Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана

А.В. Копаев, Г.Е. Маркелов, А.А. Тесалина

# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

*Методические указания к выполнению домашнего задания*



Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2002

УДК 517
ББК 22.161
К65

Рецензент *А.Н. Канатников*

**Копаев А.В., Маркелов Г.Е., Тесалина А.А.**
К65 Определенный интеграл: Метод. указания к выполнению домашнего задания. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. — 70 с., ил.

ISBN 5-7038-1984-9

Рассмотрены основные понятия, свойства определенного интеграла и методы его вычисления. Приведены необходимые формулы для вычисления определенного интеграла, указания к их применению, а также примеры использования этих формул.

Для студентов первых курсов технических вузов.

Ил. 29.

**УДК 517**
**ББК 22.161**

**ISBN 5-7038-1984-9**



# 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

К понятию определенного интеграла приводит рассмотрение многих задач из различных областей науки и техники. Здесь изложены теоретические сведения, включающие основные понятия, свойства определенных интегралов и методы их вычисления.

## 1.1. Основные понятия

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим для этого отрезка произвольную совокупность точек $x_i$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, таких, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Они осуществляют разбиение отрезка $[a, b]$ на $n$ элементарных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Число

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right), \quad x_{k-1} \le \xi_k \le x_k, \qquad (1)$$

называют интегральной суммой относительно данного разбиения, где $\xi_k$ выбирается на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольно.

Если функция $f(x)$ является непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a, b]$, то каждое слагаемое интегральной суммы $s_n$ равно площади прямоугольника с основанием длиной $(x_k - x_{k-1})$ и высотой $f(\xi_k)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Сумма $s_n$ равна площади ступенчатой фигуры, полученной объединением прямоугольников (рис. 1).

Функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, если существует число $J$, для которого при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при любом разбиении, для которого

$$\max_{1\le k\le n}\left(x_k - x_{k-1}\right) < \delta,$$

выполняется неравенство $|s_n - J| < \varepsilon$ независимо ни от способа разбиения на элементарные отрезки, ни от выбора точек $\xi_k$ на этих отрезках. Число $J$ называют определенным интегралом функции $f(x)$ в пределах от $a$ до $b$ и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$, где $a$ и $b$ — нижний и верхний пределы интегрирования соответственно; $f(x)$ — подынтегральная функция; $x$ — переменная интегрирования.

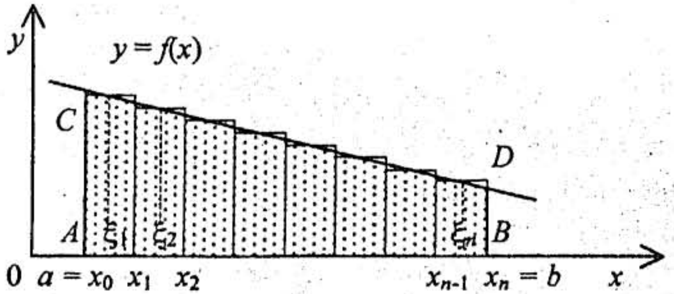


**Рис. 1**

Этому определению равносильно следующее. Пусть определенная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ такова, что существует конечный предел последовательности интегральных сумм $\{s_n\}$ при условии, что наибольшая из длин элементарных отрезков разбиения $\Delta$ стремится к нулю. Причем этот предел не зависит ни от способа разбиения на элементарные отрезки, ни от выбора точек $\xi_k$ на этих отрезках. Тогда функция $f(x)$ является интегрируемой на отрезке $[a, b]$, а сам предел интегрирования называют определенным интегралом от $a$ до $b$ функции $f(x)$, т.е.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0}\{s_n\}. \qquad (2)$$

Так, к функциям, интегрируемым на отрезке $[a, b]$, относятся:

1) функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$;
2) функции, монотонные и ограниченные на отрезке $[a, b]$.

Из определения определенного интеграла следует, что для неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, определенный интеграл является пределом последовательности площадей соответствующих ступенчатых фигур, равным площади криволинейной трапеции, которая ограничена графиком функции $f(x)$, осью $Ox$ и прямыми $x = a$, $x = b$. Например, интеграл от $a$ до $b$ функции $f(x)$, заданной графиком на рис. 1, равен площади криволинейной трапеции $S_{ACDB}$.

В общем случае определенный интеграл можно представить как алгебраическую сумму взятых с соответствующими знаками площадей фигур, ограниченных графиком функции $f(x)$, осью $Ox$ и прямыми $x = a$, $x = b$. Знак определяют в зависимости от расположения фигуры относительно оси $Ox$. Если фигура расположена выше или ниже оси, то соответственно выбирают знак плюс или минус. Например, определенный интеграл от функции $f(x)$, заданной графиком на рис. 2, вычисляется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_{ADC} + (-S_{CBF}),$$

где $S_{ADC}$ и $S_{CBF}$ — соответственно площади фигур $ADC$ и $CBF$ на рис. 2.

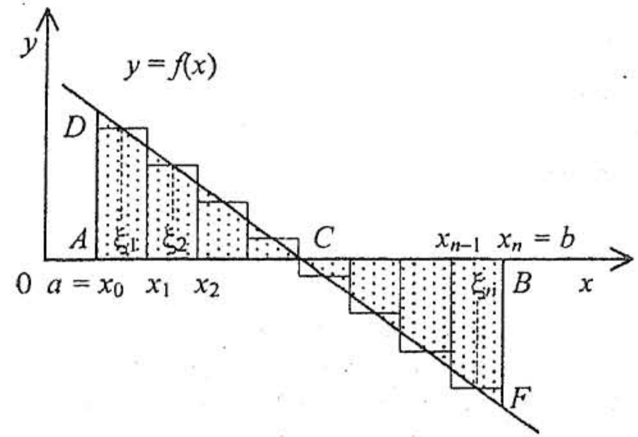


**Рис. 2**

## 1.2. Свойства определенных интегралов

При вычислении определенных интегралов наиболее часто используются следующие свойства.

1) Если существует $\int_a^b f(x)\,dx$, то существует

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$$

где $c$ — произвольная постоянная.

2) Если существуют $\int_a^b \psi(x)\,dx$ и $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, то существует

$$\int_a^b (\psi(x)+\varphi(x))\,dx = \int_a^b \psi(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$



3) Если существуют $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$, то существует

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4) Если существует $\int_a^b f(x)\,dx$, то существует

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

5) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и является четной функцией, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Если $f(x)$ является нечетной функцией, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

## 1.3. Методы интегрирования

***Вычисление определенных интегралов с помощью формулы Ньютона — Лейбница.*** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — одна из первообразных на этом отрезке, тогда справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Формула (3) называется формулой Ньютона — Лейбница.

**Пример 1.** Вычислить определенный интеграл $\int\limits_2^3 x^2 dx$.

◀ Первообразной функции $f(x) = x^2$ для любых значений $x$ является функция $F(x) = x^3/3$. Тогда, применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$\int\limits_2^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27-8}{3} = 6\frac{1}{3}. \text{ ▶}$$

***Интегрирование определенных интегралов по частям.*** Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на $[a, b]$ непрерывные производные, то

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,du(x). \qquad (4)$$

Уравнение (4) называется формулой интегрирования по частям для определенного интеграла. Эта формула используется в тех случаях, когда подынтегральное выражение можно представить в виде $u(x)\,dv(x)$ так, что интеграл в правой части (4) при надлежащем выборе $u(x)$ и $dv(x)$ становится проще исходного. Формула (4) может применяться неоднократно.

***Замечание.*** За $u(x)$ удобно принимать множитель, который упрощается при дифференцировании. Например, если под знаком интеграла стоит произведение многочлена и показательной или тригонометрической функции, то за $u(x)$ следует выбрать многочлен, а оставшееся выражение — за $dv(x)$. Если подынтегральная функция содержит сомножитель — логарифмическую или обратную тригонометрическую функции, — то его следует обозначить $u(x)$, так как в результате дифференцирования он упрощается.



**Пример 2.** Вычислить интеграл $\int\limits_1^e 2x\ln x\,dx$.

◀ Положим $u(x) = \ln(x)$ и $dv(x) = 2xdx = d(x^2)$, тогда $du(x) = \frac{1}{x}dx$ и $v(x) = x^2$. Применим формулу интегрирования по частям для заданного определенного интеграла:

$$\int\limits_1^e 2x\ln x\,dx = x^2\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x\,dx = e^2 - (e^2-1)/2 = (e^2+1)/2. \text{ ▶}$$

***Интегрирование подстановкой.*** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если функция $x = \varphi(t)$ имеет на отрезке $[t_1, t_2]$ непрерывную производную и $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt. \qquad (5)$$

Уравнение (5) называется формулой замены переменной в определенном интеграле, или формулой интегрирования подстановкой.

**Пример 3.** Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 xe^{x^2}dx$, используя формулу интегрирования подстановкой.

◀ Применим подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t) = \sqrt{t}$ и $1 \le x \le 2$, тогда $1 \le t \le 4$. Функция $\varphi(t) = \sqrt{t}$ имеет непрерывную производную на отрезке $[1, 4]$ и $\varphi(1) = \sqrt{1} = 1$, $\varphi(4) = \sqrt{4} = 2$. Тогда по формуле (5) получаем

$$\int\limits_1^2 xe^{x^2}dx = \int\limits_1^4 \sqrt{t}e^t \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 e^t dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_1^4 = (e^4 - e)/2. \text{ ▶}$$

*Замечание.* Равенство (5) можно использовать следующим образом. Так, если функция $z=\psi(t)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную и $\psi(a)=z_1$, $\psi(b)=z_2$, то

$$\int_a^b f(\psi(x))\,\psi'(x)dx=\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz. \qquad (6)$$

***Пример 4.*** Вычислить интеграл $\int_1^2 xe^{x^2}dx$, используя формулу (6).

◄ Функция $\psi(x)=x^2$ имеет непрерывную производную на отрезке $[1, 2]$ и $z_1=\psi(1)=1$, $z_2=\psi(2)=4$. Тогда по формуле (6) получаем

$$\int_1^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 e^{x^2}\left(x^2\right)'dx=\frac{1}{2}\int_1^4 e^z dz=\frac{1}{2}e^z\Big|_1^4=(e^4-e)/2. ►$$

# 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

## 2.1. Вычисление площади фигуры

***Вычисление площади фигуры, заданной в прямоугольной декартовой системе координат.*** Пусть фигура на рис. 3 ограничена графиками непрерывных функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, где $f_1(x)\le f_2(x)$ для $x\in[a, b]$, и двумя прямыми $x=a$, $x=b$. Тогда площадь этой фигуры определяется по формуле

$$S_{ADCB}=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx. \qquad (7)$$

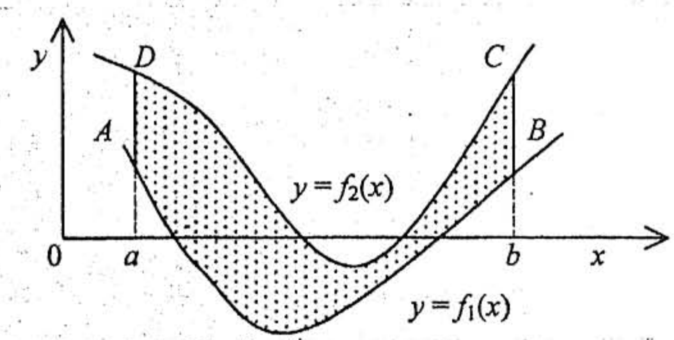


**Рис. 3**

В частном случае, если фигура ограничена графиками непрерывных функций $y=0$ и $y=f_1(x)$ на отрезке $[a, b]$ и двумя прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 4), то ее площадь вычисляем по формуле

$$S_{ABCD}=-\int_a^b f_1(x)\,dx. \qquad (8)$$

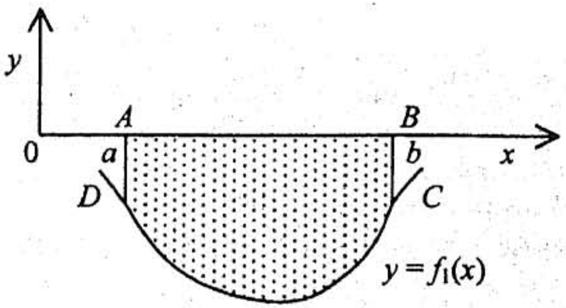


**Рис. 4**

***Пример 5.*** Вычислить площадь фигур, ограниченных графиком функции $y = e^x - 3$, линией $x = 2$ и осями координат (рис. 5).

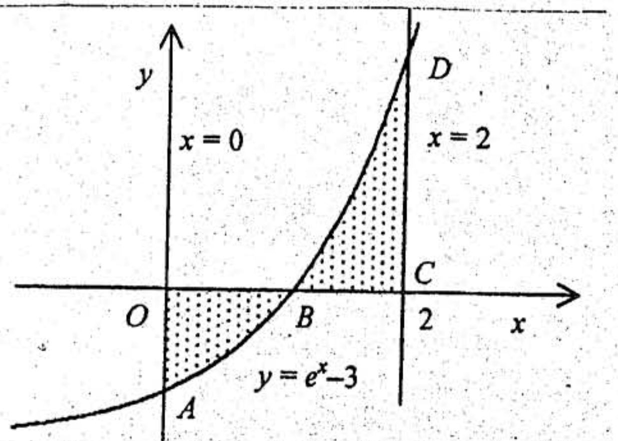


**Рис. 5**

◂ Пределы интегрирования находятся как абсциссы точек пересечения кривой $y = e^x - 3$ с осью $Ox$ и линиями $x = 0$, $x = 2$. Тогда искомая площадь фигур

$$S = S_{AOB} + S_{BDC} = \int_0^{\ln 3} -(e^x - 3)\,dx + \int_{\ln 3}^{2} (e^x - 3)\,dx = e^2 + 6\ln 3 - 11 . ▸$$

***Пример 6.*** Вычислить площадь фигур, ограниченных графиком функции $x = -y^2 + 4y - 3$, линией $y = 5$ и осями координат (рис. 6).

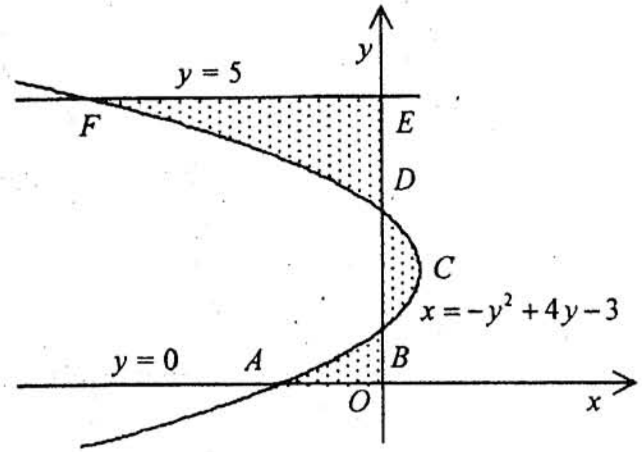


**Рис. 6**

◂ Так как основания криволинейных трапеций $OAB$, $CBD$, $DEF$ расположены на оси $Oy$, то интегрирование выполняется по переменной $y$, а пределы интегрирования находятся как ординаты точек пересечения кривой $x = -y^2 + 4y - 3$ с осью $Oy$. Тогда искомая площадь фигур

$$S = S_{OAB} + S_{CBD} + S_{DEF} = -\int_0^1 (-y^2 + 4y - 3)\,dy +$$

$$+\int_1^3 (-y^2 + 4y - 3)\,dy - \int_3^5 (-y^2 + 4y - 3)\,dy = 9 . ▸$$

***Пример 7.*** Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2/2 - 3x + 5/2$ и линией $x - 2y + 5 = 0$ (рис. 7).

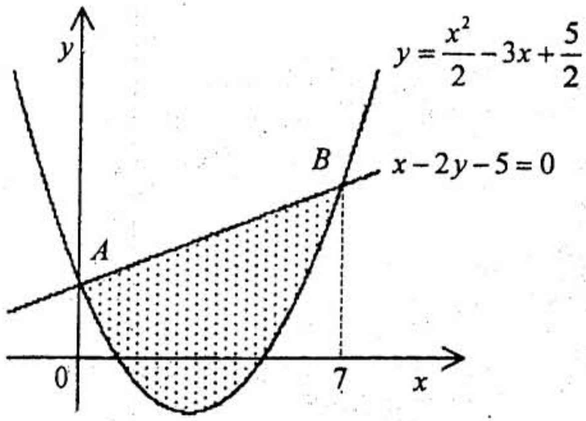


**Рис. 7**

◂ Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2/2 - 3x + 5/2 - y = 0; \\ x - 2y + 5 = 0, \end{cases}$$

находим пределы интегрирования $a = 0$, $b = 7$. Тогда по формуле (7) получаем

$$S = \int_0^7 [(x+5)/2 - (x^2/2 - 3x + 5/2)]\,dx = 28\frac{7}{12}. \ ▸$$



***Пример 8.*** Вычислить площадь $S$ фигуры, ограниченной осью $Oy$, параболой $y = -x^2 - 2x + 3$ и касательной к параболе в точке $M(2, -5)$ (рис. 8).

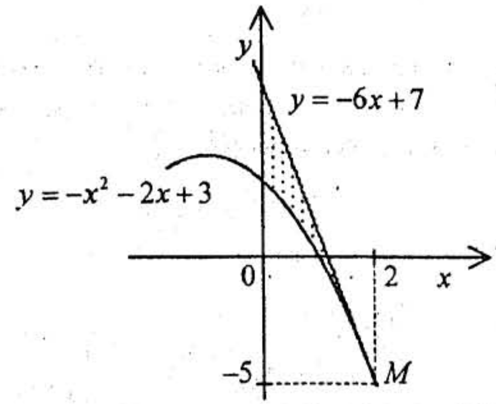


**Рис. 8**

◂ Уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = y'_M(x - x_0),$$

где $x_0 = 2$, $y_0 = -5$ и $y'_M = -2x_0 - 2 = -6$. Тогда касательная задается уравнением $y = -6x + 7$. Применяя формулу (7), получаем

$$S = \int_0^2 [(-6x+7) - (-x^2 - 2x + 3)]\,dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\,dx = \frac{8}{3}. \ ▸$$

Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

а также прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс, то площадь этой фигуры вычисляют по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt\,,$$

где $t_1$ и $t_2$ находят из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

***Пример 9.*** Вычислить площадь $S$ петли кривой (рис. 9), заданной в параметрической форме

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$$

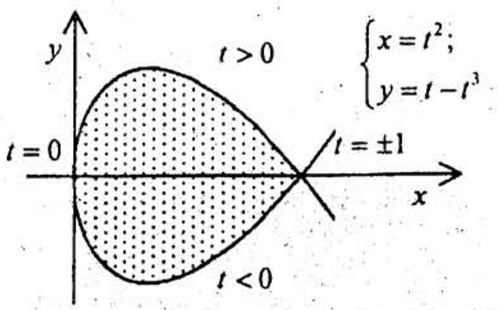


**Рис. 9**

◂ Полагая $y$ равным нулю во втором уравнении системы, получаем $t - t^3 = 0$. Затем находим корни этого уравнения $t_1 = 0$, $t_2 = \pm 1$. Выбирая в качестве пределов интегрирования $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$, вычисляем искомую площадь как удвоенную площадь ее верхней половины, т.е.

$$S = 2\int_0^1 (t - t^3)2t\,dt = 4\int_0^1 (t^2 - t^4)\,dt = \left(\frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{20-12}{15} = \frac{8}{15}. \ ▸$$



***Задание.*** Получите уравнение кривой в неявном виде и найдите площадь петли.

***Вычисление площади фигуры, заданной в полярной системе координат***. Пусть на рис. 10 задан криволинейный сектор *OAB*, т.е. фигура, ограниченная двумя лучами *OA*, *OB* и графиком непрерывной функции $\rho = \rho(\varphi)$, где $\varphi$ и $\rho$ — полярные координаты. Тогда площадь этого криволинейного сектора вычисляют по формуле

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\rho(\varphi)]^2\,d\varphi\,. \qquad (9)$$

***Пример 10.*** Вычислить площадь $S_{OAB}$ криволинейного сектора (рис. 11), который ограничен первым витком спирали Архимеда $\rho = 6\varphi$ и двумя лучами: $\varphi = \pi/6$, $\varphi = \pi/3$.



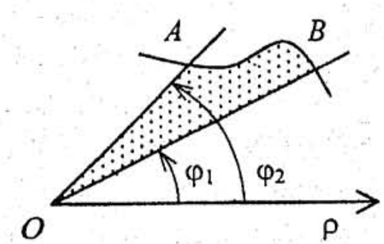


**Рис. 10**

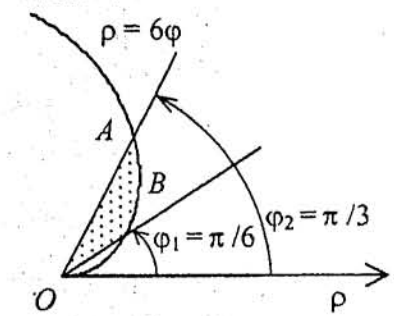


**Рис. 11**

◂ По формуле (9) получаем

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} (6\varphi)^2\,d\varphi = \frac{7}{36}\pi^3. \ ▸$$

*Пример 11.* Вычислить площадь фигуры, которая расположена внутри окружности $\rho = 3\sqrt{3}\sin\varphi$ и одновременно внутри кардиоиды $\rho = 3(1+\cos\varphi)$ (рис. 12).

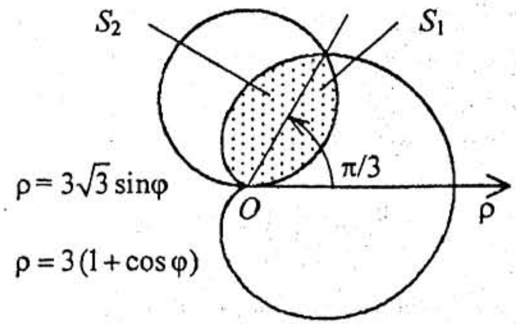


**Рис. 12**

◂ Искомую площадь $S$ найдем как сумму площадей $S_1$ и $S_2$. Для этого сначала находим пределы интегрирования, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho = 3\sqrt{3}\sin\varphi; \\ \rho = 3(1+\cos\varphi), \end{cases}$$

где $0 \le \varphi \le \pi$. Следовательно, $3\sqrt{3}\sin\varphi = 3(1+\cos\varphi)$;

$$2\sqrt{3}\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) = 2\cos^2(\varphi/2);$$

$$[\sqrt{3}\sin(\varphi/2) - \cos(\varphi/2)]\cos(\varphi/2) = 0,$$

где $0 \le \varphi \le \pi$. Из уравнения $\sqrt{3}\sin(\varphi/2) - \cos(\varphi/2) = 0$ получаем $\operatorname{tg}(\varphi/2) = 1/\sqrt{3}$, следовательно, $\varphi_1 = \pi/3$. Из уравнения $\cos(\varphi/2) = 0$ находим $\varphi_2 = \pi$. Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(3\sqrt{3}\sin\varphi)^2 d\varphi \text{ и } S_2 = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}[3(1+\cos\varphi)]^2 d\varphi.$$



Таким образом, искомая площадь

$$S = S_1 + S_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} 27\sin^2\varphi\, d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi} 9(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{27}{4}(\pi - \sqrt{3}). \ ▸$$

## 2.2. Вычисление объема тела вращения

Если криволинейная трапеция, ограниченная графиком непрерывной и положительной функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$, осью $Ox$ и двумя прямыми $x = x_1$, $x = x_2$ (рис. 13), вращается вокруг оси $Ox$ или вокруг оси $Oy$, то объемы тел вращения выражаются соответственно следующими формулами:

$$V_{Ox} = \pi\int_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2 dx, \tag{10}$$

$$V_{Oy} = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} x f(x)\, dx. \tag{11}$$

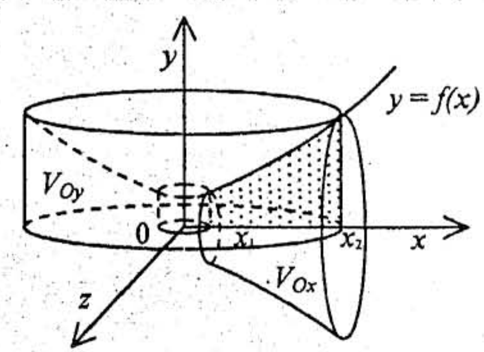


**Рис. 13**

Если же криволинейная трапеция, ограниченная двумя прямыми $x = x_1$, $x = x_2$ и двумя линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$ (рис. 14), вращается вокруг оси $Ox$ или вокруг оси $Oy$, то объемы тел вращения выражаются соответственно следующими формулами:

$$V_{Ox} = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\, dx\,, \qquad (12)$$

$$V_{Oy} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x[f_2(x) - f_1(x)]\, dx\,. \qquad (13)$$

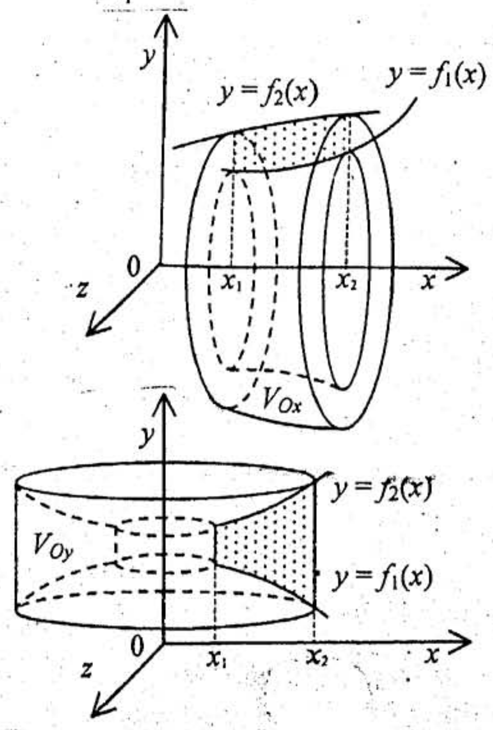


**Рис. 14**



Если же криволинейная трапеция, ограниченная двумя прямыми $y = y_1$ и $y = y_2$ и двумя кривыми $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$, причем $\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$ (рис. 15), вращается вокруг оси $Ox$ или вокруг оси $Oy$, то объемы тел вращения выражаются соответственно следующими формулами:

$$V_{Ox} = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} y[\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]\, dy\,, \qquad (14)$$

$$V_{Oy} = \pi \int_{y_1}^{y_2} [\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)]\, dy\,. \qquad (15)$$

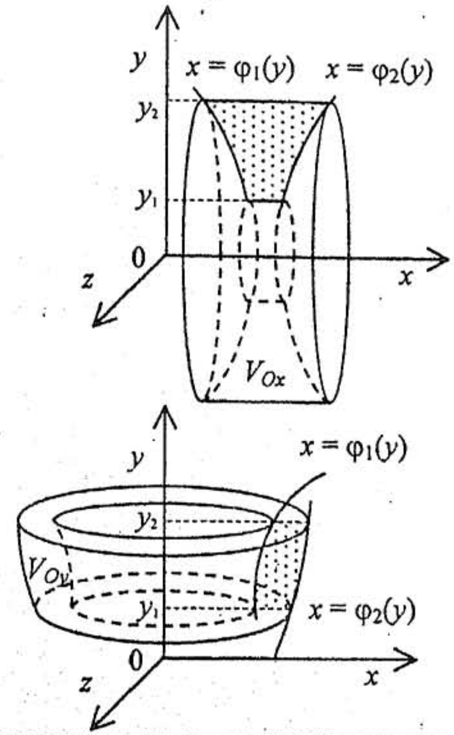


**Рис. 15**

*Пример 12.* Вычислить объем тела, образуемого вращением фигуры, ограниченной кривой $y = e^{2x} - 2$ и прямыми $x = 1$, $y = 0$, вокруг оси $Ox$ (рис. 16).

◄ Зная уравнения линий, которые ограничивают криволинейную трапецию, находим пределы интегрирования $x_1 = \ln\sqrt{2}$ и $x_2 = 1$.

Используя формулу (10), получаем

$$V_{Ox} = \pi\int\limits_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2\,dx = \pi\int\limits_{\frac{\ln 2}{2}}^{1}(e^{2x}-2)^2\,dx = \pi\left(\frac{e^4}{4} - 2e^2 + 7 - 2\ln 2\right). \text{ ►}$$

*Пример 13.* Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной кривой $2y^2 - 12y + 9x = 0$ и прямой $x = 0$ (рис.17).

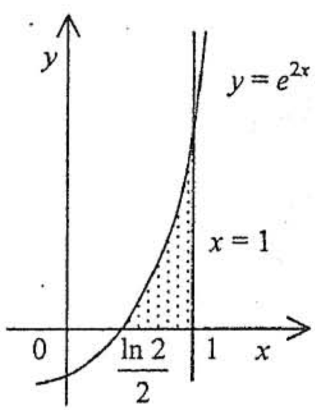


Рис. 16

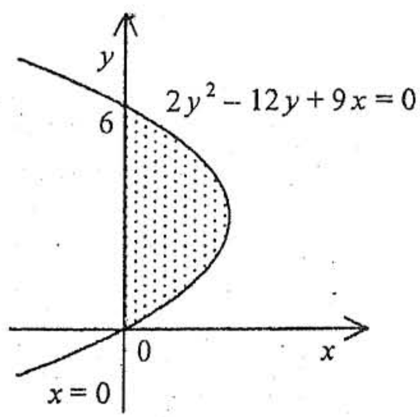


Рис. 17

◄ Точки пересечения параболы с осью $Oy$ дают пределы интегрирования $y_1 = 0$ и $y_2 = 6$. Так как интегрирование проводится по переменной $y$, то представим уравнение параболы в виде $x = 2(6y - y^2)/9$. Тогда по формуле (15) получаем

$$V_{Oy} = \pi\int\limits_0^6 [2(6y - y^2)/9]^2\,dy = 64\pi/5. \text{ ►}$$

***Задание.*** Решите этот пример, используя формулу (13), и убедитесь в совпадении ответов.

***Пример 14.*** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры (рис. 18), ограниченной кривыми $y = \arccos x$, $y = \arccos(x/3)$ и прямой $y = 0$.

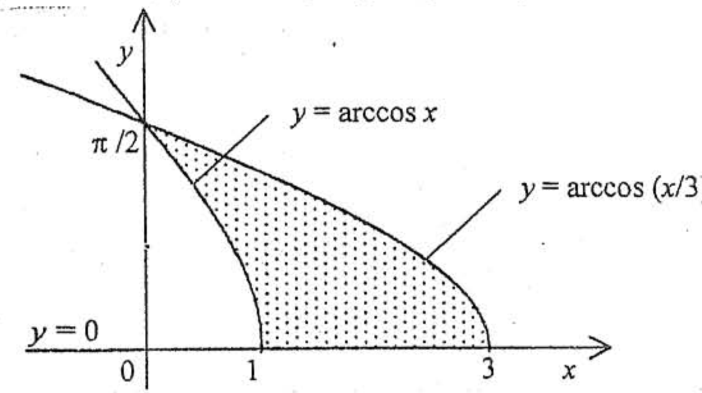


**Рис. 18**

◄ Для нахождения объема применим формулу (15). Для этого запишем уравнения кривых в виде $x_1 = \cos y$ и $x_2 = 3\cos y$, тогда получим

$$V_{Oy} = \pi\int\limits_0^{\pi/2}[x_2^2(y) - x_1^2(y)]\,dy = 8\pi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 y\,dy = 2\pi^2. \text{ ►}$$

***Пример 15.*** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры (рис. 19), ограниченной кривой $y = x^2 + 1$ и прямыми $y = x$, $x = 0$ и $x = 1$.

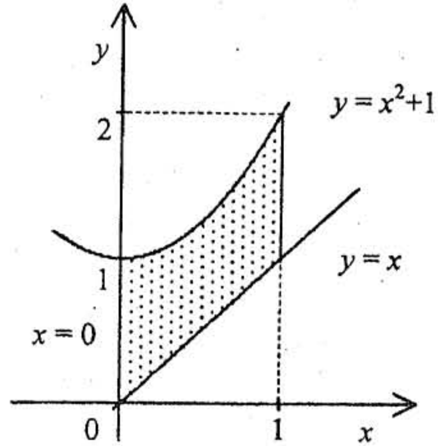


**Рис. 19**

◄ Искомый объем находим по формуле (13). Интегрирование осуществляется по переменной $x$ в пределах от $y_1 = 0$ до $y_2 = 0$, следовательно

$$V_{Oy} = 2\pi \int_0^1 x[y_2(x) - y_1(x)]\,dx = 2\pi \int_0^1 x[(x^2+1) - x]\,dx = \frac{5}{6}\pi. \ ►$$

## 2.3. Вычисление длины дуги плоской кривой

В соответствии с каждым способом задания функции рассмотрим следующие три случая решения задачи нахождения длины дуги кривой.

***Кривая задана уравнением как график функции в декартовой прямоугольной системе координат.*** Пусть дуга кривой находится между двумя точками с абсциссами, равными $x_1$ и $x_2$ соответственно, где $x_1 < x_2$, и задана как график функции $y = y(x)$, которая имеет непрерывную производную на отрезке $[x_1, x_2]$. Тогда длина этой дуги определяется по формуле

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx. \qquad (16)$$

Если же кривая задана уравнением $x = x(y)$ и дуга этой кривой находится между двумя точками с ординатами, равными $y_1$ и $y_2$ соответственно, где $y_1 < y_2$, и функция $x = x(y)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[y_1, y_2]$, то длина дуги определяется по формуле

$$l = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + (x'(y))^2}\,dy. \qquad (17)$$

***Пример 16.*** Найти длину дуги параболы $2y = x^2 - 2$ между точками пересечения кривой с осью $Ox$ (рис. 20).

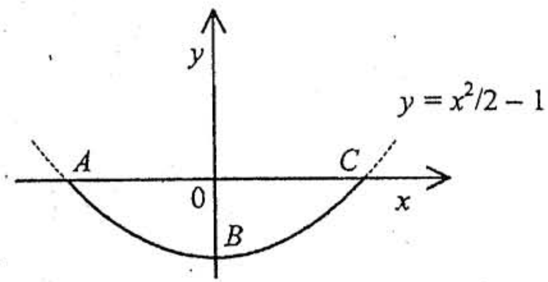


**Рис. 20**

◂ Учитывая свойство симметрии дуги относительно оси $Oy$, находим по формуле (16)

$$l_{ABC} = 2l_{BC} = 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Пусть $u(x) = \sqrt{1+x^2}$ и $v(x) = x$, тогда, используя формулу интегрирования по частям (4), получаем

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \left(x\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= \left(x\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{(1+x^2)-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= \left(x\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Отсюда

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

Тогда

$$l_{ABC} = 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{6} + \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$ ▸

***Пример 17.*** Найти длину дуги параболы, заданной уравнением $x = -y^2 + 2y + 3$ и расположенной между точками пересечения параболы с осью $Oy$ (рис. 21).



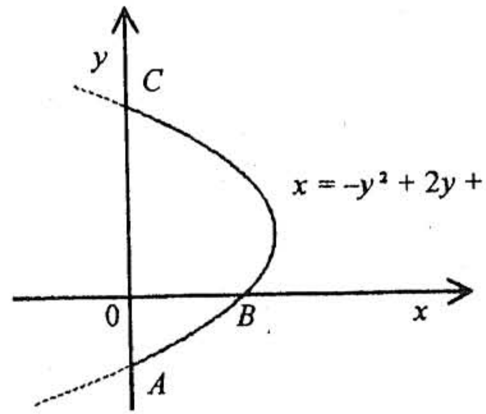


**Рис. 21**

◂ Дуга $AC$ находится между двумя точками с ординатами, равными $y_1 = -1$ и $y_2 = 3$ соответственно, тогда по формуле (17) получаем

$$l_{ABC} = \int_{-1}^{3} \sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy = 2\int_{-1}^{3} \sqrt{1/4+(y-1)^2}\,dy.$$

Применяя подстановку $y = t+1$, находим

$$l_{AC} = 2\int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\,dt = 4\int_0^2 \sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\,dt.$$

Пусть $u(t) = \sqrt{t^2+1/4}$ и $v(t) = t$, тогда, используя формулу интегрирования по частям (4), имеем

$$\int_0^2 \sqrt{1/4+t^2}\,dt = \left(t\sqrt{1/4+t^2}\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{1/4+t^2}}\,dt =$$

$$= \left( t\sqrt{1/4+t^2} \right)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{(1/4+t^2)-1/4}{\sqrt{1/4+t^2}}\,dt =$$

$$= \left( t\sqrt{1/4+t^2} \right)\Big|_0^2 - \int_0^2 \sqrt{1/4+t^2}\,dt + \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{1/4+t^2}}.$$

Отсюда

$$\int_0^2 \sqrt{1/4+t^2}\,dx = \frac{1}{2}\left( t\sqrt{1/4+t^2} \right)\Big|_0^2 + \frac{1}{8}\ln\left|t+\sqrt{1/4+t^2}\right|\Big|_0^2.$$

Тогда

$$l_{ABC} = 2\int_0^2 \sqrt{1/4+t^2}\,dt = \left( t\sqrt{1/4+t^2} \right)\Big|_0^2 + \frac{1}{4}\ln\left(t+\sqrt{1/4+t^2}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 2\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{4+\sqrt{17}}{4-\sqrt{17}}\right| = 2\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln\left(4+\sqrt{17}\right). \blacktriangleright$$

***Кривая задана параметрическими уравнениями.*** Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

то длина дуги $l$ этой кривой определяется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt, \quad t_1 < t_2, \qquad (18)$$

где $t_1$ и $t_2$ — пределы интегрирования, которые соответствуют значениям параметра $t$ на концах дуги.

***Пример 18.*** Найти длину дуги трактрисы (рис. 22), заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 2\ln \operatorname{tg}(t/2) + 2\cos t; \\ y = 2\sin t, \end{cases}$$

где $\pi/2 \le t \le 3\pi/4$.

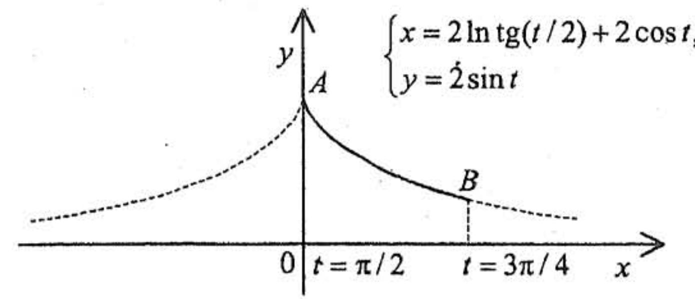


**Рис. 22**

$\blacktriangleleft$ Так как $x' = 2(1/\sin t - \sin t)$ и $y' = 2\cos t$, то $(x')^2 + (y')^2 = 2^2 \operatorname{ctg}^2 t$. Следовательно, по формуле (18) получаем

$$l_{BC} = 2\int_{\pi/2}^{3\pi/4} |\operatorname{ctg} t|\,dt = 2\int_{\pi/2}^{3\pi/4} -\operatorname{ctg} t\,dt = -2\ln|\sin t|\Big|_{\pi/2}^{3\pi/4} = \ln 2. \blacktriangleright$$

***Замечание.*** Подынтегральная функция $\operatorname{ctg} t$ принимает отрицательные значения при $\pi/2 \le t \le 3\pi/4$, поэтому $|\operatorname{ctg} t| = -\operatorname{ctg} t$ на отрезке $[\pi/2, 3\pi/4]$.

***Кривая задана как график функции в полярной системе координат.*** Если кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, и функция $\rho = \rho(\varphi)$ имеет непрерывные производные на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$, то длину дуги этой кривой находим по формуле

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi, \quad \varphi_1 < \varphi_2, \tag{19}$$

где $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — значения полярного угла в крайних точках дуги.

***Пример 19.*** Прямая $x = 3a/4$ делит замкнутую кривую, заданную уравнением $(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax)-a^2y^2=0$ на две части. Найти длины дуг $COB$ и $BAC$ обеих частей этой замкнутой линии (рис. 23).

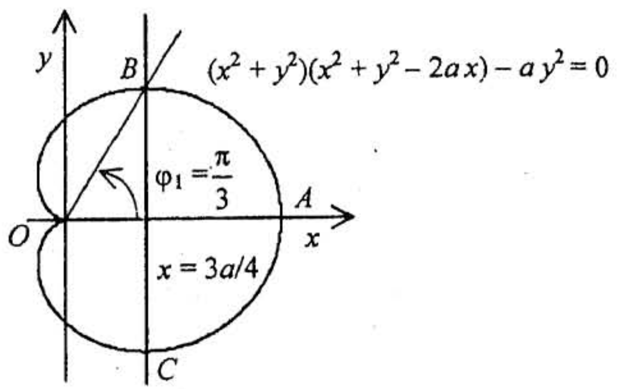


**Рис. 23**

◀ Так как уравнение замкнутой линии содержит сумму квадратов переменных, то следует перейти к полярной системе координат по формулам $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$. Тогда уравнение прямой имеет вид $\rho = 3a/(4\cos\varphi)$, а замкнутая кривая задается уравнением

$$\rho^2(\rho^2 - 2a\rho\cos\varphi) - a^2\rho^2\sin^2\varphi = 0,$$

т.е. замкнутая кривая является кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Пределы интегрирования $\varphi_1$ и $\varphi_2$ находим из системы



$$\begin{cases} \rho = 3a/(4\cos\varphi); \\ \rho = a(1+\cos\varphi), \end{cases}$$

где $0 \le \varphi \le 2\pi$, откуда получаем

$$\cos^2\varphi + \cos\varphi - 3/4 = 0,$$

следовательно, $\cos\varphi = 1/2$ и $\cos\varphi = -3/2$, где $0 \le \varphi \le 2\pi$. Тогда $\varphi_1 = \pi/3$ и $\varphi_2 = 5\pi/3$. Используя формулу (19), получаем длины дуг $COB$ и $BAC$:

$$l_{COB} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)+a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2l_{BO} = 2a\int_{\pi/3}^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi/3}^{\pi} = 4a,$$

$$l_{CAB} = 2l_{AB} = 2\int_{0}^{\varphi_1}\sqrt{a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)+a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_{0}^{\pi/3}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{\pi/3} = 4a.$$

Очевидно, что прямая $x = 3a/4$ делит длину дуги кардиоиды пополам. Сумма длин дуг $COB$ и $CAB$ равна $8a$ ,т.е. равна длине кардиоиды. ▶

***Замечание.*** При вычислении длин дуг таких кривых, как улитка Паскаля, лемниската Бернулли и некоторых других, приходят к интегралам, которые не выражаются через элементарные функции, к так называемым эллиптическим интегралам. Следует отметить, что вычисление длины дуги таких кривых, как эллипс, гипербола, синусоида, также приводит к эллиптическим интегралам. На практике часто встречаются интегралы, которые не выражаются через элементарные функции или выражаются очень сложно. Нередко подынтегральная функция задается таблицей или графиком. В этих случаях интегралы находят приближенными методами.

### 2.4. Вычисление площади поверхности вращения

В соответствии с каждым способом задания функции рассмотрим следующие три случая решения задачи нахождения площади поверхности, образованной вращением дуги кривой.

***Кривая задана уравнением как график функции в декартовой прямоугольной системе координат.*** Пусть дуга кривой задана неотрицательной функцией $y = y(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$, имеющей на этом отрезке непрерывную производную. Тогда площадь поверхности, образованной вращением этой дуги кривой вокруг оси $Ox$, определяется по формуле

$$S_{Ox} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx, \quad x_1 < x_2. \qquad (20)$$

Если же дуга кривой задана неотрицательной функцией $x = x(y)$ на отрезке $[y_1, y_2]$, имеющей на этом отрезке непрерывную производную, то площадь поверхности, образованной вращением этой дуги кривой вокруг оси $Oy$, определяется по формуле

$$S_{Oy} = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x(y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dx, \quad y_1 < y_2. \qquad (21)$$



***Пример 20.*** Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг оси $Ox$ одной петли кривой, заданной уравнением $8a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ (рис. 24).

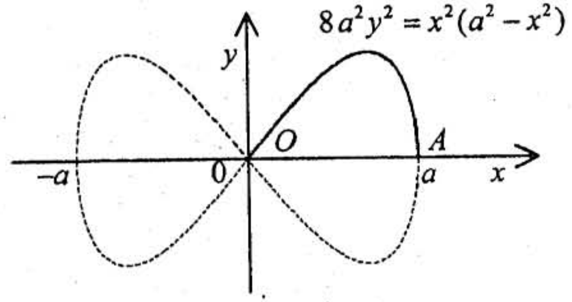


**Рис. 24**

◀ Эта кривая является симметричной относительно осей $Ox$ и $Oy$, а с осью $Ox$ пересекается в точках $x = 0$ и $x = \pm a$. Дуга $OA$ задается уравнением

$$y = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2\sqrt{2}a},$$

где $0 \le x \le a$. Следовательно,

$$y' = \frac{a^2 - 2x^2}{2\sqrt{2}a\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ и } \sqrt{1+(y'_x)^2} = \frac{3a^2 - 2x^2}{2\sqrt{2}a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Используя формулу (20), получаем

$$S_{Ox} = 2\pi\int_0^a \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2\sqrt{2}a}\frac{(3a^2 - 2x^2)}{2\sqrt{2}a\sqrt{a^2 - x^2}}dx =$$

$$= \frac{\pi}{4a^2}\int_0^a x(3a^2 - 2x^2)\,dx = \frac{\pi a^2}{4}. \text{ ▶}$$

***Пример 21.*** Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг оси $Oy$ петли кривой, которая задана уравнением $9ax^2 = y(3a-y)^2$ (рис. 25).

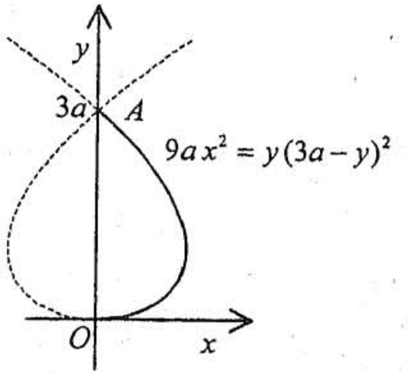


**Рис. 25**

◄ Кривая симметрична относительно оси $Oy$ и имеет с ней точки пересечения $y_1 = 0,\ y_2 = 3a$. Дуга $OA$ задается уравнением

$$x = \frac{\sqrt{y}(3a-y)}{3\sqrt{a}},$$

где $0 \le y \le 3a$. Следовательно,

$$\sqrt{1+(x'_y)^2} = \frac{a+y}{2\sqrt{ay}}.$$

Используя формулу (21), получаем

$$S_{Oy} = 2\pi \int_0^{3a} \frac{\sqrt{y}(3a-y)}{3\sqrt{a}} \frac{(a+y)}{2\sqrt{ay}}\, dy =$$

$$= \frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}(3a^2+2ay-y^2)dy = 3\pi a^2. \text{ ►}$$



***Кривая задана параметрическими уравнениями.*** Пусть дуга кривой задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — функции, которые имеют непрерывные производные на отрезке $[t_1, t_2]$. Тогда площадь поверхности, образованной вращением этой дуги кривой вокруг оси $Ox$, определяется по формуле

$$S_{Ox} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\, dt, \quad t_1 < t_2, \quad (22)$$

где $y(t)$ является неотрицательной функцией на отрезке $[t_1, t_2]$.

Если же вращение дуги кривой происходит вокруг оси $Oy$, то площадь образуемой поверхности вычисляется по следующей формуле

$$S_{Oy} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\, dt, \quad t_1 < t_2, \quad (23)$$

где $x(t)$ является неотрицательной функцией на отрезке $[t_1, t_2]$.

***Пример 22.*** Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг оси $Ox$ дуги эпициклоиды с двумя заостреньями, заданной параметрическими уравнениями (рис. 26)

$$\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t); \\ y = a(3\sin t - \sin 3t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

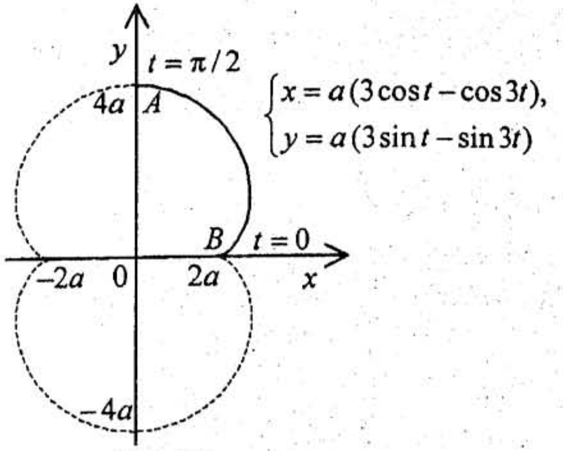


**Рис. 26**

◄ Сначала находим

$$x' = 3a(-\sin t + \sin 3t) \text{ и } y' = 3a(\cos t - \cos 3t);$$
$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = \sqrt{2\cdot 9a^2(1-\cos 2t)} = 6a\sin t.$$

Площадь поверхности, образуемой вращением вокруг оси $Ox$ дуги $AB$, вычисляем по формуле (22):

$$S_{Ox} = 2\pi \int_0^{\pi/2} a(3\sin t - \sin 3t)\, 6a\sin t\, dt =$$
$$= 12\pi a^2 \left( 3\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2} dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos 2t - \cos 4t) dt \right) = 9\pi^2 a^2. \ ►$$

***Пример 23.*** Пусть та же дуга эпициклоиды, что и в примере 22, вращается вокруг оси $Oy$. Нужно вычислить площадь поверхности вращения.

◄ Так как вращение дуги кривой происходит вокруг оси $Oy$, то площадь образуемой поверхности определяем по формуле (23):

$$S_{Oy} = 2\pi \int_0^{\pi/2} a(3\cos t - \cos 3t)\, 6a\sin t\, dt =$$
$$= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} (3\cos t \sin t - \sin t \cos 3t)\, dt =$$
$$= 12\pi a^2 \left( -\frac{3}{4}\cos 2t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin 4t - \sin 2t) dt \right) = 24\pi a^2. \ ►$$

***Кривая задана как график функции в полярной системе координат.*** Пусть дуга кривой задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $0 \le \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \le \pi$, и функция $\rho = \rho(\varphi)$ имеет непрерывные производные на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$. Тогда площадь поверхности, образованной вращением этой дуги вокруг полярной оси, определяется по формуле

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)\sin\varphi \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi. \qquad (24)$$

***Пример 24.*** Вычислить площади поверхностей, образуемых вращением вокруг полярной оси дуг $COB$ и $BAC$ кардиоиды, заданной уравнением $\rho = a(1+\cos\varphi)$. Кардиоида и дуги $COB$ и $BAC$ изображены на рис. 23.

◄ Используя результаты расчета примера 19, находим по формуле (24) площади поверхностей, образуемые вращением вокруг полярной оси дуг $COB$ и $BAC$ соответственно:

$$S_{COB} = 2\pi \int_{\pi/3}^{\pi} a(1+\cos\varphi)\sin\varphi \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$
$$= 2\pi a^2 \int_{\pi/3}^{\pi} 2\cos\frac{\varphi}{2}\, 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi =$$

$$=16\pi a^2\int\limits_{\pi/3}^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=-\frac{32}{5}\pi a^2\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi/3}^{\pi}=\frac{9\sqrt{3}}{5}\pi a^2,$$

$$S_{CAB}=2\pi\int\limits_{0}^{\pi/3}a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=-\frac{32}{5}\pi a^2\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{\pi/3}=\frac{\pi a^2}{5}(32-9\sqrt{3}).$$ ▸

***Задание.*** Если сложить $S_{COB}$ и $S_{BAC}$, то получим площадь поверхности, образуемой при вращении кардиоиды вокруг полярной оси. Проверьте это непосредственным вычислением.

В заключение рассмотрим пример вычисления площади поверхности, образуемой вращением составной дуги.

***Пример 25.*** Дуга $BCA$ состоит из дуги $AC$ параболы $y=-x^2/2+1/2$ и отрезка $BC$ касательной к параболе в точке пересечения ее с осью $Ox$ (рис. 27). Дуга $BCA$ вращается вокруг оси $Oy$. Вычислить площадь поверхности вращения.

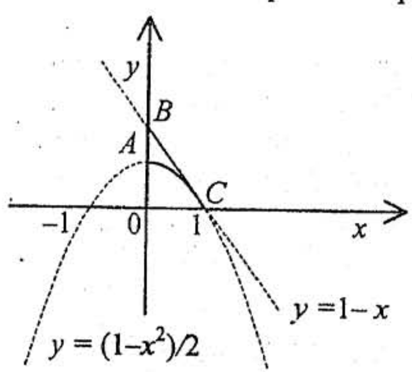


**Рис. 27**



◂ Уравнение касательной имеет вид

$$y-y_0=y'_C(x-x_0),$$

где $y_0=0$, $x_0=1$ и $y'_C(x_0)=-x_0=-1$. Таким образом, касательная задается уравнением $y=-x+1$.

Пусть $S_{AC}$ — площадь поверхности, образуемой вращением дуги $AC$ вокруг оси $Oy$, тогда

$$S_{AC}=2\pi\int\limits_0^1\left(-x^2/2+1/2\right)\sqrt{1+x^2}\,dx=-\pi\int\limits_0^1(x^2-1)\sqrt{x^2+1}\,dx.$$

Для вычисления последнего интеграла делаем подстановку $x=\operatorname{tg}t$, тогда $dx=\cos^{-2}t\,dt$ и $\sqrt{1+x^2}=1/\cos t$. Следовательно,

$$S_{AC}=-\pi\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}-\frac{1}{\cos^3 t}\right)dt=-\pi\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}dt+\pi\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dt}{\cos^3 t}=$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{4}\frac{\sin t}{\cos^4 t}+\frac{5}{8}\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{5}{8}\ln\left|\operatorname{tg}(t/2+\pi/4)\right|\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=$$

$$=\frac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}+5\ln tg\,(3\pi/8)\right).$$

Пусть $S_{BC}$ — площадь поверхности, образуемой вращением отрезка $BC$ вокруг оси $Oy$, тогда

$$S_{BC}=2\pi\int\limits_0^1(-x+1)\sqrt{2}\,dx=\pi\sqrt{2}.$$

Искомую площадь $S$ поверхности вращения находим как сумму площадей $S_{AC}$ и $S_{BC}$

$$S=S_{AC}+S_{BC}=\frac{\pi}{8}\left(9\sqrt{2}+5\ln\operatorname{tg}(3\pi/8)\right).$$ ▸

# 3. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

## 3.1. Вычисление координат центра масс дуги плоской кривой

Пусть дуга плоской кривой задана в декартовой прямоугольной системе координат функцией $y = y(x)$ и находится между двумя точками с абсциссами, равными $x_1$ и $x_2$ соответственно, где $x_1 < x_2$, а функция $y = y(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[x_1, x_2]$. Если линейная плотность дуги задана непрерывной функцией $l(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$, то масса дуги плоской кривой вычисляется по формуле

$$m = \int_{x_1}^{x_2} l(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx. \tag{25}$$

Центром масс (или центром инерции) дуги плоской кривой является точка $C$ с координатами $x_C$ и $y_C$, которые определяются по следующим формулам:

$$x_C = \frac{1}{m}\int_{x_1}^{x_2} l(x)\,x\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx, \tag{26}$$

$$y_C = \frac{1}{m}\int_{x_1}^{x_2} l(x)\,y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx. \tag{27}$$

Если же плоская кривая задана уравнением $x = x(y)$ и дуга этой кривой находится между двумя точками с ординатами, равными $y_1$ и $y_2$ соответственно, где $y_1 < y_2$, а функция $x = x(y)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[y_1, y_2]$, то масса дуги плоской кривой вычисляется по формуле

$$m = \int_{y_1}^{y_2} l(y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy, \tag{28}$$

где $l(y)$ — линейная плотность дуги, которая является непрерывной функцией на отрезке $[y_1, y_2]$. Тогда координаты центра масс дуги плоской кривой определяются по формулам

$$x_C = \frac{1}{m}\int_{y_1}^{y_2} l(y)\,x(y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy, \tag{29}$$

$$y_C = \frac{1}{m}\int_{y_1}^{y_2} l(y)\,y\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy. \tag{30}$$

Если дуга кривой задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 < t < t_2,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — функции, имеющие непрерывные производные на отрезке $[t_1, t_2]$, то масса дуги плоской кривой вычисляется по формуле

$$m = \int_{t_1}^{t_2} l(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt, \tag{31}$$

где $t_1$ и $t_2$ — пределы интегрирования, соответствующие значениям параметра $t$ на концах дуги; $l(t)$ — линейная плотность дуги, которая является непрерывной функцией на отрезке $[t_1, t_2]$.

Координаты центра масс этой дуги определяются по формулам

$$x_C = \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2} l(t)\,x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt, \qquad (32)$$

$$y_C = \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2} l(t)\,y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \qquad (33)$$

***Пример 26.*** Найти координаты центра масс дуги кривой, заданной уравнением $y = |x-1|$, где $-1 \le x \le 2$, при условии, что дуга имеет линейную плотность $l(x) = \dfrac{x^2}{3\sqrt{2}}$ (рис. 28).

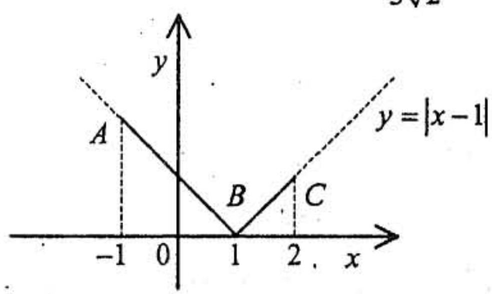


**Рис. 28**

◄ Дуга $ABC$ состоит из отрезков $AB$ и $BC$. Находим массу дуги $ABC$ как сумму масс отрезков $AB$ и $BC$. Тогда, используя формулу (25), получаем

$$m = \int_{-1}^{1} l(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx + \int_{1}^{2} l(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{3\sqrt{2}}\sqrt{2}\,dx + \int_{1}^{2}\frac{x^2}{3\sqrt{2}}\sqrt{2}\,dx = \left.\frac{x^3}{3^2}\right|_{-1}^{1} + \left.\frac{x^3}{3^2}\right|_{1}^{2} = 1.$$



Координаты центра масс дуги $ABC$ находим следующим образом:

$$x_C = \frac{1}{m}\int_{-1}^{1} l(x)\,x\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx + \frac{1}{m}\int_{1}^{2} l(x)\,x\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{x^3}{3\sqrt{2}}\sqrt{2}\,dx + \int_{1}^{2}\frac{x^3}{3\sqrt{2}}\sqrt{2}\,dx = \left.\frac{x^4}{12}\right|_{-1}^{1} + \left.\frac{x^4}{12}\right|_{1}^{2} = 1\frac{1}{4},$$

$$y_C = \frac{1}{m}\int_{-1}^{1} l(x)\,y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx + \frac{1}{m}\int_{1}^{2} l(x)\,y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{|x-1|}{3\sqrt{2}}x^2\sqrt{2}\,dx + \int_{1}^{2}\frac{|x-1|}{3\sqrt{2}}x^2\sqrt{2}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} -(x-1)\,x^2\,dx +$$

$$+ \frac{1}{3}\int_{1}^{2}(x-1)\,x^2\,dx = -\frac{1}{3}\left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1} + \frac{1}{3}\left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{1}^{2} = \frac{25}{36}. \blacktriangleright$$

***Пример 27.*** Найти координаты центра масс дуги окружности радиусом $r$ с центром в начале координат. Дуга расположена в первом и четвертом квадрантах и имеет постоянную линейную плотность $l$ (рис. 29).

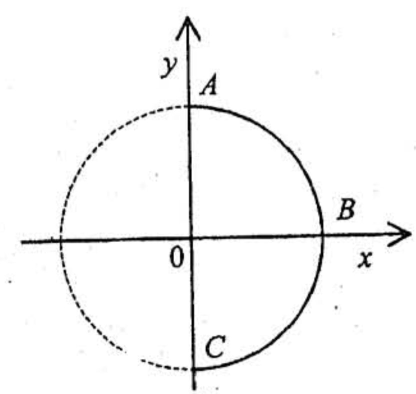


**Рис. 29**

◂ Дугу окружности $ABC$ можно задать в декартовой прямоугольной системе координат уравнением $x=\sqrt{r^2-y^2}$, где $-r\le y\le r$. Используя формулу (28), получаем

$$m=\int_{-r}^{r} l\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy=2\int_0^r l\sqrt{1+\frac{r^2}{r^2-y^2}}\,dy=$$

$$=2rl\int_0^r\frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}}=2rl\arcsin(y/r)\Big|_0^r=\pi rl.$$

По формулам (29) и (30) находим координаты центра масс дуги $ABC$:

$$x_C=\frac{1}{m}\int_{-r}^{r} l\,x(y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy=\frac{2l}{m}\int_0^r\sqrt{r^2+y^2}\sqrt{1+\frac{r^2}{r^2-y^2}}\,dy=$$

$$=\frac{2rl}{m}\int_0^r dy=\frac{2rl}{m}y\Big|_0^r=\frac{2r^2l}{m}=\frac{2r}{\pi},$$

$$y_C=\frac{1}{m}\int_{-r}^{r} l\,y\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy=\frac{l}{m}\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+\frac{r^2}{r^2-y^2}}\,dy=$$

$$=\frac{rl}{m}\int_{-r}^{r}\frac{y\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}}=0.$$

При вычислении последнего интеграла следует учитывать, что подынтегральная функция является нечетной и это позволяет применить соответствующее свойство определенного интеграла.

Если дугу окружности задать параметрическими уравнениями



$$\begin{cases}x=r\cos t;\\ y=r\sin t,\end{cases}\quad -\pi/2\le t\le\pi/2,$$

то, вычисляя массу дуги по формуле (31), получаем

$$m=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} l\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=l\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{(r\cos t)^2+(r\sin t)^2}\,dt=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} rl\,dt=rl\,t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\pi rl.$$

Координаты центра масс этой дуги определяем по формулам (32) и (33):

$$x_C=\frac{1}{m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} l\,x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=$$

$$=\frac{l}{m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos t\sqrt{(r\cos t)^2+(r\sin t)^2}\,dt=\frac{r^2l}{m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\,dt=$$

$$=\frac{r^2l}{m}\sin t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{2r}{\pi},$$

$$y_C=\frac{l}{m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos t\sqrt{(r\cos t)^2+(r\sin t)^2}\,dt=\frac{r^2l}{m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\,dt=$$

$$=\frac{l}{m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\sin t\sqrt{(r\cos t)\ +(r\sin t)}\,dt=\frac{r^2l}{m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin t\,dt=0.$$

Последнее равенство следует из свойства определенного интеграла, у которого подынтегральная функция является нечетной. ▸

### 3.2. Вычисление моментов инерции дуги плоской кривой

Пусть дуга плоской кривой задана в декартовой прямоугольной системе координат функцией $y = y(x)$ и находится между двумя точками с абсциссами, равными $x_1$ и $x_2$ соответственно, где $x_1 < x_2$, а функция $y = y(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[x_1, x_2]$. Линейная плотность дуги на этом отрезке задана непрерывной функцией $l(x)$. Тогда моменты инерции $J_x$ и $J_y$ относительно осей $Ox$ и $Oy$ соответственно вычисляются по следующим формулам:

$$J_x = \int_{x_1}^{x_2} l(x)(y(x))^2 \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx, \qquad (34)$$

$$J_y = \int_{x_1}^{x_2} l(x)\,x^2 \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx. \qquad (35)$$

Если же плоская кривая задана уравнением $x = x(y)$ и дуга этой кривой находится между двумя точками с ординатами, равными $y_1$ и $y_2$ соответственно, где $y_1 < y_2$, а функция $x = x(y)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[y_1, y_2]$, то моменты инерции $J_x$ и $J_y$ относительно осей $Ox$ и $Oy$ соответственно вычисляются по формулам

$$J_x = \int_{y_1}^{y_2} l(y)\,y^2 \sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy, \qquad (36)$$

$$J_y = \int_{y_1}^{y_2} l(y)(x(y))^2 \sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy, \qquad (37)$$



где $l(y)$ — линейная плотность дуги, которая является непрерывной функцией на отрезке $[y_1, y_2]$.

Если дуга кривой задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 < t < t_2,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — функции, имеющие непрерывные производные на отрезке $[t_1, t_2]$, то моменты инерции $J_x$ и $J_y$ относительно осей $Ox$ и $Oy$ соответственно вычисляются по следующим формулам:

$$J_x = \int_{t_1}^{t_2} l(t)(y(t))^2 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt, \qquad (38)$$

$$J_y = \int_{t_1}^{t_2} l(t)(x(t))^2 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt, \qquad (39)$$

где $t_1$ и $t_2$ — пределы интегрирования, соответствующие значениям параметра $t$ на концах дуги; $l(y)$ — линейная плотность дуги, которая является непрерывной функцией на отрезке $[t_1, t_2]$.

***Замечание.*** Момент инерции дуги кривой относительно какой-либо оси зависит не только от линейной плотности дуги и ее формы, но и от положения дуги по отношению к этой оси. Согласно теореме Штейнера (теореме о переносе осей инерции) момент инерции дуги кривой $J$ относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этой дуги $J_C$ относительно оси, проходящей через центр инерции дуги кривой параллельно рассматриваемой оси, и произведения массы дуги $m$ и квадрата расстояния $d$ между осями, т.е.

$$J = J_C + md^2.$$

*Пример 28.* Дуга кривой задана уравнением $y=|x-1|$, где $-1\le x\le 2$. Вычислить моменты инерции $J_x$ и $J_y$ дуги относительно координатных осей $Ox$ и $Oy$, если линейная плотность дуги постоянна и равна $l=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.

◂ Дуга $ABC$ (см. рис. 28) состоит из отрезков $AB$ и $BC$. Находим моменты инерции дуги относительно координатных осей как сумму моментов инерции отрезков $AB$ и $BC$ относительно тех же координатных осей. Тогда, применяя формулы (34) и (35), получаем

$$J_x=\int_{-1}^{1} l\,(y(x))^2\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx+\int_{1}^{2} l\,(y(x))^2\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{(x-1)^2}{3\sqrt{2}}\sqrt{2}\,dx+\int_{1}^{2}\frac{(x-1)^2}{3\sqrt{2}}\sqrt{2}\,dx=1,$$

$$J_y=\int_{-1}^{1} l\,x^2\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx+\int_{1}^{2} l\,x^2\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{3\sqrt{2}}\sqrt{2}\,dx+\int_{1}^{2}\frac{x^2}{3\sqrt{2}}\sqrt{2}\,dx=\left.\frac{x^3}{9}\right|_{-1}^{1}+\left.\frac{x^3}{9}\right|_{1}^{2}=1.$$ ▸

*Пример 29.* Найти моменты инерции $J_x$ и $J_y$ дуги окружности относительно координатных осей $Ox$ и $Oy$. Окружность имеет радиус $r$ и центр в начале координат. Дуга окружности расположена в первом и четвертом квадрантах. Линейная плотность дуги задана уравнением $l(y)=\sqrt{r^2-y^2}$, где $-r\le y\le r$.

◂ Дугу окружности $ABC$ (см. рис. 29) можно задать в декартовой прямоугольной системе координат уравнением $x=\sqrt{r^2-y^2}$, где $-r\le y\le r$. Используя формулы (36) и (37), получаем



$$J_x=\int_{-r}^{r} l(y)\,y^2\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy=\int_{-r}^{r} y^2\sqrt{r^2-y^2}\sqrt{1+\frac{y^2}{r^2-y^2}}\,dy=$$

$$=r\int_{-r}^{r} y^2\,dy=\left.\frac{r}{3}y^3\right|_{-r}^{r}=\frac{2}{3}r^4,$$

$$J_y=\int_{-r}^{r} l(y)(x(y))^2\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy=\int_{-r}^{r}\left(r^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{y^2}{r^2-y^2}}\,dy=$$

$$=r\int_{-r}^{r}\left(r^2-y^2\right)dy=\left.\left(r^3y-r\frac{y^3}{3}\right)\right|_{-r}^{r}=\frac{4}{3}r^4.$$

Если дугу окружности задать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases}x=r\cos t;\\ y=r\sin t,\end{cases}\quad -\pi/2\le t\le\pi/2,$$

то моменты инерции $J_x$ и $J_y$ относительно осей $Ox$ и $Oy$ находим по формулам (38) и (39):

$$J_x=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} l(t)\,y(t)^2\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{r^2-(r\sin t)^2}\,(r\sin t)^2\sqrt{(r\cos t)^2+(r\sin t)^2}\,dt=$$

$$=r^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\sin^2 t\,dt=r^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 t\,d(\sin t)=r^4\left.\frac{(\sin t)^3}{3}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{2}{3}r^4;$$

$$J_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} l(t)\,x(t)^2 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - (r\sin t)^2}\,(r\cos t)^2 \sqrt{(r\cos t)^2 + (r\sin t)^2}\, dt =$$

$$= r^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t\, dt = \frac{r^4}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3\cos t + \cos 3t)\, dt =$$

$$= \left(\frac{3}{4} r^4 \sin t + \frac{1}{12} r^4 \sin(3t)\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3} r^4. \blacktriangleright$$

## 4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить площадь $S$ фигуры, которая ограничена параболой $y^2 = 4x$, осью $Ox$ и прямыми $x = 4$, $x = 9$.

Ответ: $S = 25\frac{1}{3}$.

2. Вычислить площадь $S$ фигуры, расположенной между осями $Ox$ и $Oy$, цепной линией $y = a(e^{x/a} + e^{-x/a})/2$ и прямой $x = a$.

Ответ: $S = a^2\left(e^2 - 1\right)/2e$.

3. Вычислить площадь $S$ фигуры, ограниченной линией $y = \ln x$, осью $Ox$ и прямыми $x = 1$, $x = a$, где $a \geq 1$.

Ответ: $S = a(\ln a - 1) + 1$.

4. Вычислить площадь $S$ фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$, $y = 2$ и $x = 0$.

Ответ: $S = 2 - \frac{1}{\ln 2}$.



5. Вычислить площадь $S$ фигуры, которая ограничена линией, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$$

Ответ: $S = \frac{8}{15}$.

6. Вычислить площадь $S$ одного лепестка лемнискаты Бернулли $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$.

Ответ: $S = \frac{9}{2}$.

7. Вычислить площадь $S$ части плоскости, которая расположена внутри кардиоиды $\rho = 4(1 - \cos\varphi)$, левее прямой $\rho = -3/\cos\varphi$.

Ответ: $S = 8\pi + 9\sqrt{3}$.

8. Вычислить площадь $S$ части плоскости, расположенной внутри кардиоиды $\rho = 4(1 - \cos\varphi)$, правее прямой $\rho = -3/\cos\varphi$.

Ответ: $S = 16\pi - 9\sqrt{3}$.

9. Вычислить площадь $S$ части плоскости, расположенной внутри окружности $\rho = 3\sqrt{3}\sin\varphi$ и вне кардиоиды $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$.

Ответ: $S = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

10. Вычислить площадь $S$ части плоскости, расположенной внутри кардиоиды $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$ и вне окружности $\rho = 3\sqrt{3}\sin\varphi$.

Ответ: $S = \frac{27}{4}(\pi + \sqrt{3})$.

11. Вычислить площадь $S$ части плоскости, ограниченной окружностью $\rho = 6\sin\varphi$ и прямой $\rho = 6/(\cos\varphi + \sin\varphi)$ (меньшую часть).

Ответ: $S = \frac{9}{4}(\pi - 2)$.

12. Вычислить площадь $S$ части плоскости, ограниченной кардиоидой $\rho = 3(1+\cos\varphi)$ и прямой $\rho = 6/(\cos\varphi + \sin\varphi)$ (меньшую часть).

Ответ: $S = \frac{27}{8}\pi$.

13. Вычислить объем $V$ тела, образуемого вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, где $0 \le x \le \pi$.

Ответ: $V = 2\pi^2$.

14. Вычислить объем $V$ тела, образуемого вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

Ответ: $V = \frac{\pi}{5}$.

15. Вычислить объем $V$ тела, образуемого вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $y = 4 - \ln x$, $y = 0$.

Ответ: $V = \frac{1}{2}\pi(e^4 - 1)^2$.

16. Вычислить объем $V$ тела, образуемого вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = \sqrt{2-y}$, $x = 1$.

Ответ: $V = 5\pi$.

17. Вычислить объем $V$ тела, образуемого вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = x^2$.



Ответ: $V = \frac{2}{35}\pi$.

18. Вычислить объем $V$ тела, образуемого вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y = \arccos(x/5)$, $y = \arccos(x/3)$ и $y = 0$.

Ответ: $V = 4\pi^2$.

19. Вычислить длину $l$ дуги эвольвенты окружности, которая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$$

где $0 \le t \le \pi$.

Ответ: $l = a\pi^2/2$.

20. Вычислить длину $l$ дуги гипоциклоиды с тремя заостреньями, которая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 2a\cos t + a\cos 2t, \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t. \end{cases}$$

Ответ: $l = 16a$.

21. Вычислить длину $l$ дуги эпициклоиды с двумя заостреньями, которая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t), \\ y = a(3\sin t - \sin 3t). \end{cases}$$

Ответ: $l = 24a$.

22. Вычислить длину дуги эпициклоиды с тремя заостреньями, которая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a(4\cos t - \cos 4t), \\ y = a(4\sin t - \sin 4t). \end{cases}$$

Ответ: $l = 32a$.

23. Вычислить длину дуги эпициклоиды с четырьмя заостреньями, которая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a(5\cos t - \cos 5t), \\ y = a(5\sin t - \sin 5t). \end{cases}$$

Ответ: $l = 40a$.

24. Вычислить длину дуги линии $y = (2/\pi)\ln\sin(\pi x/2)$, где $1/2 \le x \le 3/2$.

Ответ: $l = (4/\pi)\ln \mathrm{tg}(3\pi/8)$.

25. Вычислить длину дуги линии, которая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$$

где $0 \le t \le 1$.

Ответ: $l = \sqrt{2}(e-1)$.

26. Найти координаты центра масс дуги кривой $y = |x|$, которая расположена внутри окружности $x^2 + y^2 = 2$ и имеет постоянную линейную плотность.

Ответ: $x_C = 0$; $y_C = 0{,}5$.

27. Дуга кривой $y = |x|$ расположена внутри окружности $x^2 + y^2 = 2$. Вычислить моменты инерции дуги относительно координатных осей $Ox$ и $Oy$, если дуга имеет постоянную линейную плотность $l = 3/\sqrt{8}$.

Ответ: $J_x = 1$, $J_y = 1$.

28. Найти координаты центра масс спирали Архимеда $\rho = \varphi$, где $0 \le \varphi \le \pi$, имеющая постоянную линейную плотность $l(\varphi) = 1/\sqrt{\varphi^2 + 1}$. Начало координат совпадает с полюсом полярной системы координат, а ось абсцисс совпадает с полярной осью.

Ответ: $x_C = -2/\pi$, $y_C = 1$.

29. Дуга спирали Архимеда $\rho = \varphi$, где $0 \le \varphi \le \pi$, имеет линейную плотность $l(\varphi) = \varphi^{-2}(\varphi^2 + 1)^{-1/2}$. Вычислить моменты инерции дуги относительно координатных осей, если начало координат совпадает с полюсом полярной системы координат и ось абсцисс совпадает с полярной осью.

Ответ: $J_x = \pi/2$; $J_y = \pi/2$.

30. Найти координаты центра масс однородной дуги эвольвенты окружности, если дуга задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t, \end{cases}$$

где $0 \le t \le \pi$.

Ответ: $x_C = 2 - 12/\pi^2$, $y_C = 6/\pi$.

31. Найти координаты центра масс однородной дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$$

где $0 \le t \le \pi$.

Ответ: $x_C = \dfrac{2}{5}\dfrac{(1 + e^{2\pi})}{(1 - e^{\pi})}$, $y_C = \dfrac{1 + e^{2\pi}}{5(e^{\pi} - 1)}$.

32. Дуга кривой задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$$

где $0 \le t \le \pi$. Выписать моменты инерции дуги относительно координатных осей, если дуга имеет линейную плотность $l(t) = e^{-3t}$.

Ответ: $J_x = \pi / \sqrt{2}$; $J_y = \pi / \sqrt{2}$.

## 5. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

*Задача 1.* Вычислить площадь фигуры, которая расположена на плоскости *Oxy*. Для каждого номера варианта заданы линии, ограничивающие фигуру.

*1.* $y = 2\sqrt{x} - 1$, $y = x - 1$.

*2.* $y = 2\ln x$, $y = \ln(x+2)$, $x = 4$.

*3.* $y = \operatorname{arctg} x$ и прямая, проходящая через начало координат и через точку с абсциссой $x = 1$ на заданной линии.

*4.* $x = 4$, $y = \ln x$ и касательная к этой линии в точке пересечения ее с осью *Ox*.

*5.* $y = e^{-x}$, $y = e^{-2x} - 2$, $x = 0$.

*6.* $y = \arcsin x$, касательная к этой линии в начале координат и прямая $x = 1$.

*7.* $y = \sqrt{x+4}$, $y = 2 - \sqrt{x}$, $y = 0$.

*8.* $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arctg}(2x-4)$, $y = 0$.

*9.* $y = -4$, $y = \ln x$ и касательная к этой линии в точке пересечения ее с осью *Ox*.

*10.* $y = \ln(-x)$, $y = \ln(x+4)$, $y = \ln 6$.

*11.* $y^2 = x/4$, $y^2 = x - 3$.

*12.* $y = \ln(x+1)$, $y = 2\ln(x-1)$, $y = 0$.



*13.* $y = 1 - \sqrt{x}$, $y = 1 - x/3$.

*14.* $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$.

*15.* $y = 3 - x^2$, $y = 2x$.

*16.* $y = \arcsin x$ и прямая, проходящая через концы этой линии.

*17.* $y^2 = x + 2$, $y = 4(3 - x)$.

*18.* $x = 0$, $y = e^x - e$ и касательная к этой линии в точке пересечения ее с осью *Ox*.

*19.* $y = e^x - 1$, $y = 2e^{-x}$, $x = \ln 4$.

*20.* $y = \arcsin x$, $y = -\arcsin(x-2)$, $y = -\pi/2$.

*21.* $y = e^x - 1$, $y = e^x/4$, $y = 1/4$.

*22.* $y = 2\ln x$, $y = -\ln x$, $x = e$.

*23.* $(y-3)^2 = 4x$, $y = x$.

*24.* $y^2 = -4x$, $y^2 = 3 - x$.

*25.* $y = \pi/4$, $y = \operatorname{arctg} x$ и касательная к этой линии в начале координат.

*26.* $y = \ln(x+2)$, $y = 2\ln x$, $y = 0$.

*27.* $y = 4\sqrt{1-x^2}$, $y = 1/\sqrt{1-x^2}$.

*28.* $y = 2/(x+2)^2$, $y = 1/2 - 5x$.

*29.* $y = xe^{2x}$, $y = xe^{-2}$.

*30.* $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} 2x$.

***Задача 2.*** Фигура, расположенная на плоскости *Oxy*, вращается около координатной оси. Вычислить объем полученного тела вращения. Для каждого номера варианта заданы линии, ограничивающие фигуру, и ось вращения.

**1.** $y = \arcsin x$ и прямая, проходящая через концы этой линии; **ось** *Oy*.

**2.** $y = \sqrt{x+2}$, $y = -1/x^2$, $x = 0$, ось *Oy*.

3. $y=x+2,\ y=2-\sqrt{x},\ y=0$; ось $Ox$.
4. $y=x^{1/3},\ y=0,\ x=8$; ось $Oy$.
5. $y=2-\sqrt{x},\ y=(x/2)^2-4,\ x=0$; ось $Oy$.
6. $y=x^3,\ y=x^{1/3}$; ось $Oy$.
7. $y=\ln(x+1),\ x=5,\ y=0$; ось $Oy$.
8. $x=\sqrt{6-y}$, где $y\ge 2$, $x=4-\sqrt{2y}$, где $y\le 2$, $x=0,\ y=0$; ось $Oy$.
9. $y=(x-2)^2,\ y=4-x^2$; ось $Ox$.
10. $y=2-x^2/2,\ y=4-5x^2/2$; ось $Ox$.
11. $y=e^x-1,\ y=2,\ x=0$; ось $Ox$.
12. $(y-2)^2=4-x,\ x=0$; ось $Ox$.
13. $y=\operatorname{arctg} x,\ x=1,\ y=0$; ось $Oy$.
14. $y=\sqrt{2x},\ y=4-x,\ x=0$; ось $Oy$.
15. $y=\ln x,\ y=2-\ln x,\ y=0$; ось $Oy$.
16. $y=4x^2-4,\ y=x^2-1$; ось $Ox$.
17. $y=2\sin x$ и ветвь тангенсоиды $y=\operatorname{tg} x$, которая проходит через начало координат; ось $Ox$.
18. $y=2\sqrt{x},\ y=6-\sqrt{x},\ x=0$; ось $Oy$.
19. $y=5-\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x}-1,\ x=0$; ось $Oy$.
20. $x=4,\ y=\ln x$ и касательная к этой кривой в точке пересечения ее с осью $Ox$; ось $Oy$.
21. $y=x,\ y=\sqrt{x}$; ось $Oy$.
22. $y=(x/2)^2,\ y=x-1,\ x=0$; ось $Oy$.
23. $y=0,\ y=1+\sin x$ (между двумя соседними точками касания линии с осью $Ox$); ось $Ox$.
24. $y=e^x,\ y=4e^{-x},\ y=4$; ось $Ox$.
25. $x=\sqrt{y},\ x=\sqrt{4-y},\ y=0$; ось $Ox$.



26. $y=x,\ x=2-\sqrt{y},\ y=0$; ось $Ox$.
27. $y=\ln(x-1),\ x=3,\ y=0$; ось $Oy$.
28. $x=2,\ y=\arcsin(x/2)$ и касательная к этой кривой в начале координат; ось $Oy$.
29. $x=0,\ y=4-2\sqrt{x}$ и касательная к этой линии в точке пересечения ее с осью $Ox$; ось $Oy$.
30. $y=2\sqrt{x},\ y=6-\sqrt{x},\ y=0$; ось $Ox$.

***Задача 3.*** Вычислить площадь фигуры. Для каждого номера варианта задана соответствующая фигура.

1. Внутри окружности $\rho=\sqrt{6}\cos\varphi$ и одновременно вне лемнискаты $\rho^2=9\cos 2\varphi$.
2. Внутри кардиоиды $\rho=1+\cos\varphi$ и одновременно внутри окружности $\rho=1$.
3. Внутри кардиоиды $\rho=1+\cos\varphi$ и одновременно вне кардиоиды $\rho=3(1-\cos\varphi)$.
4. Внутри окружности $\rho=\sqrt{6}\cos\varphi$ и одновременно внутри лемнискаты $\rho^2=9\cos 2\varphi$.
5. Внутри кардиоиды $\rho=1+\cos\varphi$ и одновременно внутри окружности $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi$.
6. Внутри окружности $\rho=1$ и одновременно внутри кардиоиды $\rho=2(1-\cos\varphi)$.
7. Внутри кардиоиды $\rho=1+\cos\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho=-\cos\varphi$.
8. Внутри кардиоиды $\rho=1+\cos\varphi$ и окружности $\rho=3\cos\varphi$.
9. Внутри окружности $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi$ и одновременно внутри кардиоиды $\rho=1-\cos\varphi$.

*10.* Внутри кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$.

*11.* Внутри кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$ и одновременно внутри окружности $\rho = \cos\varphi$.

*12.* Между двумя лемнискатами $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$ и $\rho^2 = \cos 2\varphi$.

*13.* Внутри лемнискаты $\rho^2 = \cos 2\varphi$ и одновременно внутри окружности $\rho = \sqrt{2}\sin\varphi$.

*14.* Внутри кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$ справа от прямой $\rho = \dfrac{3}{4\cos\varphi}$.

*15.* Внутри кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$.

*16.* Внутри окружности $\rho = 3$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.

*17.* Внутри лемнискаты $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho = 1$.

*18.* Внутри окружности $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$.

*19.* Внутри правой ветви лемнискаты $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho = \sqrt{6}\cos\varphi$.

*20.* Внутри четырехлепестковой розы $\rho = \sqrt{2}|\sin 2\varphi|$ и одновременно вне окружности $\rho = 1$.

*21.* Внутри окружности $\rho = \cos\varphi$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$.

*22.* Внутри окружности $\rho = \sin\varphi$ и одновременно вне трехлепестковой розы $\rho = \sin 3\varphi$.

*23.* Внутри окружности $\rho = 1$ и одновременно внутри кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.



*24.* Внутри кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 1 + \sin\varphi$.

*25.* Внутри кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$ справа от прямой $\rho = 3/(4\cos\varphi)$.

*26.* Внутри кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\varphi$.

*27.* Внутри окружности $\rho = 2\sin\varphi$ и одновременно внутри окружности $\rho = 1$.

*28.* Внутри окружности $\rho = \sin\varphi$ и одновременно вне четырехлепестковой розы $\rho = |\sin 2\varphi|$.

*29.* Внутри окружности $\rho = 3/2$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 3(1 - \cos\varphi)$.

*30.* Внутри кардиоиды $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$.

***Задача 4.*** Вычислить длину дуги или площадь поверхности вращения.

*1.* Дуга кривой $y = \sqrt{e^x + 1}$, расположенная между точками с абсциссами $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, вращается около оси $Ox$. Вычислить площадь поверхности вращения.

*2.* Вычислить длину части кривой $2y = \operatorname{ch}(2x)$, где $2y \le \operatorname{ch} 6$.

*3.* Вычислить длину дуги кривой $y = \sqrt{e^{2x} + 1}/2$, расположенной между точками с абсциссами $x_1 = \dfrac{\ln 3}{2}$ и $x_2 = \dfrac{\ln 24}{2}$.

4. Вычислить длину дуги линии $y=\frac{1}{2}\ln\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, расположенной между точками с абсциссами $x_1=\frac{\ln 2}{2}$ и $x_2=\frac{\ln 5}{4}$.

5. Дуга окружности $x^2+(y-2)^2=9$, для которой $y\ge 0$, вращается около оси $Ox$. Вычислить площадь поверхности вращения.

6. Дуга кривой $y=\frac{\operatorname{ch}(2x)}{2}$, для которой $y\le\frac{\operatorname{ch}6}{2}$, вращается около оси $Ox$. Вычислить площадь поверхности вращения.

7. Вычислить длину дуги кривой $y=1/\cos(2x)$, расположенной между точками с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=\pi/8$.

8. Вычислить площадь поверхности тора, полученного при вращении окружности $x^2+(y-4)^2=1$ около оси $Ox$.

9. Вычислить длину дуги линии $y=(\arcsin e^{3x})/3$ между точками с абсциссами $x_1=\frac{1}{6}\ln\frac{3}{4}$, $x_2=\frac{1}{6}\ln\frac{8}{9}$.

10. Вычислить длину дуги кривой $y^2=4x^3$, лежащей внутри окружности $x^2+y^2=3x/2$.

11. Фигура вращается около оси $Ox$. Она ограничена осью $Ox$, параболой $y=\sqrt{4-x}$, где $x\ge 0, y\ge 0$, и касательной к ней в точке пересечения параболы с осью $Oy$. Вычислить площадь поверхности тела вращения.

12. Вычислить длину дуги кривой $y=(\arcsin e^{2x})/2$, расположенной между точками с абсциссами $x_1=\frac{1}{4}\ln\frac{3}{4}$ и $x_2=0$.

13. Дуга кривой $y=1/\sin 2\varphi$, расположенной между точками с абсциссами $x_1=\pi/6$, $x_2=\pi/4$, вращается вокруг оси $Ox$. Вычислить площадь поверхности вращения.



14. Фигура, ограниченная линиями $y=x^3$, $x=1$ и $y=0$, вращается вокруг оси $Ox$. Вычислить площадь поверхности вращения.

15. Дуга кривой $y=\sqrt{x^3}/3$, на которой $x\le 4$, вращается вокруг оси $Ox$. Вычислить площадь поверхности вращения.

16. Фигура, ограниченная осью $Ox$, кривой $\rho=\cos\varphi$, $y=(x+2)^3$ и касательной к этой кривой в точке пересечения ее с осью $Oy$, вращается около оси $Ox$. Вычислить площадь поверхности тела вращения.

17. Вычислить длину дуги кривой $y=\sqrt{2}\ln(2-(x-3)^2)$, которая лежит выше оси $Ox$.

18. Вычислить длину дуги кривой $y=(3-x)\sqrt{x}/3$, расположенной между точками пересечения ее с осью $Ox$.

19. Вычислить длину дуги кривой $y=6/\sin(x/3)$, расположенной между точками с абсциссами $x_1=\pi/2$ и $x_2=2\pi$.

20. Вычислить длину дуги кардиоиды $\rho=1-\cos\varphi$, которая лежит внутри окружности $\rho=\cos\varphi$, и длину дуги окружности, лежащей внутри данной кардиоиды.

21. Вычислить длину части кривой $y=6/\cos(x/3)$, на которой $y\le 12$.

22. Дуга кривой $y=\sqrt{e^{-2x}+1}/2$, расположенная между точками с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=\ln 4$, вращается около оси $Ox$. Вычислить площадь поверхности вращения.

23. Дуга окружности $x^2+(y-12)^2=169$, на которой $y\ge 0$, вращается около оси $Ox$. Вычислить площадь поверхности вращения.

24. Вычислить длину дуги кривой $y=4\ln\sin(x/4)$, расположенной между точками с абсциссами $x_1=2\pi$ и $x_2=8\pi/3$.

*25.* Вычислить длину дуги кривой $y=(x-12)\sqrt{x}/6$, расположенной между точками пересечения ее с осью *Ox*.
*26.* Дуга кривой $y=(x-12)\sqrt{x}/6$, расположенной между точками пересечения ее с осью *Ox*, вращается около оси *Ox*. Вычислить площадь поверхности вращения.
*27.* Вычислить длину дуги кривой $y=e^{2x}$ между точками с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=\ln 5^{1/4}$.
*28.* Дуга кривой $y^2=6(x+4)$, на которой $x\le 0$, вращается около оси *Ox*. Вычислить площадь поверхности вращения.
*29.* Вычислить длину дуги кривой $y=1/\sin 2x$, лежащей между точками с абсциссами $x_1=\pi/6$ и $x_2=\pi/3$.
*30.* Вычислить длину дуги логарифмической спирали $\rho=4e^{2\varphi}$, расположенной между двумя окружностями $\rho=12$ и $\rho=20$.

***Задача 5.*** Найти координаты центра масс дуги плоской кривой и вычислить моменты инерции относительно заданных осей.
*1.* Дуга кривой $y=2\sqrt{|x|}$ лежит внутри окружности $x^2+y^2=5$ и имеет постоянную линейную плотность. Найти координаты центра масс дуги кривой.
*2.* Дуга кривой $y=2\sqrt{|x|}$ лежит внутри окружности $x^2+y^2=5$ и имеет постоянную линейную плотность. Вычислить момент инерции дуги кривой относительно оси *Ox*.
*3.* Дуга кривой $y=|x|^{3/2}$ лежит внутри окружности $x^2+y^2=2$ и имеет постоянную линейную плотность. Найти координаты центра масс дуги кривой.



*4.* Дуга кривой $y=|x|^{3/2}$ лежит внутри окружности $x^2+y^2=2$ и имеет постоянную линейную плотность. Вычислить момент инерции дуги кривой относительно оси *Ox*.
*5.* Дуга цепной линии $y=\operatorname{ch}x$ имеет постоянную линейную плотность и расположена между точками с абсциссами $x_1=-\ln 2$ и $x_2=\ln 2$. Найти координаты центра масс дуги.
*6.* Дуга цепной линии $y=\operatorname{ch}x$ имеет постоянную линейную плотность и расположена между точками с абсциссами $x_1=-\ln 2$ и $x_2=\ln 2$. Вычислить момент инерции дуги кривой относительно оси *Ox*.
*7.* Дуга кривой имеет постоянную линейную плотность и задана уравнением $y=\operatorname{Arch}x$, где $x\le 2$. Найти координаты центра масс дуги.
*8.* Дуга кривой имеет постоянную линейную плотность и задана уравнением $y=\operatorname{Arch}x$, где $x\le 2$. Вычислить момент инерции дуги кривой относительно оси *Ox*.
*9.* Найти координаты центра масс дуги кардиоиды $\rho=1+\cos\varphi$, где $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.
*10.* Дуга кардиоиды задана уравнением $\rho=1+\cos\varphi$, где $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$. Вычислить момент инерции дуги относительно полярной оси.
*11.* Найти координаты центра масс дуги кривой, которая задана уравнением $\rho=|\varphi|$, где $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$, и имеет линейную плотность $l(\varphi)=(\varphi^2+1)^{-1/2}$.
*12.* Дуга кривой задана уравнением $\rho=|\varphi|$, где $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$, и имеет плотность $l(\varphi)=\varphi^{-2}(\varphi^2+1)^{-1/2}$. Вычислить момент инерции дуги относительно полярной оси.
*13.* Найти координаты центра масс одной арки циклоиды, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$$

где $0 \le t \le 2\pi$.

***14.*** Найти моменты инерции относительно оси $Ox$ одной арки циклоиды, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$$

где $0 \le t \le 2\pi$.

***15.*** Найти координаты центра масс дуги астроиды, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$$

где $0 \le t \le \pi$.

***16.*** Дуга параболы $x = y^2/2$ имеет постоянную линейную плотность и лежит внутри эллипса $2x^2 + y^2 = 12$. Найти координаты центра масс дуги кривой.

***17.*** Дуга кривой $y = 2\sqrt{|x|}$ лежит внутри окружности $x^2 + y^2 = 5$ и имеет постоянную линейную плотность. Вычислить момент инерции дуги кривой относительно оси $Oy$.

***18.*** Дуга кривой с постоянной линейной плотностью задана уравнением $|y| = x^{3/2}$ и лежит внутри окружности $x^2 + y^2 = 2$. Найти координаты центра масс дуги кривой.

***19.*** Дуга кривой $y = |x|^{3/2}$ лежит внутри окружности $x^2 + y^2 = 2$ и имеет постоянную линейную плотность. Вычислить момент инерции дуги кривой относительно оси $Oy$.



***20.*** Дуга цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ с линейной плотностью $l(x) = \operatorname{sech} x$ расположена между точками с абсциссами $x_1 = -\ln 2$ и $x_2 = \ln 2$. Найти координаты центра масс дуги.

***21.*** Дуга цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ имеет постоянную линейную плотность и расположена между точками с абсциссами $x_1 = -\ln 2$ и $x_2 = \ln 2$. Вычислить момент инерции дуги кривой относительно оси $Oy$.

***22.*** Дуга цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ с линейной плотностью $l(x) = \operatorname{sech}^2 x$ расположена между точками с абсциссами $x_1 = -\ln 2$ и $x_2 = \ln 2$. Найти координаты центра масс дуги.

***23.*** Дуга кривой $y = \operatorname{Arch} x$, на которой $x \le 2$, имеет постоянную линейную плотность. Вычислить момент инерции дуги кривой относительно оси $Oy$.

***24.*** Найти координаты центра масс дуги кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$, где $\pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2$.

***25.*** Дуга кардиоиды задана уравнением $\rho = 1 + \cos\varphi$, где $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Вычислить момент инерции дуги относительно оси, проходящей через полюс полярной системы координат перпендикулярно полярной оси.

***26.*** Найти координаты центра масс дуги кривой $\rho = |\varphi|$, где $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, с линейной плотностью $l(\varphi) = |\varphi|(\varphi^2 + 1)^{-1/2}$.

***27.*** Дуга кривой задана уравнением $\rho = |\varphi|$, где $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, с плотностью $l(\varphi) = \varphi^{-2}(\varphi^2 + 1)^{-1/2}$. Вычислить момент инерции дуги относительно оси, проходящей через полюс полярной системы координат перпендикулярно полярной оси.

*28.* Найти координаты центра масс арки циклоиды, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = (t - \sin t)/2, \\ y = (1 - \cos t)/2, \end{cases}$$

где $0 \le t \le \pi$.

*29.* Найти моменты инерции относительно оси $Oy$ одной арки циклоиды, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$$

где $0 \le t \le 2\pi$.

*30.* Найти координаты центра масс дуги астроиды, заданной уравнением $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$ и расположенной в первом и четвертом квадрантах.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Копаев Анатолий Владимирович
Маркелов Геннадий Евгеньевич
Тесалина Анастасия Андреевна

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Редактор *О.М. Королева*
Корректор *И.Е. Мелентьева*

Изд. лиц. № 020523 от 25.04.97
Подписано в печать 25.02.02. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печ. л. 4,5. Усл. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 4,1. Тираж 100 экз. Изд. № 37.
Заказ № 15

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана,
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.