned}$$

Пример 5.3. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2 - \sin^4 x}} dx.$

Преобразуем $\sin x \cos x dx = \sin x d(\sin x) = \frac{1}{2} d(\sin^2 x)$. Тогда

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2 - \sin^4 x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{2 - (\sin^2 x)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Пример 5.4. $\int \frac{x}{x - \sqrt{x^2 - 1}} dx.$

Умножим числитель и знаменатель на $(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x - \sqrt{x^2 - 1}} dx &= \int \frac{x(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})} dx = \\ &= \int (x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \int (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} d(x^2 - 1) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Пример 5.5. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$

Проинтегрируем заданный интеграл по частям. Полагая

$$u(x) = \arcsin x, \quad dv(x) = \frac{1}{x^2} dx, \quad \text{имеем } du(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad v(x) =$$

$$= \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}. \text{ Тогда}$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

В интеграле $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ положим $t = \frac{1}{x}$. Тогда

$$x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt, \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{|t|} = \operatorname{sgn} t \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}.$$

Заметим, что $\operatorname{sgn} t = \operatorname{sgn} x$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} &= \operatorname{sgn} t \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}} = -\operatorname{sgn} t \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \\ &= -\operatorname{sgn} t \ln |t + \sqrt{t^2-1}| + C = -\operatorname{sgn} x \cdot \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right| + C = \\ &= -\operatorname{sgn} x \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} \right| + C. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx &= -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \\ &= -\frac{\arcsin x}{x} - \operatorname{sgn} x \ln \left| \frac{1 + \operatorname{sgn} x \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C.\end{aligned}$$

Пример 5.6. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx.$

Проинтегрируем заданный интеграл по частям. Полагая $u(x) = \operatorname{arctg} x$, $dv(x) = \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$, имеем

$$\begin{aligned}du(x) &= \frac{1}{1+x^2} dx, \quad v(x) = \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \\ &= \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x.\end{aligned}$$

Тогда

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx = \operatorname{arctg} x \left(-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x \right) + \int \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Найдем последний интеграл:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx + \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx &= \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x(1+x^2)} dx + \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C.\end{aligned}$$

Итак,

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Пример 5.7. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x}$.

Положим $t = e^x$. Тогда

$$x = \ln t, \quad dx = \frac{1}{t} dt, \quad \int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} = \int \frac{\frac{1}{t} dt}{t^2 - 2t} = \int \frac{dt}{t^2(t-2)}.$$

Разложим правильную рациональную дробь $\frac{1}{t^2(t-2)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{t^2(t-2)} \equiv \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-2} \equiv \frac{At(t-2) + B(t-2) + Ct^2}{t^2(t-2)},$$

где A, B, C — некоторые действительные числа. Справедливо тождество $1 \equiv At(t-2) + B(t-2) + Ct^2$ при $\forall t$. Подставляя в последнее тождество значения $t=2, t=0$ и приравнявая коэффициенты при t^2 , получаем коэффициенты A, B, C :

$$t=2: 1=4C \Rightarrow C=\frac{1}{4};$$

$$t=0: 1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2};$$

$$t^2: 0=A+C \Rightarrow A=-\frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2(t-2)} &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2} dt + \frac{1}{4} \int \frac{1}{t-2} dt = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|t| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{4} \ln|t-2| + C. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} &= -\frac{1}{4} \ln e^x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^x} + \frac{1}{4} \ln|e^x - 2| + C = \\ &= -\frac{1}{4} x + \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{4} \ln|e^x - 2| + C. \end{aligned}$$

Пример 5.8. $\int e^{2x} \sin^2 x dx$.

Применим формулу понижения степени:

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \sin^2 x dx &= \int e^{2x} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{4} \int e^{2x} \cos 2x d(2x).\end{aligned}$$

В последнем интеграле сделаем замену $2x = t$. Тогда

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \cos 2x d(2x) &= \int e^t \cos t dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t) + C = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} (\sin 2x + \cos 2x) + C\end{aligned}$$

(см. пример 2.6). Итак,

$$\int e^{2x} \sin^2 x dx = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{8} e^{2x} (\sin 2x + \cos 2x) + C.$$

Пример 5.9. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx$.

Способ 1:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 d(\operatorname{tg} x) = \int \frac{1 + 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x} d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \int \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 2 + \operatorname{tg}^2 x \right) d(\operatorname{tg} x) = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2 \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.\end{aligned}$$

Способ 2. Представим числитель в виде $\sin^2 x + \cos^2 x$ и разделим почленно числитель на знаменатель:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^4 x} dx = \\ &= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^4 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^4 x} \right) dx =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{\cos^4 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx + 4 \int \frac{1}{\sin^2 2x} dx = \\
&= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) - 2 \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{ctg} 2x + C.
\end{aligned}$$

Пример 5.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}$.

Положим $x = t^{12}$ ($12 = \text{НОК}(2, 3, 4)$). Тогда

$$\sqrt{x} = t^6, \sqrt[3]{x} = t^4, \sqrt[4]{x} = t^3, dx = 12t^{11} dt, t = \sqrt[12]{x}$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}} = \int \frac{12t^{11} dt}{t^6 + t^4 + 2t^3} = 12 \int \frac{t^8}{t^3 + t + 2} dt.$$

Последний интеграл является интегралом от неправильной рациональной дроби. Разделив числитель на знаменатель столбиком, получим

$$\begin{aligned}
12 \int \frac{t^8}{t^3 + t + 2} dt &= 12 \int \left(t^5 - t^3 - 2t^2 + t + 4 + \frac{3t^2 - 6t - 8}{t^3 + t + 2} \right) dt = \\
&= 12 \left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} - \frac{2}{3} t^3 + \frac{t^2}{2} + 4t \right) + 12 \int \frac{3t^2 - 6t - 8}{t^3 + t + 2} dt.
\end{aligned}$$

Разложим правильную рациональную дробь $\frac{3t^2 - 6t - 8}{t^3 + t + 2}$ на сумму простейших дробей. Учитывая, что

$$\begin{aligned}
t^3 + t + 2 &= (t^3 + 1) + (t + 1) = (t + 1)(t^2 - t + 1) + (t + 1) = \\
&= (t + 1)(t^2 - t + 2),
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
\frac{3t^2 - 6t - 8}{t^3 + t + 2} &= \frac{3t^2 - 6t - 8}{(t + 1)(t^2 - t + 2)} \equiv \frac{A}{t + 1} + \frac{Bt + C}{t^2 - t + 2} \equiv \\
&\equiv \frac{A(t^2 - t + 2) + (Bt + C)(t + 1)}{(t + 1)(t^2 - t + 2)},
\end{aligned}$$

где A, B, C — некоторые действительные числа. Справедливо тождество $3t^2 - 6t - 8 \equiv A(t^2 - t + 2) + (Bt + C)(t + 1)$ при $\forall t$. Подставляя в последнее тождество значения $t = -1, t = 0$ и приравнивая коэффициенты при t^2 , получаем коэффициенты A, B, C :

$$t = -1: 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4};$$

$$t = 0: -8 = 2A + C \Rightarrow C = -\frac{17}{2};$$

$$t^2: 3 = A + B \Rightarrow B = \frac{11}{4}.$$

Итак,

$$\int \frac{3t^2 - 6t - 8}{t^3 + t + 2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{t+1} dt + \int \frac{\frac{11}{4}t - \frac{17}{2}}{t^2 - t + 2} dt = \frac{1}{4} \ln|t+1| + \int \frac{\frac{11}{4}t - \frac{17}{2}}{t^2 - t + 2} dt.$$

Последний интеграл является интегралом от функции, содержащей квадратный трехчлен. Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена: $t^2 - t + 2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 7/4$ и выполним замену $t - \frac{1}{2} = \alpha$. Тогда

$$t = \alpha + \frac{1}{2}, \quad dt = d\alpha$$

и

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{11}{4}t - \frac{17}{2}}{t^2 - t + 2} dt &= \int \frac{\frac{11}{4}\alpha - \frac{57}{8}}{\alpha^2 + 7/4} d\alpha = \frac{11}{4} \int \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2 + 7/4} - \frac{57}{8} \int \frac{d\alpha}{\alpha^2 + 7/4} = \\ &= \frac{11}{8} \int \frac{d(\alpha^2 + 7/4)}{\alpha^2 + 7/4} - \frac{57}{8} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\alpha}{\sqrt{7}} = \\ &= \frac{11}{8} \ln(\alpha^2 + 7/4) - \frac{57}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\alpha}{\sqrt{7}} + C = \\ &= \frac{11}{8} \ln(t^2 - t + 2) - \frac{57}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}\sqrt[3]{x+2}\sqrt[4]{x}} &= 12 \int \frac{t^8}{t^3+t+2} dt = \\ &= 12 \left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^2}{2} + 4t + \frac{1}{4} \ln|t+1| + \frac{11}{8} \ln(t^2-t+2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{57}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{7}} \right) + C = 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 8x^{\frac{1}{4}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 48x^{\frac{1}{12}} + \\ &\quad + 3 \ln(x^{\frac{1}{12}} + 1) + \frac{33}{2} \ln(x^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{1}{12}} + 2) - \frac{171}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x^{\frac{1}{12}} - 1}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

Пример 5.11. $\int \cos \sqrt{x} dx$.

Выполним замену переменной $t = \sqrt{x}$. Тогда $x = t^2$, $dx = 2t dt$ и $\int \cos \sqrt{x} dx = 2 \int t \cos t dt$. Проинтегрируем полученный интеграл по частям. Полагая $u(t) = t$, $dv(t) = \cos t dt$, имеем $du(t) = dt$, $v(t) = \int \cos t dt = \sin t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \cos \sqrt{x} dx &= 2 \int t \cos t dt = 2 \left(t \sin t - \int \sin t dt \right) = 2t \sin t + 2 \cos t + C = \\ &= 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Пример 5.12. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx$.

Положим $x = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{arctg} x, \quad dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt, \\ \sqrt{1+x^2} &= \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{|\cos t|} = \frac{1}{\cos t}; \\ \int \frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{\operatorname{tg} t + 1}{\left(\frac{1}{\cos^3 t}\right) \cos^2 t} dt = \\ &= \int (\operatorname{tg} t + 1) \cos t dt = \int (\sin t + \cos t) dt = -\cos t + \sin t + C. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin t = \operatorname{tg} t \cos t = x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, получим

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

5.1. $\int \frac{\arcsin x + 3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 5.2. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}}$. 5.3. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

5.4. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$. 5.5. $\int x \ln(4+x^4) dx$. 5.6. $\int \operatorname{sh}^3 x dx$. 5.7. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} dx$.

5.8. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} dx$. 5.9. $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$. 5.10. $\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

5.11. $\int \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{1+\sin^2 x}} dx$. 5.12. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+9}}$. 5.13. $\int \frac{x^3 dx}{x^4-x^2+2}$.

5.14. $\int x^2 \ln \sqrt{1-x} dx$. 5.15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$. 5.16. $\int \sin^2 3x \cos 5x dx$.

5.17. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$. 5.18. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$. 5.19. $\int x\sqrt{4-2x-x^2} dx$.

5.20. $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$. 5.21. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x} dx$. 5.22. $\int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$.

5.23. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$. 5.24. $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x}$.

**ОТВЕТЫ К ПРИМЕРАМ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

Глава 1, подразд. 1.1

1.1. $\frac{-3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + C$. **1.2.** $2x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2} + C$.

1.3. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + C$. **1.4.** $-x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$. **1.5.** $\frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C$.

1.6. $-\frac{2}{3\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2}e^{2x} + \ln|x| + C$. **1.7.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{4}{5}}\right) + C$.

1.8. $\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C$. **1.9.** $-2\operatorname{ctg} 2x + C$. **1.10.** $\frac{-2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5 \cdot 2^x \ln 2} + C$.

1.11. $\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + C$. **1.12.** $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$.

1.13. $\frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}\right) + C$.

Глава 1, подразд. 1.2

1.14. $\frac{-2}{15}\sqrt[4]{(2-3x^2)^5} + C$. **1.15.** $\frac{2}{\ln 5}5^{\sqrt{x}} + C$. **1.16.** $\frac{-1}{15(x^5+1)^3} + C$.

1.17. $\frac{1}{2}\arcsin x^2 + C$. **1.18.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\ln x + \sqrt{2}}{\sqrt{3}\ln x - \sqrt{2}}\right| + C$.

1.19. $\frac{-2^{7-4x}}{4\ln 2} + C$. **1.20.** $\frac{1}{5-e^x} + C$. **1.21.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$.

1.22. $\frac{4}{\sqrt{7}}\ln\left(\frac{\sqrt{7}+2\sin x}{\sqrt{7}-2\sin x}\right) + C$. **1.23.** $-2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3} + C$.

1.24. $\frac{-1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$. **1.25.** $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C$. **1.26.** $x + \ln(1+x^2) + C$.

1.27. $2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C$. **1.28.** $\ln|\ln(\ln x)| + C$. **1.29.** $\frac{-4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x} + C$.

1.30. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right) + C$. **1.31.** $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2-4} - \frac{1}{3}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - \frac{4}{9}}\right| + C$.

$$1.32. \frac{-1}{2} \ln|1 - \ln^2 x| + C. \quad 1.33. \frac{1}{3} (\operatorname{tg}(x^3 - 3) - x^3) + C.$$

$$1.34. \frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x| + C. \quad 1.35. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) + C.$$

Глава 1, подразд. 1.3

$$1.36. -\frac{1}{8} \left(\frac{1}{97(2x-1)^{97}} + \frac{1}{49(2x-1)^{98}} + \frac{1}{99(2x-1)^{99}} \right) + C.$$

$$1.37. 2(\sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})) + C.$$

$$1.38. x + \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C.$$

$$1.39. \frac{4}{7} \sqrt[4]{(1+e^x)^7} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{(1+e^x)^3} + C. \quad 1.40. (\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2 + C.$$

$$1.41. \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$1.42. \frac{3}{14} \sqrt[3]{(x^2+1)^7} - \frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C. \quad 1.43. -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3} + C.$$

$$1.44. \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C. \quad 1.45. \frac{1}{9} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C.$$

Глава 2, подразд. 2.1

$$2.1. -2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C. \quad 2.2. x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$$

$$2.3. -\frac{1}{2} (x^2 + 3x) \cos 2x + \frac{1}{4} (2x + 3) \sin 2x + \frac{3}{4} \cos 2x + C.$$

$$2.4. -\frac{e^{-2x}}{5} (2 \sin x + \cos x) + C.$$

$$2.5. -\frac{1}{3} (2-3x) \arcsin(2-3x) - \frac{1}{3} \sqrt{-9x^2 + 12x - 3} + C.$$

- 2.6. $-x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C$. 2.7. $\frac{1}{10}x(\cos(3\ln x) + 3\sin(3\ln x)) + C$.
- 2.8. $-\frac{2^{-x}}{\ln^3 2}((x^2 - 2x)\ln^2 2 + (2x - 2)\ln 2 + 2) + C$.
- 2.9. $(3\sqrt[3]{x^2} - 6)\sin\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x} + C$.
- 2.10. $\frac{1}{10e^x}(\cos 2x - 2\sin 2x - 5) + C$.
- 2.11. $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$.
- 2.12. $-\operatorname{ctg} x \ln(\sin x) - \operatorname{ctg} x - x + C$. 2.13. $\frac{1}{3}(x^3 - 1)e^{x^3} + C$.

Глава 2, подразд. 2.3

- 2.14. $3\sqrt{x^2 + 4x - 1} - 11\ln|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x - 1}| + C$.
- 2.15. $-\frac{3}{2}\ln(x^2 + 6x + 10) + 13\operatorname{arctg}(x + 3) + C$.
- 2.16. $-\sqrt{-\ln^2 x - 6\ln x + 1} - 3\arcsin\left(\frac{\ln x + 3}{\sqrt{10}}\right) + C$.
- 2.17. $\ln(\sin^2 x + 8\sin x + 15) - 4\ln\left(\frac{\sin x + 3}{\sin x + 5}\right) + C$.
- 2.18. $\frac{1}{2}\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3} - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 2x^2 + 3}) + C$.
- 2.19. $\frac{1}{2}(x - 1)\sqrt{-x^2 + 2x + 4} + \frac{5}{2}\arcsin\frac{x - 1}{\sqrt{5}} + C$.
- 2.20. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2 + 6x + 10)^3} - \frac{3}{2}(x + 3)\sqrt{x^2 + 6x + 10} -$
 $-\frac{3}{2}\ln|x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 10}| + C$.
- 2.21. $\frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}(x + 1) + C$.

Глава 3

$$3.1. \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln|x| + 5 \ln|x-2| - 3 \ln|x+2| + C.$$

$$3.2. 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| - \ln|x+3| + C.$$

$$3.3. \frac{3}{2(x-2)^2} + \ln|x-5| + C.$$

$$3.4. \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$3.5. -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln|x-3| + C.$$

$$3.6. \frac{3}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) - \ln|x-1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$$

$$3.7. \frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + \frac{53}{16} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C.$$

$$3.8. \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} (\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1)) + C.$$

Глава 4

$$4.1. \frac{5}{16}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

$$4.2. -\frac{1}{3} \cos^6 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cos^8 \frac{x}{2} + C. \quad 4.3. -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \ln|\sin x| + C.$$

$$4.4. \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

$$4.5. -\frac{3}{16} \sqrt[3]{\cos^{16} x} + \frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^{10} x} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{\cos^4 x} + C.$$

$$4.6. \frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + C.$$

$$4.7. \frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C. \quad 4.8. \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg} x) + C.$$

$$4.9. \frac{1}{6} \ln(1 - \cos x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) + \frac{1}{3} \ln(2 + \cos x) + C.$$

$$4.10. \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} \right) + C.$$

$$4.11. -\frac{3}{25} \ln |\operatorname{tg} x + 2| + \frac{2}{5(\operatorname{tg} x + 2)} - \frac{3}{25} \ln |\cos x| + \frac{4}{25} x + C.$$

$$4.12. \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \quad 4.13. \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

$$4.14. \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{2\sqrt{2}} + C.$$

$$4.15. \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} x + 1) + C.$$

Глава 5

$$5.1. \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 - 3\sqrt{1-x^2} + C. \quad 5.2. -\frac{4}{\sqrt[4]{x+1}} + \frac{2}{(\sqrt[4]{x+1})^2} + C.$$

$$5.3. \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + C. \quad 5.4. \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

$$5.5. \frac{1}{2} x^2 \ln(4+x^4) - x^2 + 2 \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + C. \quad 5.6. \frac{1}{3} \operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x + C.$$

$$5.7. -\ln |\operatorname{tg} x - 1| - \ln |\cos x| + C. \quad 5.8. \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{x}{2} \right) \sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right| + C.$$

$$5.9. x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$5.10. \frac{1}{25} \ln |x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50} \ln(x^2+2x+2) - \frac{7}{25} \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

$$5.11. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - \cos^2 x}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \cos^2 x}} \right) + C.$$

- 5.12. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9} - \frac{9}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+9}) + C.$
- 5.13. $\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2) + \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}\right) + C.$
- 5.14. $\frac{1}{6}x^3\ln(1-x) - \frac{1}{6}\ln(1-x) - \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{6}x + C.$
- 5.15. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{\sin x} + C.$
- 5.16. $\frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{44}\sin 11x - \frac{1}{4}\sin x + C.$
- 5.17. $\frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \frac{1}{216}\frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{36}\frac{x}{(x^2+9)^2} + C.$
- 5.18. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}x-\sqrt{1+x^2}}\right| + C.$
- 5.19. $-\frac{1}{3}(4-2x-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{4-2x-x^2} - \frac{5}{2}\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{5}} + C.$
- 5.20. $2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2} + C.$
- 5.21. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + C.$
- 5.22. $\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{31}{8}\ln|x-1| - \frac{9}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{8}\ln|x+1| + C.$
- 5.23. $\frac{1}{3}\ln|e^x-1| + \frac{1}{6}\ln(e^x+2) - \frac{1}{2}x + C.$
- 5.24. $-\frac{1}{8}\ln(1-\cos x) + \frac{1}{4(1-\cos x)} + \frac{1}{8}\ln(1+\cos x) + C.$

ЛИТЕРАТУРА

Зарубин В. С., Иванова Е. Е., Кувыркин Г. Н. Интегральное исчисление функций одного переменного: учебник для вузов / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. 3-е изд., исправл. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 528 с. (Серия «Математика в техническом университете»; вып. VI).

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ; Астрель. 2007. 558 с.

Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / под ред. Б. П. Демидовича. М.: АСТ; Астрель, 2007. 495 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Непосредственное интегрирование и интегрирование путем замены переменной	3
1.1. Понятие неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Простейшие правила и приемы интегрирования	3
Примеры для самостоятельного решения	11
1.2. Интегрирование методом подведения под знак дифференциала	11
Примеры для самостоятельного решения	20
1.3. Замена переменной в неопределенном интеграле. Некоторые специальные подстановки для интегрирования отдельных классов функций	21
Примеры для самостоятельного решения	34
Глава 2. Интегрирование по частям. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен	35
2.1. Интегрирование по частям	35
Примеры для самостоятельного решения	41
2.2. Интегралы вида $\int \sqrt{x^2 + A} dx$, $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + A}} dx$, $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$, $\int \frac{dx}{(x^2 + A)^n}$	41
2.3. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен	45
Примеры для самостоятельного решения	50
Глава 3. Интегрирование рациональных дробей	51
Примеры для самостоятельного решения	58
Глава 4. Интегрирование тригонометрических функций	59
4.1. Интегралы вида $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$	59
4.2. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$	62

4.3. Интегралы вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$	64
4.4. Интегралы вида $\int \frac{1}{\cos^n x} dx$, $\int \frac{1}{\sin^n x} dx$	65
4.5. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$	68
4.6. Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$, $\int R(\operatorname{ctg} x) dx$	71
Примеры для самостоятельного решения	74
Глава 5. Интегрирование разных функций	75
Примеры для самостоятельного решения	83
Ответы к примерам для самостоятельного решения.....	84
Литература.....	90

Учебное издание

Павельева Елена Борисовна

**НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ**

Редактор *А.В. Звягин*

Корректор *Е.К. Кошелева*

Компьютерная верстка *О.В. Беляевой*

Подписано в печать 10.07.2014. Формат 60 × 84/16.

Усл. печ. л. 5,35. Изд. № 1. Тираж 500 экз.

Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

e-mail: press@bmstu.ru <http://www.baumanpress.ru>

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

e-mail: baumanprint@gmail.com