

Модуль 1 для группы ИБМ7-22, весенний семестр

Домашнее задание 1 "Интегральное исчисление"

Задача 1. Вычислить интеграл.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x^2}} dx$	$\int \frac{dx}{x - 4\sqrt[3]{x^2}}$	$\int \frac{dx^2}{\sqrt[3]{x-2}}$
<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
$\int \frac{1}{(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} dx$	$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+2x-x^2}}$
<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
$\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$	$\int \frac{\sqrt{x} d\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$	$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[3]{x^2}} dx$
<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[3]{x^2}} dx$	$\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x} + 4)\sqrt{x}}$	$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+5}} dx$
<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
$\int \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt[3]{x^2}} dx$	$\int \frac{1}{\sqrt{x-2} + \sqrt[4]{x-2}} dx$	$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}} dx$
<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>
$\int \frac{\sqrt[4]{x^3} - 2}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx$	$\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})\sqrt[6]{x^5}}$	$\int \frac{dx}{x - \sqrt[3]{x}}$
<b>19</b>	<b>20</b>	<b>21</b>
$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$	$\int \frac{d(3x)}{(5\sqrt{3} + \sqrt{3x})\sqrt{3+3x}}$	$\int \frac{\sqrt[6]{x^5}}{2\sqrt{x} + \sqrt[6]{x^7}} dx$
<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>
$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$	$\int \frac{d(2x)}{(4-2x)\sqrt{1+x}}$	$\int \frac{3x}{\sqrt[3]{27x-27}} dx$

**Задача 2.** Вычислить интеграл.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
$\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2-6x+2}} dx$	$\int \frac{3x-5}{\sqrt{-x^2+2x+6}} dx$	$\int \frac{x-3}{\sqrt{-x^2-4x+1}} dx$	$\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2-4x-1}} dx$
<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
$\int \frac{4x+5}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx$	$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+4x+7}} dx$	$\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+6x+12}} dx$	$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+4x+3}} dx$
<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2-2x+7}} dx$	$\int \frac{x+2}{\sqrt{1-4x-x^2}} dx$	$\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}} dx$	$\int \frac{x-4}{\sqrt{2-x-x^2}} dx$
<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>
$\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}} dx$	$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+8x+1}} dx$	$\int \frac{2-x}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$	$\int \frac{3x+4}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx$
<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$	$\int \frac{-x-5}{\sqrt{6x-x^2}} dx$	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}} dx$	$\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx$
<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x-5}} dx$	$\int \frac{1-x}{\sqrt{x^2-8x+4}} dx$	$\int \frac{x+4}{\sqrt{2-2x-x^2}} dx$	$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-x^2-2x}} dx$

**Задача 3.** Вычислить интеграл.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
$\int \operatorname{tg}^5(4x) dx$	$\int \frac{\sin^2(2x)}{\cos^6(2x)} dx$	$\int \frac{\sin^4(2x)}{\cos^{-3}(2x)} dx$	$\int \operatorname{tg}^4(3x) dx$
<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
$\int \frac{\cos^3(2x)}{\sin^5(2x)} dx$	$\int \frac{\sin^3(3x)}{\cos^{-1/2}(3x)} dx$	$\int \operatorname{ctg}^5(2x) dx$	$\int \frac{\cos^4(3x)}{\sin^8(3x)} dx$
<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
$\int \operatorname{ctg}^4(3x) dx$	$\int \frac{\cos^3(4x)}{\sin^5(4x)} dx$	$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx$	$\int \frac{\sin^{-2} x}{\cos^{-6} x} dx$
<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>
$\int \operatorname{tg}^3(2x) dx$	$\int \frac{\cos(x + \pi/4)}{\sin x \cos x} dx$	$\int \frac{dx}{\cos^5 x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \sin^3 x}}$
<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$	$\int \sin^6 2x dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^8 x}}$	$\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{3} \sin^3 \frac{x}{3}}$
<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>
$\int \sin^{-3} x dx$	$\int \frac{\cos^2 2x}{\cos^{-1} x} dx$	$\int \sin 3x \cos 5x dx$	$\int \sin 10x \sin 15x dx$

**Задача 4.** Найти длину дуги кривой.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
$\begin{cases} x = 3 \cos^3 t \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}, t \in \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right].$	$y = \ln x, x \in \left[ \sqrt{3}, \sqrt{15} \right].$	$r = 5e^{5\varphi/12}, \varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$
<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t) \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases}, t \in \left[ 0; \frac{2\pi}{3} \right].$	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, x \in [1, 2].$	$r = 2e^{4\varphi/3}, \varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$
<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
$\begin{cases} x = 5(1 - \cos t) \\ y = 5(t - \sin t) \end{cases}, t \in [0; 2\pi].$	$y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, x \in \left[ 0, \frac{7}{9} \right].$	$r = \sqrt{2}e^\varphi, \varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$
<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
$\begin{cases} x = t + 12 \\ y = 1 - \ln \sin t \end{cases}, t \in \left[ \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right].$	$y = \ln \frac{5}{2x}, x \in \left[ \sqrt{3}, \sqrt{8} \right].$	$r = 3e^{3\varphi/4}, \varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{3} \right].$
<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \left( \frac{1}{3} - t^2 \right) \end{cases}, t \in \left[ 0; \frac{1}{\sqrt{3}} \right].$	$y = e^x + 6, x \in \left[ \ln \sqrt{8}, \ln \sqrt{15} \right].$	$r = 4e^{4\varphi/3}, \varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{3} \right].$
<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>
$\begin{cases} x = t^6/6 \\ y = 2 - t^4/4 \end{cases}, t \in \left[ 0; \sqrt[4]{8} \right].$	$y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, x \in \left[ \frac{1}{4}, 1 \right].$	$r = 2\varphi, \varphi \in \left[ 0, \frac{5\pi}{12} \right].$
<b>19</b>	<b>20</b>	<b>21</b>
$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases}, t \in \left[ 0; \frac{\pi}{3} \right].$	$y = \ln(x^2 - 1), x \in [2, 3].$	$r = 8(1 - \cos \varphi), \varphi \in \left[ -\frac{2\pi}{3}, 0 \right].$
<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>
$\begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}, t \in [0; \pi].$	$y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, x \in \left[ 0, \frac{8}{9} \right].$	$r = 6 \cos \varphi, \varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{3} \right].$

**Задача 5.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями. Выполнить чертёж.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t \end{cases}, x \geq 2.$	$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = 2\sqrt{2} \sin t \end{cases}, y \geq 2.$	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), x \in [0; 8\pi], \\ y = 4(1 - \cos t), y \geq 4. \end{cases}$
<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
$\begin{cases} x = 16 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}, x \geq 2.$	$\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), x \in [0; 6\pi] \\ y = 3(1 - \cos t), y \geq 3. \end{cases}$
<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
$\begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t \end{cases}, x \geq 4.$	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t \\ y = 3\sqrt{2} \sin t \end{cases}, y \geq 3.$	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), x \in [0; 8\pi], \\ y = 4(1 - \cos t), y \geq 4. \end{cases}$
<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
$\begin{cases} x = 32 \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, x \geq 4.$	$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 8 \sin t \end{cases}, y \geq 4.$	$\begin{cases} x = 6(t - \sin t), x \in [0; 12\pi], \\ y = 6(1 - \cos t), y \geq 6. \end{cases}$
<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}, x \geq 3\sqrt{3}.$	$\begin{cases} x = 6 \cos t \\ y = 84 \sin t \end{cases}, y \geq 2\sqrt{3}.$	$\begin{cases} x = 10(t - \sin t), x \in [0; 20\pi], \\ y = 10(1 - \cos t), y \geq 15. \end{cases}$
<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>
$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t \end{cases}, x \geq 1.$	$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = 4\sqrt{2} \sin t \end{cases}, y \geq 4.$	$\begin{cases} x = (t - \sin t), x \in [0; 2\pi], \\ y = (1 - \cos t), y \geq 1. \end{cases}$
<b>19</b>	<b>20</b>	<b>21</b>
$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}, x \geq 1.$	$\begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}, y \geq 2.$	$\begin{cases} x = 8(t - \sin t), x \in [0; 16\pi], \\ y = 8(1 - \cos t), y \geq 12. \end{cases}$
<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>
$\begin{cases} x = 24 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}, x \geq 9\sqrt{3}.$	$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 8 \sin t \end{cases}, y \geq 4\sqrt{3}.$	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), x \in [0; 4\pi], \\ y = 2(1 - \cos t), y \geq 2. \end{cases}$

**Задача 6.** Найти объём поверхности вращения.

В вариантах 1-12 вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций вокруг оси  $Ox$ , а в вариантах 13-24 ось вращения  $Oy$ .

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
$y = x^2, y^2 - x = 0.$	$y = -x^2 + 5x - 6, y \geq 0.$	$y = 3 \sin x, y = \sin x, x \in [0; \pi].$
<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
$y = 5 \cos x, y = \cos x, x = 0, x \geq 0.$	$y = \sin^2 x, x = \frac{\pi}{2}, y \geq 0.$	$x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1.$
<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
$y = xe^x, y = 0, x = 1.$	$y = 2x - x^2, y = -x + 2, x \in [1; 2]$	$y = e^{1-x}, y \geq 0, x \in [0; 1].$
<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
$y = 1 - x^2, x = \sqrt{y-2}, x \in [0; 1].$	$y = x^2, x \in [1; 2].$	$y = x^3, y = \sqrt{x}, x \in [0; 1].$
<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \left( \frac{1}{3} - t^2 \right), t \in \left[ 0; \frac{1}{\sqrt{3}} \right]. \end{cases}$	$y = e^x + 6, x \in [\ln \sqrt{8}, \ln \sqrt{15}].$	$r = 4e^{4\varphi/3}, \varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{3} \right].$
<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>
$\begin{cases} x = t^6/6 \\ y = 2 - t^4/4 \end{cases}, t \in [0; \sqrt[4]{8}].$	$y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, x \in \left[ \frac{1}{4}, 1 \right].$	$r = 2\varphi, \varphi \in \left[ 0, \frac{5\pi}{12} \right].$
<b>19</b>	<b>20</b>	<b>21</b>
$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases}, t \in \left[ 0; \frac{\pi}{3} \right].$	$y = \ln(x^2 - 1), x \in [2, 3].$	$r = 8(1 - \cos \varphi), \varphi \in \left[ -\frac{2\pi}{3}, 0 \right].$
<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>
$\begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}, t \in [0; \pi].$	$y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, x \in \left[ 0, \frac{8}{9} \right].$	$r = 6 \cos \varphi, \varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{3} \right].$