Раздел I
Линейная алгебра (с элементами аналитической геометрии)

Глава 1
Матрицы и определители

1.1. Матрицы и операции над ними

Справочный материал

1. Сложение (*вычитание*) *матриц* одинакового размера осуществляется поэлементно:

$$C = A + B, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij};\quad i = 1, 2, \ldots, m;\quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \textbf{(1.1)}$$

2. Умножение матрицы на число — каждый элемент матрицы умножается на это число:

$$B = \lambda A, \text{ если } b_{ij} = \lambda a_{ij};\quad i = 1, 2, \ldots, m;\quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \textbf{(1.2)}$$

3. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матрицы $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица C, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{is};\quad i = 1, 2, \ldots, m;\quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \textbf{(1.3)}$$

4. Транспонирование матрицы — переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка

$$a'_{ij} = a_{ji};\quad i = 1, \ldots, m;\quad j = 1, \ldots, n.$$

Свойства операции транспонирования:

$$(A')' = A; \quad (\lambda A)' = \lambda A'; \quad (A+B)' = A' + B'; \quad (AB)' = B'A'. \qquad \mathbf{(1.4)}$$

5. *Возведение квадратной матрицы A в целую положительную степень m $(m > 1)$*: $A^m = \underbrace{A \cdot A \ldots A}_{m \text{ раз}}$.

6. *Следом* $\mathrm{tr}A$ *квадратной матрицы A* называется сумма ее диагональных элементов: $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

7. *Матрица A^{-1}, обратная* к квадратной матрице A, — такая матрица, что

$$A^{-1}A = A\,A^{-1} = E, \qquad \mathbf{(1.5)}$$

где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица того же порядка[1].

Свойства обратных матриц:

$$(A^{-1})^{-1} = A; \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \qquad (A^{-1})' = (A')^{-1}. \qquad \mathbf{(1.6)}$$

При умножении матриц обратите внимание на следующее:

а) Произведение матриц, вообще говоря, некоммутативно, т.е. $AB \neq BA$. Если AB существует, то BA — не обязательно. Даже если оба произведения существуют и представляют матрицы одного размера, то в общем случае $AB \neq BA$.

б) В равенствах $AE = A$ и $EA = A$, где A — матрица размера $m \times n$, E — единичная матрица: в первом равенстве — n-го порядка, во втором равенстве — m-го порядка.

1.1. Найти матрицу $C = A' - 3B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Найдем матрицу A', транспонированную к A, т.е. поменяем строки и столбцы местами:

[1] Условия существования и методы нахождения обратной матрицы приведены в § **1.2**.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу $3B$, умножив все элементы матрицы B на 3. Произведем вычитание матриц A'и $3B$ (поэлементно):

$$C = A' - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 15 & 18 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -13 & -17 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

1.2. Найти произведение матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Произведение матриц $\underset{2\times3}{A}\,\underset{2\times2}{B}$ не существует; поэтому найдем произведение $\underset{2\times2}{B}\,\underset{2\times3}{A} = \underset{2\times3}{C}$. Выделим элементы матрицы C; вначале — элементы 1-й строки:

c_{11} — это сумма произведений элементов 1-й строки первой матрицы — сомножителя B на элементы 1-го столбца второй матрицы сомножителя A:

$$c_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 3;$$

аналогично

$$c_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 4;$$

$$c_{13} = b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 5.$$

Точно так же находятся элементы 2-й строки матрицы C:

$c_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 8;$

$c_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 14;$

$c_{23} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} = 5 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 5.$

Таким образом,

$$C = BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 14 & 5 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

1.3. Вычислить значение многочлена $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Вместо x подставляем в функцию $f(x)$ матрицу A, вместо числа 3 используем матрицу $3E$, где E — единичная матрица того же порядка, что и A.

Найдем:

$$2A^2 = 2 \cdot A \cdot A = 2\cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix};$$

$$5A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \qquad 3E = 3\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем

$$f(A) = 2A^2 - 5A + 3E =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

1.4. Найти след матрицы $C = AB$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Найдем $\underset{2\times2}{C} = \underset{2\times3}{A}\,\underset{3\times2}{B} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 8 & 29 \end{pmatrix}$. Матрица C — квадратная, ее след равен сумме диагональных элементов: $\operatorname{tr} C = -1 + 29 = 28$. ▶

1.5. Выяснить, является ли матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Найдем произведения AA^{-1} и $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Раздел I
Линейная алгебра (с элементами аналитической геометрии)

Глава 1
Матрицы и определители

1.1. Матрицы и операции над ними

Справочный материал

1. Сложение (*вычитание*) *матриц* одинакового размера осуществляется поэлементно:

$$C = A + B, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij};\quad i = 1, 2, \ldots, m;\quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \textbf{(1.1)}$$

2. Умножение матрицы на число — каждый элемент матрицы умножается на это число:

$$B = \lambda A, \text{ если } b_{ij} = \lambda a_{ij};\quad i = 1, 2, \ldots, m;\quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \textbf{(1.2)}$$

3. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матрицы $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица C, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{is};\quad i = 1, 2, \ldots, m;\quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \textbf{(1.3)}$$

4. Транспонирование матрицы — переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка

$$a'_{ij} = a_{ji};\quad i = 1, \ldots, m;\quad j = 1, \ldots, n.$$

Свойства операции транспонирования:

$$(A')' = A; \quad (\lambda A)' = \lambda A'; \; (A+B)' = A' + B'; \; (AB)' = B'A'. \qquad \textbf{(1.4)}$$

5. Возведение квадратной матрицы A в целую положительную степень m $(m>1)$: $A^m = \underbrace{A \cdot A \dots A}_{m \text{ раз}}$.

6. Следом $\mathrm{tr}A$ *квадратной матрицы A* называется сумма ее диагональных элементов: $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

7. *Матрица A^{-1}, обратная* к квадратной матрице A, — такая матрица, что

$$A^{-1}A = A\,A^{-1} = E, \qquad \textbf{(1.5)}$$

где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица того же порядка[1].

Свойства обратных матриц:

$$(A^{-1})^{-1} = A; \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \qquad (A^{-1})' = (A')^{-1}. \qquad \textbf{(1.6)}$$

При умножении матриц обратите внимание на следующее:

а) Произведение матриц, вообще говоря, некоммутативно, т.е. $AB \neq BA$. Если AB существует, то BA — не обязательно. Даже если оба произведения существуют и представляют матрицы одного размера, то в общем случае $AB \neq BA$.

б) В равенствах $AE = A$ и $EA = A$, где A — матрица размера $m \times n$, E — единичная матрица: в первом равенстве — n-го порядка, во втором равенстве — m-го порядка.

1.1. Найти матрицу $C = A' - 3B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Найдем матрицу A', транспонированную к A, т.е. поменяем строки и столбцы местами:

[1] Условия существования и методы нахождения обратной матрицы приведены в § **1.2**.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу $3B$, умножив все элементы матрицы B на 3. Произведем вычитание матриц A'и $3B$ (поэлементно):

$$C = A' - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 15 & 18 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -13 & -17 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

1.2. Найти произведение матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Произведение матриц $\underset{2\times3}{A}\,\underset{2\times2}{B}$ не существует; поэтому найдем произведение $\underset{2\times2}{B}\,\underset{2\times3}{A} = \underset{2\times3}{C}$. Выделим элементы матрицы C; вначале — элементы 1-й строки:

c_{11} — это сумма произведений элементов 1-й строки первой матрицы — сомножителя B на элементы 1-го столбца второй матрицы сомножителя A:

$$c_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 3;$$

аналогично

$$c_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 4;$$

$$c_{13} = b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 5.$$

Точно так же находятся элементы 2-й строки матрицы C:

$$c_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 8;$$

$$c_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 14;$$

$$c_{23} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} = 5 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 5.$$

Таким образом,

$$C = BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 14 & 5 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

1.3. Вычислить значение многочлена $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Вместо x подставляем в функцию $f(x)$ матрицу A, вместо числа 3 используем матрицу $3E$, где E — единичная матрица того же порядка, что и A.

Найдем:

$$2A^2 = 2 \cdot A \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix};$$

$$5A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \qquad 3E = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем

$$f(A) = 2A^2 - 5A + 3E =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

1.4. Найти след матрицы $C = AB$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Найдем $\underset{2\times2}{C} = \underset{2\times3}{A}\ \underset{3\times2}{B} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 8 & 29 \end{pmatrix}$. Матрица C — квадратная, ее след равен сумме диагональных элементов: $\operatorname{tr} C = -1 + 29 = 28$. ▶

1.5. Выяснить, является ли матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Найдем произведения AA^{-1} и $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением (1.5) данные матрицы являются взаимно обратными.▶

Найти матрицу $C = -5A + 2B$:

1.6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **1.7.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти произведения матриц:

1.8. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **1.9.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.10. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. **1.11.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти те из произведений матриц AB и BA, которые существуют:

1.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.13.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.14. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.15.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу A^n и ее след:

1.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; $n = 3$. **1.17.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; $n = 5$.

Найти следы следующих матриц:

1.18. $C = AB$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.19. $C = AB$ и $D = BA$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы A:

1.20. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.21. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$,
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, являются ли взаимно обратными данные матрицы A и B:

1.22. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. **1.23.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2. Определители квадратных матриц. Обратная матрица

Справочный материал

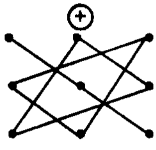
1. Определитель квадратной матрицы *2-го порядка* вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad \textbf{(1.7)}$$

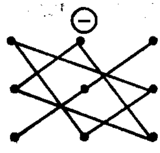
2. Определитель квадратной матрицы *3-го порядка* может быть вычислен по правилу треугольников, или правилу Сарруса.

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$
$$- a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}, \qquad \textbf{(1.8)}$$

где соответствующие произведения элементов берутся либо со знаком «+» (левая схема), либо со знаком «–» (правая схема):



$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$



3. Определитель квадратной матрицы *n-го порядка* определяется более сложным образом. Он может быть вычислен по теореме Лапласа (п. 5).

4. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется ее минор M_{ij}, т.е. определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad \textbf{(1.9)}$$

5. Теорема Лапласа[1]. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения:

$$A = \sum_{s=1}^{n} a_{ij} A_{is} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} A_{sj}. \qquad \textbf{(1.10)}$$

6. Определитель треугольной и, в частности, ***диагональной матрицы*** равен произведению ее диагональных элементов.

7. Некоторые *свойства* определителей квадратных матриц:

а) определитель не изменяется при транспонировании матриц;

б) определитель меняет знак, если поменять местами любые две строки (или столбца) матрицы;

в) определитель равен нулю, если: все элементы любой строки (или столбца) равны нулю; элементы любых двух строк (или столбцов) пропорциональны либо (в частном случае) равны;

г) определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на число, отличное от нуля.

8. Квадратная матрица A называется ***невырожденной*** или ***неособенной***, если ее определитель отличен от нуля, т.е. $|A| \neq 0$.

9. Обратная матрица (см. § **1.1**, п.7) A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$. В этом случае ее можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}, \qquad \textbf{(1.11)}$$

где $\tilde{A}$ — присоединенная матрица, элементы которой $A_{ks} = A'_{ks}$ равны алгебраическим дополнениям элементов матрицы A', транспонированной к матрице A.

10. Элементарные преобразования матрицы (приведены в § **1.3**, п. 3).

[1] Точнее данная теорема является частным случаем теоремы Лапласа.

1.24. Вычислить определители матрицы A:

$$a)\quad A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 6 & 1\end{pmatrix};\qquad б)\quad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е:

а) По формуле **(1.7)** $|A|=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 1-5\cdot 6=-28$.

б) Определитель вычисляется по формуле **(1.8)**. Запоминать эту формулу не следует, достаточно применить правило треугольников, согласно которому три произведения элементов, показанных на левой схеме (п. 2), берутся со знаком «+», а три других произведения элементов, показанных на правой схеме (п. 2), — со знаком «–»:

$$|A| = 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 2 + 0\cdot 5\cdot 3 - 0\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 5 = -15. \blacktriangleright$$

1.25. Вычислить тот же определитель, приведенный в задаче **1.24**, *б*, используя его разложение по элементам: *а*) первой строки; *б*) второго столбца.

Р е ш е н и е:

а) Находим алгебраические дополнения элементов первой строки по формуле **(1.9)**:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-5;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-5;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=15.$$

Теперь по теореме Лапласа **(1.10)**:

$$|A| = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} = 1\cdot(-5) + 2\cdot(-5) + 0\cdot 15 = -15.$$

б) Находим алгебраические дополнения элементов второго столбца:

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-5;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & 2\end{vmatrix}=2.$$

Теперь по формуле **(1.8)**:

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = 2\cdot(-5) + 1\cdot 1 - 3\cdot 2 = -15. \blacktriangleright$$

1.26. Вычислить определитель матрицы четвертого порядка:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. С помощью эквивалентных преобразований приведем матрицу A к треугольному виду. Если возможно, перестановкой строк (столбцов) добиваемся того, чтобы элемент $a_{11} = 1$. В данном случае достаточно поменять местами 1-й и 3-й столбцы; при этом меняется знак определителя матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Умножая элементы 1-й строки на числа $(-a_{i1})$; $i = 1, 2, 3, 4$, т.е. в данном случае на числа 1, (–2), (–1), и прибавляя их соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добиваемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 \quad -2 \quad -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Далее, если возможно, перестановкой строк (столбцов) добиваемся, чтобы новый элемент $a_{22} = 1$. В данном случае это возможно, если переставить 2-ю и 3-ю строки; при этом меняется знак определителя. Умножая элементы 2-й строки, полученной матрицы на числа $(-a_{i2})$ $(i = 3, 4)$, в данном случае на числа (–2) и 1, добиваемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме a_{22}) равнялись нулю.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -2 \quad 1 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 1 \\ \\ \end{matrix}.$$

Для получения треугольной матрицы в данном случае достаточно прибавить элементы 3-й строки полученной матрицы к элементам 4-й. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9. \blacktriangleright$$

1.27. Найти матрицу, обратную к данной:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е:

а) Находим определитель матрицы $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=5$. Так как $|A|\neq 0$, то матрица A — невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует и единственна.

б) Транспонируем исходную матрицу:

$$A'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

в) Находим алгебраические дополнения A'_{ij} всех элементов транспонированной матрицы A' и составляем из них присоединенную матрицу $\widetilde{A}$:

$$A'_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1;\quad A'_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3;\quad A'_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2;$$

$$A'_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3;\quad A'_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1;\quad A'_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1;$$

$$A'_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1;\quad A'_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2;\quad A'_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3,$$

т.е. $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}.$

г) Находим обратную матрицу по формуле **(1.11)**:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/5 & 3/5 & -2/5\\ -3/5 & 1/5 & 1/5\\ 1/5 & -2/5 & 3/5\end{pmatrix}.$$

д) Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формуле (**1.5**):

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \text{ где } E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ — единичная матрица}$$

3-го порядка.

1.28. Найти матрицу, обратную к матрице A, используя преобразования исходной матрицы к единичной E:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\5&2&4\\7&3&4\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Определитель матрицы $|A| = -20 \neq 0$, значит, матрица A имеет обратную, матрицу A можно привести к единичной E элементарными преобразованиями только строк или только столбцов (см. § **1.3**, п. 3), при этом единичная матрица, подвергаемая тем же преобразованиям, перейдет в матрицу A^{-1}. Удобно совершать элементарные преобразования над матрицами A и E одновременно, записывая обе матрицы рядом, через черту в виде объединенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\5&2&4&0&1&0\\7&3&4&0&0&1\end{array}\right).$$

Поменяем местами 1-й и 2-й столбцы.

Затем к элементам 3-го столбца прибавим элементы 1-го, а к элементам 2-го — 1-го, умноженные на (–2). Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&0&1&0\\2&5&4&1&0&0\\3&7&4&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\2&1&6&1&-2&1\\3&1&7&0&0&1\end{array}\right).$$

К элементам 1-го столбца прибавим элементы 2-го, умноженные на (–2), а к элементам 3-го столбца — умноженные на (–6). Далее в полученной матрице к элементам 1-го и 2-го столбцов прибавляем элементы 3-го, умноженные на (–1):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -15 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

$$(-1) \quad (-1) \quad (-1) \quad (-1)$$

Слева получили единичную матрицу. Найденная справа от черты квадратная матрица является обратной к исходной матрице A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить определители второго порядка:

1.29. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$. **1.30.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$. **1.31.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

Вычислить определители третьего порядка:

1.32. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **1.33.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **1.34.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Доказать тождества:

1.35. $$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

1.36. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Решить уравнения:

1.37. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$. **1.38.** $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Вычислить определитель:

1.39. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, разлагая его по элементам 3-й строки.

1.40. $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ b & 3 & 1 & 4 \\ c & 0 & 1 & 2 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, разлагая его по элементам 1-го столбца.

Вычислить определители 4-го порядка:

1.41. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. **1.42.** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

1.43. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ -5 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}$. **1.44.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами — с помощью присоединенной матрицы и с помощью элементарных преобразований:

1.45. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **1.46.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.47. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **1.48.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

1.49. $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&3&5\\3&5&7\end{pmatrix}$.

1.50. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\3&8&0&-4\\2&2&-4&-3\\3&8&-1&-6\end{pmatrix}$.

1.3. Ранг матрицы. Линейная независимость строк (столбцов) матрицы

Справочный материал

1. Рангом матрицы A (rang A или $r(A)$) называется наивысший порядок отличных от нуля миноров[1] этой матрицы.

2. Свойства ранга матрицы:

а) если матрица A имеет размеры $m \times n$, то $\operatorname{rang} A \le \min(m;\ n)$;

б) $\operatorname{rang} A = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы A равны 0;

в) если матрица A – квадратная порядка n, то $\operatorname{rang} A = n$ тогда и только тогда, когда $|A| \ne 0$.

3. Элементарные преобразования, не меняющие *ранга* матрицы:

а) отбрасывание нулевой строки (столбца);

б) умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю;

в) изменение порядка строк (столбцов) матрицы;

г) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;

д) транспонирование матрицы.

4. С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1r}&\dots&a_{1k}\\0&a_{22}&\dots&a_{2r}&\dots&a_{2k}\\.&.&.&.&.&.\\0&0&\dots&a_{rr}&\dots&a_{rk}\end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \ne 0,\ i=1,\dots,r;\ \ r \le k$.

Ранг ступенчатой матрицы равен r.

5. Строки (столбцы) матрицы $e_1, e_2, \dots, e_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не равные од-

[1] См. учебник, с. 29.

новременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке: $\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{e}_m = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} = (0,0, \ldots, 0)$. В противном случае строки матрицы называются *линейно зависимыми.*

6. *Теорема о ранге матрицы*:

Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов.

1.51. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Матрица A имеет размер 4×3, значит, $r(A) \le 3$. С помощью элементарных преобразований, не меняющих ранг матрицы, приведем матрицу A к ступенчатому виду.

1) Транспонируем матрицу A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad -1 \quad -1 \quad .$$

2) Умножим элементы 1-й строки на (–1), сложим ее со 2-й и 3-й строками матрицы. В новой матрице поменяем местами 2-ю и 3-ю строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad -3 \quad .$$

3) Умножим элементы 2-й строки на 3 и сложим с элементами 3-й строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу размера 3×4, у которой 3 ненулевых элемента на главной диагонали, значит, $r(A) = 3$. Эта матрица имеет ненулевой минор 3-го порядка, например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$.▶

1.52. Выяснить, при каком значении параметра a матрица A имеет 3 линейно независимые строки:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

◀ Р е ш е н и е. Матрица A имеет 3 линейно независимые строки, если ее ранг равен 3, т.е. $|A| \neq 0$.

Вычислим определитель матрицы A по правилу треугольников:

$|A| = -a - 6 + 8 = 2 - a$; $|A| \neq 0$, откуда $a \neq 2$, т.е. при всех значениях a, кроме $a = 2$, все строки матрицы линейно независимы.▶

1.53. Определить максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. С помощью элементарных преобразований, не меняющих ранга матрицы, приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) & (-3) \\ & \\ & \\ & \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отбросив нулевую строку, найдем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу, у которой существует минор 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, значит, ранг матрицы равен 3, и исходная матрица имеет 3 линейно независимые строки (или столбца).▶

Найти ранги матриц:

1.54. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1.55. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.56. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.57. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти максимальное число линейно независимых строк матриц:

1.58. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

1.59. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

1.60. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.

1.61. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & -6 & 1 \\ 7 & -2 & 15 \end{pmatrix}$.

Выяснить, являются ли строки матрицы линейно независимыми:

1.62. $(1\ \ 2\ \ 3)$, $(3\ \ 6\ \ 7)$.

1.63. $(4\ \ -2\ \ 6)$, $(6\ \ -3\ \ 9)$.

Найти максимальное число линейно независимых столбцов матриц:

1.64. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

1.65. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.4. Задачи с экономическим содержанием

Понятие матрицы часто используется в практической деятельности. Например, данные о выпуске продукции нескольких видов в каждом квартале года или нормы затрат нескольких видов ресурсов на производство продукции нескольких типов и т.д. удобно записать в виде матриц.

1.66. В некоторой отрасли m заводов выпускают n видов продукции. Матрица $A_{m\times n}$ задает объемы продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица $B_{m\times n}$ — соответственно во втором; (a_{ij}, b_{ij}) — объемы продукции j-го типа на i-м заводе в 1-м и 2-м кварталах соответственно:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти:

а) объемы продукции;

б) прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам;

в) стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в долларах), если λ — курс доллара по отношению к рублю.

Решение:

а) Объемы продукции за полугодие определяются суммой матриц A и B, т.е. $C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ — объем продукции j-го типа, произведенный за полугодие i-м заводом.

б) Прирост во втором квартале по сравнению с первым определяется разностью матриц:

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отрицательные элементы d_{ij} показывают, что на данном заводе i объем производства j-го продукта уменьшился; положительные d_{ij} — увеличился; нулевые d_{ij} — не изменился.

в) Произведение $\lambda C = \lambda(A + B)$ дает выражение стоимости объемов производства за квартал в долларах по каждому заводу и каждому предприятию (соответствующую матрицу не выписываем).▶

1.67. Предприятие производит n типов продукции, объемы выпуска заданы матрицей $A_{1\times n}$. Цена реализации единицы i-го типа продукции в j-м регионе задана матрицей $B_{n\times k}$, где k — число регионов, в которых реализуется продукция.

Найти C — матрицу выручки по регионам.

Пусть $A_{1\times 3} = (100, 2000, 100)$;

$$B_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выручка определяется матрицей $C_{1\times k} = A_{1\times n} \cdot B_{n\times n}$, причем $c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot b_{ij}$ — это выручка предприятия в j-м регионе:

$$C = (100, 200, 100) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (600, 1300, 700, 1300).▶$$

1.68. Предприятие производит n типов продукции, используя m видов ресурсов. Нормы затрат ресурса i-го товара на производство единицы продукции j-го типа задана матрицей затрат $A_{m\times n}$. Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа x_{ij}, записанное матрицей $X_{n\times 1}$.

Определить S — матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени. Дано:

$$A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Матрица полных затрат ресурсов S определяется как произведение матриц A и X, т.е. $S = AX$.

В условии данной задачи

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix},$$

т.е. за данный период времени будет израсходовано 930 единиц ресурса 1-го вида, 960 единиц ресурса 2-го вида, 450 единиц ресурса 3-го вида, 630 единиц ресурса 4-го вида.▶

1.69. Пусть в условии предыдущей задачи указана стоимость каждого вида ресурсов в расчете на единицу. Она задается матрицей $P_{1\times m}$. Определить полную стоимость всех затраченных за данный отрезок времени ресурсов, если $P = (10, 20, 10, 10)$.

Р е ш е н и е. Стоимость всех затраченных ресурсов C определяется как произведение матриц P и S, т.е. $C = PS$ или $C = PAX$.

В данном случае $C = (10, 10, 10, 10) \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix} = 3990$ (ден. ед.).▶

1.70. Завод производит двигатели, которые могут либо сразу потребовать дополнительной регулировки (в 40 % случаев), либо сразу могут быть использованы (в 60 % случаев). Как показывают статистические исследования, те двигатели, которые изначально требовали регулировки, потребуют дополнительной регулировки через месяц в 65 % случаев, а в 35 % случаев через месяц будут работать хорошо. Те же двигатели, которые не требовали первоначальной регулировки, потребуют ее через месяц в 20 % случаев и продолжат хорошо работать в 80 % случаев.

Какова доля двигателей, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через 2 месяца после выпуска? Через 3 месяца?

Р е ш е н и е. В момент после выпуска доля хороших двигателей составляет 0,6, а доля требующих регулировки — 0,4. Через месяц доля хороших составит: $0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}35 = 0{,}62$. Доля требующих регулировки: $0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}65 = 0{,}38$. Введем строку состояния X_t в момент t; $X_t = (x_{1t}; x_{2t})$, где x_{1t} — доля хороших двигателей в момент t, x_{2t} — доля двигателей, требующих регулировки в момент t.

Матрица перехода $A_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где a_{ij} — доля двигателей, которые в настоящее время находятся в состоянии i (1 — «хороший», 2 — «требует регулировки»), а через месяц — в состоянии j.

Очевидно, что для матрицы перехода сумма элементов каждой строки равна 1, все элементы ее неотрицательны.

Очевидно, $\underset{1\times2}{X_0} = (0{,}6 \quad 0{,}4)$, $\underset{2\times2}{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix}$.

Тогда через месяц $\underset{1\times2}{X_1} = \underset{1\times2}{X_0} \cdot \underset{2\times2}{A} = (0{,}6; 0{,}4) \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} (0{,}62; 0{,}38)$;

через 2 месяца $X_2 = X_1A = X_0AA = X_0A^2$;
через 3 месяца $X_3 = X_2A = X_0A^3$.

Найдем матрицы A^2 и A^3:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}71 & 0{,}29 \\ 0{,}5075 & 0{,}4925 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0{,}71 & 0{,}29 \\ 0{,}5075 & 0{,}4925 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}67 & 0{,}33 \\ 0{,}58 & 0{,}42 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если A — матрица перехода, то A^t — тоже матрица перехода при любом натуральном t. Теперь

$$X_2=(0{,}6\ \ 0{,}4)\begin{pmatrix}0{,}71 & 0{,}29\\ 0{,}5075 & 0{,}4925\end{pmatrix}=(0{,}629;\ 0{,}371),$$

$$X_3=(0{,}6\ \ 0{,}4)\begin{pmatrix}0{,}67 & 0{,}33\\ 0{,}58 & 0{,}42\end{pmatrix}=(0{,}634;\ 0{,}366).$$

Очевидно, $X_t = X_0 A^t$.▶

1.71. Три завода выпускают четыре вида продукции. Необходимо: *а*) найти матрицу выпуска продукции за квартал, если заданы матрицы помесячных выпусков A_1, A_2 и A_3; *б*) найти матрицы приростов выпуска продукции за каждый месяц B_1 и B_2 и проанализировать результаты:

$$A_1=\begin{pmatrix}2&3&1&2\\4&2&2&1\\5&4&4&2\end{pmatrix};\quad A_2=\begin{pmatrix}1&4&2&2\\3&3&3&2\\4&5&4&3\end{pmatrix};\quad A_3=\begin{pmatrix}2&5&3&1\\3&4&3&1\\4&4&4&4\end{pmatrix}.$$

1.72. Найти C — матрицу выручки по регионам в условиях задачи **1.67**, если

$$A=(10;\ 40;\ 10;\ 20);\qquad B=\begin{pmatrix}2&1&2\\4&2&1\\3&1&1\\2&4&4\end{pmatrix}.$$

Определить, какой из трех регионов наиболее выгоден для реализации товара.

1.73. Предприятие производит мебель трех видов и продает ее в четырех регионах. Матрица $B=(b_{ij})=\begin{pmatrix}2&5&1&2\\1&8&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$ задает цену реализации единицы мебели i-го типа в j-м регионе. Определить выручку предприятия в каждом регионе, если реализация мебели за месяц (по видам) задана матрицей $A=\begin{pmatrix}200\\80\\100\end{pmatrix}$.

1.74. В условиях задачи **1.68**, **1.69** определить:

1) полные затраты ресурсов 3-х видов на производство месячной продукции, если заданы нормы затрат матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ и объем выпуска каждого из двух типов продукции $X=\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$;

2) стоимость всех затраченных ресурсов, если задана стоимость единиц каждого ресурса $P=(50;\ 10;\ 20)$.

1.75. Продавец может закупить от 1 до 5 билетов на спектакль по цене 100 руб. и продать перед спектаклем по 200 руб. каждый. Составить матрицу выручки продавца в зависимости от количества купленных им билетов (строка матрицы) и от результатов продажи (столбец матрицы).

1.76. В ремонтную мастерскую поступают телефонные аппараты, 70 % которых требуют малого ремонта, 20 % — среднего ремонта, 10 % — сложного ремонта. Статистически установлено, что 10 % аппаратов, прошедших малый ремонт, через год требуют малого ремонта, 60 % — среднего, 30 % — сложного ремонта. Из аппаратов, прошедших средний ремонт, 20 % требуют через год малого ремонта, 50 % — среднего, 30 % — сложного ремонта. Из аппаратов, прошедших сложный ремонт, через год 60 % требуют малого ремонта, 40 % — среднего. Найти доли из отремонтированных в начале года аппаратов, которые будут требовать ремонта того или иного вида: через 1 год; 2 года; 3 года.

Задачи для повторения

1.77. Найти матрицу $C=A^2-AB+BA$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Вычислить определитель и след матрицы C.

1.78. Найти матрицу $C=AB'+3E$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

E — единичная матрица соответствующего порядка.

1.79. Вычислить определитель 4-го порядка: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.80. При каких значениях a матрица $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & \alpha \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}$, имеет обратную?

1.81. Найти (двумя способами) матрицу A^{-1}, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.82. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1.83. Найти число линейно независимых строк матрицы $A^{-1}B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.84. При каких значениях α ранг матрицы $C = A^{-1} + B^{-1}$ равен 2, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.85. Автотранспортное предприятие закупило автобусы, среди которых 20% требуют предварительной наладки, 10% нуждаются в ремонте и 70% готовы к эксплуатации. Статистически установлено, что через год работы среди тех автобусов, которые прошли предварительную наладку, 30% вновь ее требуют, 50% нуждаются в ремонте и 20% могут просто продолжать работу. Среди тех автобусов, которые прошли первоначальный ремонт, 40% нуждаются в наладке, 20% нуждаются в ремонте, 40% готовы к работе. Среди тех автобусов, которые сразу эксплуатировались, 30% нуждаются в наладке, 50% нуждаются в ремонте, могут продолжить работу. Найти долю автобусов, которые через 1 год и через 2 года будут: а) нуждаться в наладке; б) требовать ремонта; в) готовы к эксплуатации без наладки и ремонта.

Контрольные задания по главе 1 «Матрицы и определители»

№	*Вариант 1.1*	*Вариант 1.2*	*Вариант 1.3*
1	Два различных по качеству вида растительного масла продаются в трех магазинах. Матрица A – объемы продаж этих продуктов в магазинах в 1-м квартале, матрица B — во 2-м квартале (в тыс. руб.). Определить: *1*) объем продаж за два квартала; *2*) прирост продаж во 2-м квартале по сравнению с первым.		
	$A=\begin{pmatrix}2&5\\7&3\\2&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&4\\6&4\\2&5\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}3&4\\6&4\\2&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&2\\5&3\\3&3\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}2&2\\3&4\\4&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\4&2\end{pmatrix}$
2	Найти матрицу C^{-1}, обратную к матрице $C = AB' + 3E$:		
	$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&0\\5&4\\1&2\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\\0&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\3&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&1\\4&5\\1&0\end{pmatrix}$
3	Вычислить определитель:		
	$\begin{vmatrix}1&2&3&0\\5&7&1&2\\3&-1&1&8\\-3&-10&-3&6\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}2&4&-1&3\\0&1&-7&2\\1&4&5&3\\3&9&-3&8\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}-1&1&0&3\\-3&4&1&-2\\-2&3&1&4\\-4&2&-2&3\end{vmatrix}$

№	*Вариант 1.1*	*Вариант 1.2*	*Вариант 1.3*
4	Определить максимальное число линейно независимых строк матрицы:		
	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & -5 & 2 & -8 & -11 \\ 2 & 4 & 2 & 10 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 12 & 15 & 6 \\ 1 & -8 & -9 & 2 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$
5	Предприятие производит три типа продукции, используя два вида ресурсов. Норма затрат ресурсов i-го вида на производство единицы продукции j-го типа задана матрицей затрат A, выпуск продукции за квартал — матрицей X, стоимость единицы каждого вида ресурсов задана матрицей P. Найти: *1*) матрицу S полных затрат ресурсов каждого вида; *2*) полную стоимость всех затраченных ресурсов.		
	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$; $P = (5; 2)$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$; $P = (2; 4)$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$; $P = (1; 3)$
6	Завод производит швейные машины. Каждая машина может находиться в одном из двух состояний: *1*) работает хорошо; *2*) требует регулировки. В момент изготовления p % машин работают хорошо, $(1 - p)$ % требуют регулировки. Статистические исследования показали, что из тех машин, которые сегодня работают хорошо, через месяц 70 % будут работать хорошо, а 30 % потребуют регулировки. Среди тех машин, которые сегодня требуют регулировки, через месяц 60 % будут работать хорошо, 40 % потребуют регулировки. Каковы доли машин, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через месяц после их изготовления?		
	$p = 80$ %	$p = 50$ %	$p = 20$ %

Глава 2
Системы линейных уравнений

Справочный материал

1. Общий вид системы m линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad \textbf{(2.1)}$$

2. В матричной форме система **(2.1)** имеет вид:

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad \textbf{(2.2)}$$

Здесь A — матрица системы; X — матрица-столбец переменных; B — матрица-столбец свободных членов.

3. Если определитель матрицы системы n линейных уравнений с n переменными $\Delta = |A| \neq 0$ (т.е. матрица A – невырожденная), то единственное решение системы определяется:

а) методом обратной матрицы по формуле:

$$X = A^{-1}B; \quad \textbf{(2.3)}$$

б) по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, \ldots, n), \quad \textbf{(2.4)}$$

где Δ_j — определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов B.

4. Методом Гаусса можно решить любую систему уравнений вида **(2.1)**. Для этого составляют расширенную матрицу коэффициентов $(A|B)$, приписывая к матрице A столбец свободных членов B, затем матрицу $(A|B)$ с помощью элементарных преобразований (см. § **1.3**) приводят к ступенчатому виду (так называемый «прямой ход»); далее по полученной матрице выписывают новую систему и решают ее методом исключения переменных: начиная с последних (по номеру) переменных находят все остальные (так называемый «обратный ход»).

2.1. Система *n* линейных уравнений с *n* переменными

2.1. Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме система имеет вид: $AX = B$. Определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, т.е. обратная матрица A^{-1} существует (см. § **1.2**):

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Теперь по формуле **(2.3)**:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (3; 2; –1).▶

2.2. По формулам Крамера решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 & +2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 & +5x_2 \qquad = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Определитель $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, следовательно, по теореме Крамера система имеет единственное решение. Вычислим определители матриц Δ_1, Δ_2, Δ_3, полученных из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36.$$

Теперь по формулам Крамера **(2.4)**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{18} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36}{18} = -2.$$

Ответ: (1; 0; –2). ▶

2.3. Методом Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выпишем расширенную матрицу системы. Необходимо на первом шаге, чтобы $a_{11} \neq 0$, но удобнее для вычислений, чтобы $a_{11} = 1$. Поэтому поменяем местами первую и четвертую строки, чтобы a_{11} стал равным 1:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right) \quad -5 \quad 3 \quad -2$$

Шаг 1. Умножим элементы первой строки на –5, 3 и –2 и прибавим их соответственно к элементам второй, третьей и четвертой строк, чтобы под элементом a_{11} в первом столбце образовалась «ступенька» из нулей.

Для проведения второго шага необходимо, чтобы в новой матрице $a_{22}\neq 0$, но удобнее, чтобы $a_{22}=1$ или $a_{22}=-1$. Поэтому переставим вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \quad ④ \; ③$$

Шаг 2. Элементы второй строки умножаем на 4 и 3 и прибавляем соответственно к элементам третьей и четвертой строк, тогда под элементом a_{22} во втором столбце появится вторая «ступенька».

Шаг 3. Так как в полученной матрице $a_{33}=26\neq 0$, умножаем элементы третьей строки на $\dfrac{-24}{26}=\dfrac{-12}{13}$ и прибавляем к элементам четвертой строки. Получим:

$$\begin{array}{c} \\ \\ (-12/13) \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right).$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ \quad -x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -11, \\ \qquad 26x_3 - 7x_4 = -7, \\ \qquad\quad \dfrac{19}{13}x_4 = \dfrac{19}{13}. \end{cases}$$

Из последнего уравнения $x_4=1$, из третьего

$x_3=\dfrac{-7+7x_4}{26}=\dfrac{-7+7\cdot 1}{26}=0$;

из второго $x_2=11+11x_3-4x_4=11+11\cdot 0-4\cdot 1=7$,

из первого $x_1=-4+x_2-4x_3+2x_4=-4+7-4\cdot 0+2\cdot 1=5$.

Ответ: (5; 7; 0; 1).▶

З а м е ч а н и е. Обратный ход метода Гаусса можно проводить и с расширенной матрицей, не переходя к системе, если эту матрицу с помощью элементарных преобразований привести к диагональной. Умножим элементы четвертой строки на 13/19. Затем элементы последней строки ($a_{44} = 1 \neq 0$) умножим на 7, 4, 2 и прибавим соответственно к элементам третьей, второй и первой строк:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Далее умножим элементы третьей строки на 1/26, а затем, учитывая, что $a_{33} = 1 \neq 0$, — на (–4) и (–11) и прибавим к элементам первой и второй строк, а потом от первой строки отнимаем вторую ($a_{22} = -1 \neq 0$):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Левая часть расширенной матрицы приведена к диагональному виду. Выпишем систему:

$$\begin{cases} x_1 & & & & = 5, \\ & -x_2 & & & = -7, \\ & & x_3 & & = 0, \\ & & & x_4 & = 1. \end{cases}$$

Ответ: (5; 7; 0; 1).▶

2.4. Методом Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ -5x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выпишем и преобразуем расширенную матрицу системы. Сначала прибавим к элементам первой строки элементы второй:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -5 & 10 & -7 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -5 & 10 & -7 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & -10 \\ 0 & 15 & -12 & 23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

Последняя строка соответствует уравнению $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -7$, которое не имеет решений; следовательно, система несовместна. ▶

2.5. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 12 млн усл. ед. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 70 %, второго — на 40 %. В результате суммарная прибыль должна вырасти в 1,5 раза.

Какова величина прибыли каждого из отделений: *а*) в минувшем году; *б*) в этом году?

Р е ш е н и е. Пусть x и y – прибыли первого и второго отделений в минувшем году. Тогда условие задачи можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ 1{,}7x + 1{,}4y = 18. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x = 4$, $y = 8$. Следовательно, *а*) прибыль в минувшем году первого отделения – 4 млн усл. ед., второго — 8 млн усл. ед.:

б) прибыль в этом году первого отделения $1{,}7 \cdot 4 = 6{,}8$ млн усл. ед., второго $1{,}4 \cdot 8 = 11{,}2$ млн усл. ед. ▶

Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решить системы уравнений:

2.6. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 + 7x_2 = 81. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 5x_1+8x_2+\ x_3=\ 2, \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7, \\ 2x_1+\ x_2-\ x_3=-5. \end{cases}$ **2.11.** $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3 =-7, \\ x_1+4x_2+2x_3=-1, \\ x_1-4x_2 =-5. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} 7x+\ 2y+3z=15, \\ 5x-\ 3y+2z=15, \\ 10x-11y+5z=36. \end{cases}$ **2.13.** $\begin{cases} 3x+2y+z=\ 5, \\ 2x-\ y+z=\ 6, \\ x+5y =-3. \end{cases}$

Методом Гаусса решить системы уравнений:

2.14. $\begin{cases} x_1+\ x_2+x_3=22, \\ 3x_1+2x_2+x_3=47, \\ x_1+3x_2-x_3=18. \end{cases}$ **2.15.** $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=5, \\ 3x_1+\ x_2-5x_3=4, \\ 4x_1-2x_2-3x_3=10. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x+2y+3z=\ 2, \\ 2x+3y-4z=-5, \\ 3x+\ y+\ z=\ 3. \end{cases}$ **2.17.** $\begin{cases} 6x_1+\ x_2+3x_3=-1, \\ -2x_1-5x_2+2x_3=\ 6, \\ 3x_1 \qquad +2x_3=\ 1. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} x_2+3x_3-\ x_4=10, \\ x_1+3x_2+8x_3-\ x_4=22, \\ 4x_1+2x_2 \qquad -3x_4=11. \end{cases}$ **2.19.** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=-4, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=-2. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-2x_4=\ 2, \\ -3x_1-7x_2-8x_3+2x_4=-4, \\ 2x_1-\ x_2+3x_3 =\ 4, \\ 2x_1+4x_2+4x_3 =\ 3. \end{cases}$ **2.21.** $\begin{cases} x_1+2x_2-\ x_3+x_4=\ 1, \\ 3x_1-\ x_2+2x_3-x_4=-1, \\ 2x_1-2x_2+3x_3 =\ 5, \\ 2x_1+3x_2-2x_3+x_4=-3. \end{cases}$

Решить (любым методом) систему уравнений, заданную в виде $AX=B$, где A — матрица системы, B — столбец свободных членов:

2.22. $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix}$. **2.23.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$.

2.24. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$. **2.25.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Решить матричные уравнения:

2.26. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.27.** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.28. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. **2.29.** $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2.30. $A \cdot B' \cdot X = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$.

2.31. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. **2.32.** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 13 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

2.33. Фирмой было выделено 236 тыс. усл. ед. для покупки 29 предметов для оборудования офиса: несколько компьютеров по цене 20 тыс. усл. ед. за компьютер, офисных столов по 8,5 тыс. усл. ед. за стол, стульев по 1,5 тыс. усл. ед. за стул. Позже выяснилось, что в другом месте компьютеры можно приобрести по 19,5 тыс. усл. ед., а столы – по 8 тыс. усл. ед. (стулья по той же цене), благодаря чему на ту же сумму было куплено на 1 стол больше. Выяснить, какое количество единиц каждого вида оборудования было приобретено.

2.34. Швейная фабрика в течение трех дней производила костюмы, плащи и куртки. Известны объемы выпуска продукции за три дня и денежные затраты на производство за эти дни:

День	*Объем выпуска продукции (единиц)*			*Затраты (тыс. усл. ед.)*
	Костюмы	Плащи	Куртки	
Первый	50	10	30	176
Второй	35	25	20	168
Третий	40	20	30	184

Найти себестоимость единицы продукции каждого вида.

2.2. Система m линейных уравнений с n переменными

Справочный материал

1. Система (2.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы $(A|B)$ *(теорема Кронекера—Капелли)*.

2. Пусть $r(A) = r$, $r < n$; r переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются *основными (базисными)*, если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. *базисный минор*) отличен от нуля. Остальные $n - r$ переменных называются *неосновными* (или *свободными*).

Решение системы (2.1), в котором все $n - r$ неосновных переменных равны нулю, называется *базисным*.

Совместная система (2.1) имеет: *единственное* решение, если $r = n$, и *бесконечное множество* решений, если $r < n$; число базисных решений *конечно* и не превосходит C_n^r.

2.35. Методом Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 + 9x_2 - 10x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & -10 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Следовательно, ранг матрицы системы $r(A) = 2$.

Определитель при переменных x_1, x_2 (базисный минор) отличен от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, эти переменные берем за основные. Остальные, неосновные переменные x_3, x_4 (с их коэффициентами) переносим в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3x_3 + 2x_4 + 1, \\ x_2 = 5x_3 + x_4 + 5, \end{cases}$$

откуда $x_1 = -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1 = -2\cdot(5x_3 + x_4 + 5) + 3x_3 + 2x_4 + 1 = -10x_3 - 2x_4 - 10 + 3x_3 + 2x_4 + 1 = -7x_3 - 9$.

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений системы:

$(x_1 = -7c_1 - 9, x_2 = 5c_1 + c_2 + 5, x_3 = c_1, x_4 = c_2)$.▶

2.36. Найти все базисные решения системы, приведенной в примере **2.35**.

Р е ш е н и е. Так как ранг матрицы системы $r(A) = 2$ (см. пример **2.35**), то одно из уравнений системы, например, третье, можно отбросить; тогда возможны следующие группы основных переменных:

$$x_1, x_2;\quad x_1 x_3;\quad x_1, x_4;\quad x_2, x_3;\quad x_2, x_4;\quad x_3, x_4.$$

Как видно из примера **2.35**, переменные x_1, x_2 могут быть основными (базисными). Приравнивая неосновные (свободные) переменные нулю, т.е. $x_3 = x_4 = 0$, получим $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 = 3 \end{cases}$, откуда $x_1 = -9$, $x_2 = 5$, т.е. первое базисное решение $(-9; 5; 0; 0)$.

Возьмем в качестве основных переменные x_1, x_3: базисный минор $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Полагая неосновные переменные x_2, x_4 равными нулю, т.е. $x_2 = x_4 = 0$, получим $x_1 = -2$, $x_3 = -1$, т.е. второе базисное решение $(-2; 0; -1; 0)$.

Рассуждая аналогично, найдем еще три базисных решения:

$(-9; 0; 0; -5)$, $(0; -\frac{10}{7}; -\frac{9}{7}; 0)$, $(0; 0; -\frac{9}{7}; \frac{10}{7})$. Переменные x_2, x_4 не могут быть основными, так как соответствующий базисный минор $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

З а м е ч а н и е. Все базисные решения системы можно было найти из общего решения, полученного в примере **2.35**, приравнивая соответствующие переменные нулю. Например, при $x_3 = c_1 = 0$, $x_4 = c_2 = 0$, $x_1 = -7c_1 - 9 = -9$, $x_2 = 5c_1 + c_2 + 5 = 5$, т.е. получаем базисное решение $(-9; 5; 0; 0)$. А при $x_1 = -7c_1 - 9 = 0$, $x_2 = 5c_1 + c_2 + 5 = 0$, т.е. при $c_1 = \frac{-9}{7}$, $c_2 = \frac{10}{7}$, $x_3 = c_1 = \frac{-9}{7}$, $x_4 = c_2 = \frac{-10}{7}$, т.е. получаем базисное решение $(0; 0; -\frac{9}{7}; \frac{10}{7})$ и т.д.▶

Методом Гаусса решить системы линейных уравнений и найти все базисные решения:

2.37. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ -5x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10. \end{cases}$ **2.38.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 7, \\ -4x_1 + 2x_2 = -2, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

2.39. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 31. \end{cases}$ **2.40.** $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

2.41. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$ **2.42.** $\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

2.43. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 8. \end{cases}$ **2.44.** $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$

Исследовать систему уравнений относительно параметра α и найти общее решение системы:

2.45. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 1, \\ -2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$ **2.46.** $\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -x_1 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

2.47. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 6x_3 = 9, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$ **2.48.** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = \alpha - 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 6 - \alpha. \end{cases}$

2.3. Метод Жордана—Гаусса

Справочный материал

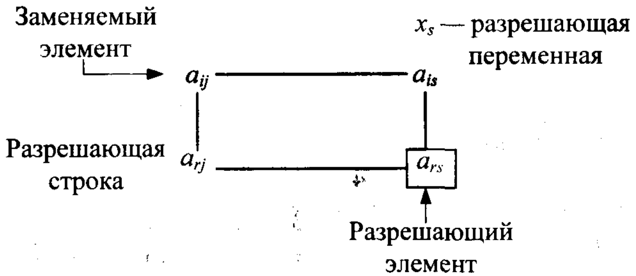
Метод Жордана—Гаусса решения систем линейных уравнений состоит в преобразовании расширенной матрицы системы $(A|B)$ к виду, при котором коэффициенты при r переменных системы (где r =

rang $(A|B)$) образуют диагональную матрицу A с точностью до перестановки строк или столбцов[1], что позволяет сразу, без дополнительных преобразований, получить решение системы.

На каждом шаге решения выбирается *разрешающий элемент* $a_{rs} \neq 0$ (любой элемент матрицы A, отличный от нуля); r-я строка называется *разрешающей строкой*, x_s — *разрешающей переменной*. Для перехода к следующему шагу разрешающая переменная x_s исключается из всех остальных уравнений; элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент, а элементы других строк заменяются на новые по следующему правилу (*правилу прямоугольника*):

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}}. \qquad (2.5)$$

В формулах исключения **(2.5)** в числителе стоит произведение заменяемого и разрешающего элементов минус произведение элементов, стоящих в оставшихся углах прямоугольника:



После получения новой матрицы выбирается новый, отличный от нуля, разрешающий элемент в другой строке, вычисляется новая матрица и т.д., пока матрица A не будет приведена к диагональному виду.

2.49. Методом Жордана—Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 16. \end{cases}$$

---

[1] Например, матрица $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ перестановкой строк может быть приведена к виду $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

Р е ш е н и е. Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & \boxed{1} & 4 & 2 & 6 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 16 \end{array}\right).$$

Шаг 1. В качестве разрешающего элемента удобно взять элемент, равный 1, например, $a_{12} = 1 \neq 0$ (выделяем его квадратиком). Делим элементы разрешающей первой строки на разрешающий элемент a_{12}. Так как $a_{12} = 1$, то элементы разрешающей строки не меняются. Разрешающую переменную x_2 следует исключить из остальных уравнений, поэтому в первой матрице все элементы[1] второго столбца, кроме $a_{12}' = a_{12} = 1$ будут равны нулю. Другие элементы новой матрицы находим по правилу прямоугольника:

Например, $a'_{21} = \dfrac{a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22}}{a_{12}} = \dfrac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 2}{1} = -1,$

$$a'_{26} = \frac{a_{26} \cdot a_{12} - a_{22} \cdot a_{16}}{a_{12}} = \frac{10 \cdot 1 - 2 \cdot 16}{1} = -22 \text{ и т.д.}$$

Новая матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 16 \\ \boxed{-1} & 0 & -7 & -3 & -11 & -22 \\ -5 & 0 & -9 & -5 & -17 & -32 \end{array}\right).$$

Шаг 2. В качестве разрешающего элемента берем не равный нулю элемент из любой строки, кроме первой, например, $a_{21} = -1$. Делим элементы разрешающей второй строки на (-1). Элементы первого столбца, кроме a_{21}, берем равными нулю, а остальные элементы вычисляем по правилу прямоугольника. Например,

$$a''_{14} = \frac{a'_{14} \cdot a'_{21} - a'_{11} \cdot a'_{24}}{a'_{21}} = \frac{2 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3)}{-1} = -4,$$

$$a''_{36} = \frac{a'_{36} \cdot a'_{21} - a'_{31} \cdot a'_{26}}{a'_{21}} = \frac{(-32) \cdot (-1) - (-5) \cdot (-22)}{-1} = 78 \text{ и т.д.}$$

[1] Элементы новых матриц обозначаем со штрихами.

Новая матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -10 & -4 & -16 & -28 \\ 1 & 0 & 7 & 3 & 11 & 22 \\ 0 & 0 & 26 & \boxed{10} & 38 & 78 \end{array}\right).$$

Шаг 3. В качестве разрешающего берем элемент третьей строки, например, $a''_{34} = 10 \neq 0$. После пересчета элементов получаем новую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0{,}4 & 0 & -0{,}8 & 3{,}2 \\ 1 & 0 & -0{,}8 & 0 & -0{,}4 & -1{,}4 \\ 0 & 0 & 2{,}6 & 1 & 3{,}8 & 7{,}8 \end{array}\right).$$

Так как все строки матрицы уже брались в качестве разрешающих, выписываем систему уравнений, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} x_2 + 0{,}4x_3 \qquad - 0{,}8x_5 = 3{,}2, \\ x_1 \quad - 0{,}8x_3 \qquad - 0{,}4x_5 = -1{,}4, \\ \qquad 2{,}6x_3 + x_4 + 3{,}8x_5 = 7{,}8. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = c_1$, $x_5 = c_2$, получим общее решение системы:

$$\big(x_1 = -1{,}4 + 0{,}8c_1 + 0{,}4c_2; \quad x_2 = 3{,}2 - 0{,}4c_1 + 0{,}8c_2;$$
$$x_3 = c_1; \quad x_4 = 7{,}8 - 2{,}6c_1 - 3{,}8c_2; \quad x_5 = c_2\big),$$

где c_1, c_2 – любые числа.

Методом Жордана—Гаусса решить системы уравнений:

2.50. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$ **2.51.** $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

2.52. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$ **2.53.** $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

2.4. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений

Справочный материал

1. Система (**2.1**) называется *однородной*, если все свободные члены уравнений равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Решение системы записываем в виде строки (вектора)[1]

$$\boldsymbol{e} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2. Если ранг матрицы системы $r(A) = r < n$, то система (**2.6**) имеет $n - r$ линейно независимых решений $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-r}$, причем любое решение системы (**2.6**) является линейной комбинацией решений $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-r}$. Набор решений (векторов) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-r}$ называется *фундаментальной системой решений* системы (**2.6**).

Общее решение системы (**2.6**) имеет вид:

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + c_{n-r}\boldsymbol{e}_{n-r},$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ – произвольные числа.

3. Для нахождения фундаментальной системы решений системы (**2.6**):

а) r основных (базисных) переменных (с отличным от нуля базисным минором) выражают через неосновные (свободные) переменные;

б) поочередно заменяют $(n - r)$ неосновных переменных элементами каждой строки невырожденной квадратной матрицы порядка $n - r$, например, единичной E_{n-r}.

2.54. Найти фундаментальную систему решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

---

[1] Понятие вектора вводится в главе **3**.

Р е ш е н и е. Выпишем матрицу системы, поставив последнее уравнение на первое место, затем приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $r = r\,(A) = 2$. Базисный минор при переменных x_1, x_2 отличен от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$; выбираем x_1, x_2 в качестве основных переменных и выражаем их через неосновные x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -2x_3 + 16x_4 - 3x_5, \\ \quad 8x_2 = \ 7x_3 - 25x_4 + 4x_5. \end{cases} \qquad (*)$$

Для получения фундаментальной системы решений $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ поочередно заменяем неосновные переменные x_3, x_4, x_5 элементами строк единичной матрицы E_3.

1. При $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ система (*) принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -2, \\ \quad 8x_2 = 7, \end{cases}$$

откуда $x_1 = \dfrac{19}{8}$, $x_2 = \dfrac{7}{8}$, т.е. получаем базисное решение $\boldsymbol{e}_1 = \left(\dfrac{19}{8}; \dfrac{7}{8}; 1; 0; 0\right)$.

2. Аналогично находим еще два базисных решения:

при $x_3 = 0$, $x_4 = 1, x_5 = 0$ $\qquad \boldsymbol{e}_2 = \left(\dfrac{3}{8}; \dfrac{-25}{8}; 0; 1; 0\right)$;

при $x_3 = 0$, $x_4 = 0, x_5 = 1$ $\qquad \boldsymbol{e}_3 = \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 0; 0; 1\right)$.

Найденные решения (векторы) $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ образуют фундаментальную систему. Умножив компоненты решений $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ соответственно на 8, 8, 2, получим фундаментальную систему решений с целыми компонентами:

$$(19; 7; 8; 0; 0),\ (3; -25; 0; 8; 0),\ (-1; 1; 0; 0; 2).\blacktriangleright$$

Найти фундаментальные системы решений систем линейных уравнений:

2.55. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

2.56. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 8x_1 + 9x_2 + 9x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

2.57. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 11x_1 + 17x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

2.58. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0, \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

2.59. $\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.60. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

2.5. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Справочный материал

1. Уравнения $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются *соотношениями баланса*, где x_i – объемы валового продукта i-й отрасли для непроизводственного потребления, x_{ij} — объем продукции i-й отрасли, потребляемой j-й отраслью в процессе производства ($i = 1, 2, \ldots, n$).

2. Соотношения баланса могут быть записаны:

а) в виде $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, **(2.7)**

где $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ **(2.8)**

— *коэффициенты прямых затрат*, показывающие затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли;

б) в матричном виде:

$$X = AX + Y \tag{2.9}$$

или

$$(E - A)X = Y, \tag{2.10}$$

где $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

X – вектор валового выпуска, Y – вектор конечного продукта, A – матрица прямых затрат.

3. Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого вектора валового выпуска X, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y.

Вектор X находится по формуле:

$$X = (E - A)^{-1}Y = SY. \tag{2.12}$$

4. Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*, элемент которой s_{ij} показывает величину валового выпуска продукции i-й отрасли, необходимой для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j-й отрасли $y_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

5. Матрица $A \geq 0$ называется *продуктивной*, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$ уравнения **(2.10)**.

Матрица A продуктивна, если $a_{ij} \geq 0$ для любых $i, j = 1, 2, \dots, n$ и $\max\limits_{j=1,\dots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ и существует номер j такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

6. *Чистой продукцией* отрасли называется разность между валовой продукцией этой отрасли и затратами продукции всех отраслей на производство этой отрасли.

2.61. В таблице приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период, усл. ден. ед.

Отрасль		*Потребление*		*Конечный продукт*
		Промышленность	Сельское хозяйство	
Производство	Промышленность	0,3	0,2	300
	Сельское хозяйство	0,15	0,1	100

Найти:

а) плановые объемы валовой продукции отраслей, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей;

б) необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление продукции сельского хозяйства увеличится на 20 %, а промышленности на 10 %.

Р е ш е н и е.

а) Выпишем матрицу коэффициентов прямых затрат A, вектор конечной продукции Y:

$$A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,2\\ 0,15 & 0,1\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}300\\ 100\end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A продуктивна, так как ее элементы положительны и сумма элементов в каждом столбце меньше единицы.

Найдем матрицу

$$E-A=\begin{pmatrix}1-0,3 & -0,2\\ -0,15 & 1-0,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,7 & -0,2\\ -0,15 & 0,9\end{pmatrix}.$$

Тогда матрица полных затрат

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,6}\begin{pmatrix}0,9 & 0,2\\ 0,15 & 0,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,5 & 0,33\\ 0,25 & 1,17\end{pmatrix}.$$

По формуле **(2.12)** вычислим вектор валового продукта X:

$$X=\begin{pmatrix}1,5 & 0,33\\ 0,25 & 1,17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}300\\ 100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}483\\ 192\end{pmatrix}.$$

Межотраслевые поставки x_{ij} найдем по формулам **(2.8)** $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$. Например, $x_{11}=a_{11}\,x_1=0,3\cdot 483=144,9$.

Валовые продукты отраслей, межотраслевые поставки, а также чистая продукция отраслей, найденная в соответствии с п. 6, приведены в таблице (в усл. ден. ед.):

Отрасль		*Потребление*		*Конечный продукт*	*Валовой продукт*
		Промышленность	Сельское хозяйство		
Производство	Промышленность	144,9	38,4	300	483
	Сельское хозяйство	72,5	19,2	100	192
Чистая продукция		265,6	134,4		
Валовая продукция		483	192		

б) По условию вектор конечного потребления

$$Y = \begin{pmatrix} 300 \cdot 1{,}1 \\ 100 \cdot 1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле **(2.12)** вектор продукции

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}33 \\ 0{,}25 & 1{,}17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 534{,}6 \\ 221{,}9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выпуск в промышленности нужно увеличить до 534,6 усл. ден. ед., а в сельском хозяйстве — до 221,9 усл. ден. ед.▶

2.62. Выяснить, продуктивна ли матрица A:

а) $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; *б*) $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; *г*) $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

2.63. Дана матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Найти: *а*) вектор валовой продукции X для обеспечения выпуска конечной продукции $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$; *б*) приращение вектора ΔX для увеличения выпуска конечной продукции на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

2.64. Работа системы, состоящей из двух отраслей, в течение некоторого периода характеризуется следующими данными (усл. ден. ед.):

Отрасль	*Потребление*		*Чистая продукция*
	I	II	
I	100	160	240
II	275	40	85

Вычислить матрицу прямых затрат.

2.65. Имеются данные о работе системы нескольких отраслей в прошлом периоде и план выпуска конечной продукции Y_1 в будущем периоде (усл. ден. ед.):

Отрасль	*Потребление*		*Чистая продукция*	*План* Y_1
	I	II		
I	80	120	300	350
II	70	30	200	300

Найти матрицы прямых и полных затрат, а также выпуск валовой продукции в плановом периоде, обеспечивающей выпуск конечной продукции Y_1.

2.66. Дана матрица S полных затрат некоторой модели межотраслевого баланса. Найти: *а*) приращение валового выпуска ΔX_1, обеспечивающее приращение конечной продукции ΔY_1; *б*) приращение конечной продукции ΔY_2, соответствующее приращению валового выпуска ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 1{,}1 \end{pmatrix}; \quad a)\ \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}; \quad б)\ \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Задачи для повторения

2.67. По формулам Крамера решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$$

2.68. Методом обратной матрицы решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_3 = -2. \end{cases}$$

2.69. Методом Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -2, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

2.70. Решить матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.71. Частным лицом куплены три пакета акций общей стоимостью 485 ден. ед., причем акции первой группы куплены по 5 ден. ед. за акцию, второй — по 20, третьей — по 13. Через месяц стоимость акций первой, второй и третьей групп составила соответственно 6, 14 и 19 ден. ед., а стоимость всего пакета была 550 ден. ед. Еще через месяц они стоили по 8, 22 и 20 ден. ед. соответственно, а весь пакет стоил 660 ден. ед. Сколько акций каждой группы было куплено?

2.72. Методом Гаусса решить систему линейных уравнений и найти все базисные решения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 2. \end{cases}$$

2.73. Методом Жордана-Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 2, \\ 7x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

2.74. Исследовать систему уравнений относительно параметра a и найти общее решение системы:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

2.75. Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

2.76. Выяснить, продуктивна ли матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

2.77. Дана матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$. Найти: а) матрицу полных затрат S; б) вектор валовой продукции X для обеспечения выпуска конечной продукции $Y = \begin{pmatrix} 1200 \\ 840 \end{pmatrix}$; в) приращение вектора конечной продукции ΔY, соответствующее приращению валового выпуска $\Delta X = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1000 \end{pmatrix}$.

Контрольные задания по главе 2 «Системы линейных уравнений»

№	*Вариант 2.1*	*Вариант 2.2*	*Вариант 2.3*
1	По формулам Крамера решить систему:		
	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=1, \\ 5x_1+x_3=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-5x_2-x_3=-1, \\ 3x_1+x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+2x_3=-5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=-5, \\ x_2-2x_3=4, \\ 2x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$
2	Решить матричное уравнение:		
	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	$X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
3	Методом Гаусса решить систему уравнений, заданную в матричной форме: $AX=B$. Дано: $X=(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)'$,		
	$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=(4\ \ 6\ \ 2\ \ 4)'$	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=(-6\ \ -4\ \ -5\ \ 2)'$	$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}'$, $B=(5\ \ -5\ \ 5\ \ -2)'$
4	Решить систему, составленную из первых трех уравнений системы в задаче 3. Указать число базисных решений и найти одно из них.		
5	Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений:		
	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x \\ 2x_1+2x_2+5x_3+8x \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+3x_4 \\ -2x_1+x_2-x_3-5x_4 \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1+2x_2-3x_3+4x_4= \\ 3x_1-5x_2+2x_3-10x_4= \end{cases}$

<table>
<tr><th>№</th><th>Вариант 2.1</th><th>Вариант 2.2</th><th>Вариант 2.3</th></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td colspan="3">Дана матрица прямых затрат A. Найти изменение векторов:
а) конечного продукта ΔY при данном изменении вектора валового продукта ΔX;
б) валового выпуска ΔX при необходимом изменении вектора конечного продукта ΔY.</td></tr>
<tr><td>$A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,2\\ 0,4 & 0,1\end{pmatrix}$;
а) $\Delta X=\begin{pmatrix}200\\ 100\end{pmatrix}$;
б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}55\\ 110\end{pmatrix}$</td><td>$A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,4\\ 0,5 & 0,2\end{pmatrix}$;
а) $\Delta X=\begin{pmatrix}140\\ 100\end{pmatrix}$;
б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}52\\ 104\end{pmatrix}$</td><td>$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3\\ 0,6 & 0,2\end{pmatrix}$;
а) $\Delta X=\begin{pmatrix}100\\ 120\end{pmatrix}$;
б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}92\\ 138\end{pmatrix}$</td></tr>
</table>

Тест 2

1. По формулам Крамера решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ -3x_1 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

В ответе указать значения переменных x_1, x_2 и определителя Δ_3.

2. Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}$$

В ответе указать x_1, x_3 и элемент a_{12} обратной матрицы A^{-1}.

3. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

4. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_3 = 2, \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Выберите верное утверждение:
1) система определенная; *2*) система несовместная; *3*) система неопределенная.

5. Система из трех уравнений с тремя переменными, заданная в матричном виде $AX = B$, несовместна в следующих случаях:

1) $r(A) = r(A|B) = 3$; 2) $r(A) = r(A|B) = 2$;

3) $r(A) = 2,\ r(A|B) = 3$; 4) $r(A) = r(A|B) = 1$;

5) $r(A) = 1,\ r(A|B) = 2$.

Выберите верные варианты ответов.

6. Найти число базисных решений системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

7. Найти фундаментальную систему решений системы уравнений (в ответе указать число решений):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

8. Выяснить, какие из приведенных матриц являются продуктивными:

1) $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,7 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,9 & 0,2 \end{pmatrix}$.

9. Дана матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$ и вектор валового выпуска $X = \begin{pmatrix} 800 \\ 900 \end{pmatrix}$. Найти компоненты y_1, y_2 вектора конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

10. Дана матрица полных затрат $S = \begin{pmatrix} 1,125 & 0,125 \\ 0,125 & 1,125 \end{pmatrix}$ и вектор конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \end{pmatrix}$. Найти компоненты x_1, x_2 вектора валового выпуска $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Глава 3
Элементы матричного анализа

3.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Справочный материал

1. Вектором называется направленный отрезок AB с начальной точкой A и конечной точкой B (который можно перемещать параллельно самому себе).

Длиной (или *модулем*) $|\overrightarrow{AB}|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка AB, изображающего вектор.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.

Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

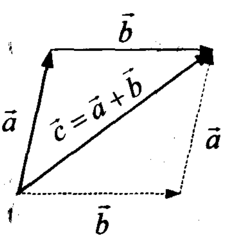


Рис. 3.1

2. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{b}|=|\lambda|\,|\vec{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно ему, если $\lambda<0$.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, определяемый по правилу треугольника или параллелограмма (рис. 3.1).

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

3. Координатами (x, y) или (x, y, z) вектора $\vec{a}$ называются координаты его конечной точки, если начальная точка вектора совпадает с началом координат.

Вектор $\vec{a}=(x, y, z)$ может быть представлен в виде

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}, \qquad (3.1)$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы (орты), совпадающие с направлением осей соответственно Ox, Oy, Oz; $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$.

4. *Длина* $\left|\vec{a}\right|$ *вектора* $\vec{a}$ определяется по формуле

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.2}$$

или

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{3.3}$$

5. *Направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$ называются числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, где α, β, γ — углы наклона вектора $\vec{a}$ к осям Ox, Oy, Oz соответственно:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \tag{3.4}$$

при этом

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3.5}$$

6. *Координаты суммы двух векторов* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и *произведение вектора* $\vec{a}$ *на число* λ определяются по формулам:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2), \tag{3.6}$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1). \tag{3.7}$$

7. *Проекцией* $\text{пр}_l\vec{a}$ *вектора* $\vec{a}$ *на ось* l называется число

$$\text{пр}_l\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\varphi, \tag{3.8}$$

где φ — угол наклона вектора $\vec{a}$ к оси l.

8. *Скалярным произведением* $(\vec{a}, \vec{b})$ *двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi. \tag{3.9}$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ выражается формулой:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{3.10}$$

Скалярный квадрат вектора $\vec{a}=(x,\ y,\ z)$ равен квадрату его длины:

$$(\vec{a},\ \vec{a})=\vec{a}^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2=x^2+y^2+z^2, \qquad (3.11)$$

или

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}. \qquad (3.12)$$

9. Угол φ *между векторами* $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ находится по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{(a,\ b)}{|a||b|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (3.13)$$

10. Два вектора $\vec{a},\vec{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. $\vec{a}\vec{b}=0$.

11. Для двух векторов $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$:

условие коллинеарности (параллельности)

$$\vec{b}=k\vec{a}, \text{ или } \frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}=k; \qquad (3.14)$$

условие ортогональности (перпендикулярности)

$$\vec{a}\vec{b}=\vec{0}, \text{ или } x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \qquad (3.15)$$

3.1. Даны три вектора: $\vec{a}=(3;\ -1)$; $\vec{b}=(1;\ -2)$; $\vec{c}=(-1;\ 1)$. Построить вектор $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, найти его длину и разложить вектор $\vec{p}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Р е ш е н и е. Построение вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, по правилу многоугольника показано на рис. 3.2. В соответствии с этим правилом каждый следующий прибавляемый вектор переносится в конец предыдущего, а вектор $\vec{p}$ замыкает ломаную, составленную из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

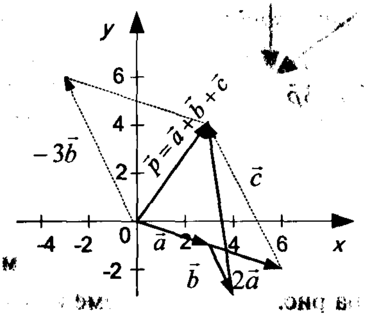


Рис. 3.2

Найдем координаты вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=$ (3; –1) + (1; –2) + + (–1; 7) = (3+1–1; –1–2 +7), т.е. $\vec{p}$ = = (3; 4). Тогда длина вектора определится по формуле **(3.2)**, т.е. $\left|\overrightarrow{p}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Разложить вектор $\vec{p}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — значит, представить его в виде: $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, где α и β — некоторые числа.

Для их определения запишем

$$(3;\ 4) = \alpha\ (3;\ -1) + \beta\ (1;\ -2),$$

или

$$\begin{cases} 3 = 3\alpha + \beta, \\ 4 = -\alpha - 2\beta. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдем $\alpha = 2$; $\beta = -3$, т.е. $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Разложение по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектора $\vec{p}$, представляющего диагональ параллелограмма, построенного на векторах $2\vec{a}$ и $-3\vec{b}$, приведено на рис. 3.1.▶

3.2. На плоскости даны три единичных вектора $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$, причем $\left(\vec{m}\,\hat{}\,\vec{n}\right) = 30^\circ$, $\left(\vec{n}\,\hat{}\,\vec{p}\right) = 60^\circ$. Построить вектор $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$ и найти его длину.

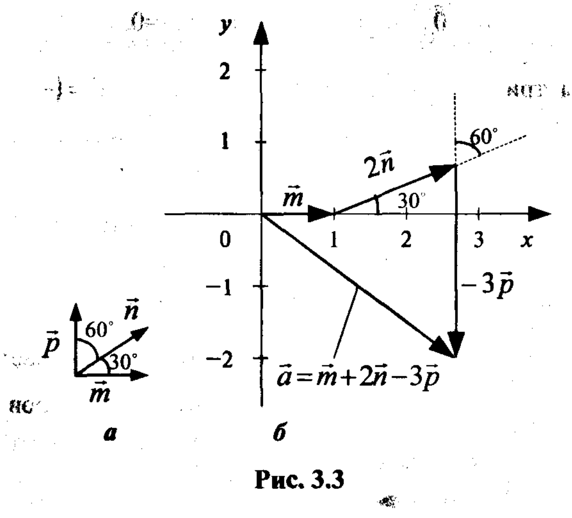


Рис. 3.3

Р е ш е н и е. Построение вектора $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$ по заданным векторам $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ (рис. 3.3, *а*) показано на рис.3.3, *б*. В системе координат *Oxy* (рис. 3.3, *б*) вектор $\vec{m} = (1;\ 0)$, $\vec{n} = \left(1\cdot\cos30^\circ + 1\cdot\cos60^\circ\right)$, или

$\vec{n}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$ и $\vec{p}=(0;\ 1)$. Поэтому $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}-3\vec{p}=(1;\ 0)+2\ (\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{1}{2})-3(0;\ 1)=(1+2\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3\cdot 0;\ 0+2\cdot\dfrac{1}{2}-3\cdot 1)$, или $\vec{a}=\left(1+\sqrt{3};\ -2\right)$.

Длина вектора по формуле **(3.2)**:

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{8+2\sqrt{3}}\approx 3{,}4.$$

Длина вектора могла быть найдена и иначе; если использовать формулу **(3.11)**,

$$|\vec{a}|^2=\vec{a}^2=\left(\vec{m}+2\vec{n}-3\vec{p}\right)^2=\vec{m}^2+4\vec{n}^2+9\vec{p}^2+4\vec{m}\vec{n}-6\vec{m}\vec{p}-12\vec{n}\vec{p}=$$

$$=|\vec{m}|^2+4|\vec{n}|^2+9|\vec{p}|^2+4|\vec{m}||\vec{n}|\cos 30^\circ-6|\vec{m}||\vec{p}|\cos 90^\circ-12|\vec{n}||\vec{p}|\cos 60^\circ=$$

$$=1^2+4\cdot 1^2+9\cdot 1^2-4\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-6\cdot 1\cdot 1\cdot 0-12\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=8+2\sqrt{3},$$

откуда $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{8+2\sqrt{3}}\approx 3{,}4.$ ▶

3.3. Даны четыре вектора

$$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j};\quad \vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k};\quad \vec{c}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k};\quad \vec{d}=3\vec{i}+7\vec{j}-7\vec{k}.$$

Необходимо: *а*) разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$; *б*) найти длину и направление вектора $\vec{m}=5\vec{a}+2\vec{b}$.

Р е ш е н и е:

а) По условию $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, где α,β,γ — некоторые числа. Следовательно,

$$3\vec{i}+7\vec{j}-7\vec{k}=\alpha(2i+j)+\beta\left(i-j+2\vec{k}\right)+\gamma\left(2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\right).$$

Приравнивая коэффициенты при единичных векторах (ортах) $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, получим систему:

$$\begin{cases} 3=2\alpha+\beta+2\gamma,\\ 7=\alpha-\beta+2\gamma,\\ -7=2\beta-\gamma,\end{cases}$$

решением которой $\alpha=2,\ \beta=-3,\ \gamma=1$, т.е. $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

б) Найдем вектор $\vec{m}$:

$$\vec{m} = 5\vec{a} + 2\vec{b} = 5\left(2\vec{i} + \vec{j}\right) + 2\left(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right) = 12\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Его длина $\left|\vec{m}\right| = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$, а направляющие косинусы найдем по формулам **(3.4)**:

$$\cos\alpha = \frac{12}{13}, \quad \cos\beta = \frac{3}{13}, \quad \cos\gamma = \frac{4}{13}. \blacktriangleright$$

3.4. Даны два единичных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$, угол между которыми 120°. Найти: *а*) острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = -4\vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$; *б*) проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$.

Р е ш е н и е:

а) Искомый угол φ (рис.3.4) определим по формуле **(3.13)**:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{DB}\right|},$$

где $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} = \left(-4\vec{m} + 2\vec{n}\right) + \left(\vec{m} + 3\vec{n}\right) = -3\vec{m} + 5\vec{n}$,

$\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b} = \left(-4\vec{m} + 2\vec{n}\right) - \left(\vec{m} + 3\vec{n}\right) = -5\vec{m} - \vec{n}$.

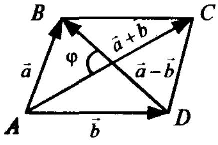


Рис. 3.4

По формулам **(3.10)—(3.12)** найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ и их длины:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \left(-3\vec{m} + 5\vec{n}\right)\left(-5\vec{m} - \vec{n}\right) = 15\vec{m}^2 - 22\vec{m}\vec{n} - 5\vec{n}^2 =$$

$$= 15\left|\vec{m}\right|^2 - 22\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos 120^\circ - 5\left|\vec{n}\right|^2 = 15 \cdot 1^2 - 22 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-1/2\right) - 5 \cdot 1^2 = 21;$$

$$\overrightarrow{AC}^2 = \left(-3\vec{m} + 5\vec{n}\right)^2 = 9\vec{m}^2 - 30\vec{m}\vec{n} + 25\vec{n}^2 = 9 \cdot 1^2 - 30 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-1/2\right) + 25 = 49;$$

$$\overrightarrow{DB}^2 = \left(-5\vec{m} - \vec{n}\right)^2 = 25\vec{m}^2 + 10\vec{m}\vec{n} + \vec{n}^2 = 25 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-1/2\right) + 1^2 = 21;$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{\overrightarrow{AC}^2}=\sqrt{49}=7;\ |\overrightarrow{DB}|=\sqrt{\overrightarrow{DB}^2}=\sqrt{21}.$$

Теперь $\cos\varphi=\dfrac{21}{7\sqrt{21}}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ и $\varphi=\arccos\sqrt{3/7}\approx 49^\circ$.

б) По формуле **(3.8)**:

$$\text{пр}_{\vec{b}}a=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Найдем $\vec{a}\vec{b}=(-4\vec{m}+2\vec{n})(\vec{m}+3\vec{n})=-4\vec{m}^2-10\vec{m}\vec{n}+6\vec{n}^2=$

$=-4\cdot1^2-10\cdot1\cdot1\cos120^\circ+6\cdot1^2=7;$

$$|\vec{b}|=\sqrt{\vec{b}^2}=\sqrt{(\vec{m}+3\vec{n})^2}=\sqrt{\vec{m}^2+6\vec{m}\vec{n}+9\vec{n}^2}=$$

$$=\sqrt{1^2+6\cdot1\cdot1\cdot\cos120^\circ+9\cdot1^2}=\sqrt{7}.$$

Теперь $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{7}{\sqrt{7}}=\sqrt{7}.$ ▶

3.5. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные векторы, образующие угол в 120°. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.6. В плоскости находятся три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Известно, что $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ |\vec{c}|=5,\ \left(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b}\right)=60^\circ,\ \left(\vec{b}\,\widehat{\ }\,\vec{c}\right)=60^\circ$. Найти длину вектора $\vec{d}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

3.7. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=-2\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$.

3.8. Определить длины векторов, на которых построен параллелограмм с диагоналями $\vec{c}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{d}=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$.

3.9. Даны длины векторов $|\vec{a}|=11;\ |\vec{b}|=23;\ |\vec{a}-\vec{b}|=30$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$.

3.10. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ и $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$: *а*) коллинеарны? *б*) ортогональны?

3.11. Вектор $\overrightarrow{OA}$ составляет с осями Ox, Oy и Oz углы, соответственно равные $\pi/3$, $\pi/3$, $\pi/4$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ перпендикулярны, где точка $B\ (2;\ 2;\ -2\sqrt{2}\ )$.

3.12. На плоскости Oxy построить векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.13. Даны три вектора: $\vec{a} = (2;-2)$, $\vec{b} = (2;-1)$, $\vec{c} = (2;\ 4)$. Найти координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ и разложить его по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.14. Даны четыре вектора: $\vec{a} = (2;\ 1;\ 0)$, $\vec{b} = (1;\ -1;2)$, $\vec{c} = (2;\ 2;\ -1)$, $\vec{d} = (3;\ 7;\ -7)$. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.

3.15. Найти длину вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ и его направляющие косинусы.

3.16. Вектор составляет с осями Oy и Oz углы 60° и 120°. Какой угол он составляет с осью Ox?

3.17. Даны точки $M_1(4;\ -2;\ 6)$, $M_2(1;\ 4;\ 0)$. Найти длину и направление вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

3.18. Даны векторы $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j} + 5\sqrt{2}\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$. Найти угол, образуемый вектором $\vec{a} - \vec{b}$ с осью Oz.

3.19. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ перпендикулярны?

3.20. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ на вектор $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.

3.21. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a} + \vec{c}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

3.22. Найти вектор $\vec{d}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$, если известно, что его проекция на вектор $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ равна 1.

3.2. n-мерный вектор и векторное пространство. Евклидово пространство

Справочный материал

1. n-мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i — i-я компонента вектора $\boldsymbol{x}$ ($i=1, \ldots, n$).

Векторы $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ равны, т.е. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, если

$$x_i=y_i, \ (i=1, 2, \ldots, n).$$

Произведением вектора $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *на число* λ называется вектор $\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{x}$, если $u_i=\lambda x_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$).

Суммой двух векторов $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется вектор $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, если $z_i=x_i+y_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$).

2. Векторным (линейным) пространством называется множество векторов (элементов) с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющим определенным[1] свойствам, (рассматриваемым как аксиомы).

3. Вектор $\boldsymbol{a}_m$ называется *линейной комбинацией векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{m-1}$, если

$$\boldsymbol{a}_m=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_{m-1}\boldsymbol{a}_{m-1}, \qquad (3.16)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ — какие-то числа.

4. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}. \qquad (3.17)$$

---

[1] См. учебник, с. 69.

Если равенство **(3.17)** выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ называются *линейно независимыми.*

5. Размерность пространства — максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Базисом п-мерного пространства называется совокупность n линейно независимых векторов.

Разложение вектора $\boldsymbol{x}$ *по базису* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \qquad \textbf{(3.18)}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты вектора.

6. Переход от старого базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ *к новому* $\left(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \ldots, \boldsymbol{e}_n^*\right)$ задается *матрицей перехода*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(3.19)}$$

так, что

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^* \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}_n^* \end{pmatrix} = A' \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(3.20)}$$

Переход от координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора $\boldsymbol{x}$ относительно старого базиса к координатам вектора $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ относительно нового базиса осуществляется по формулам:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \ldots \\ x_n^* \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \textbf{(3.21)}$$

или
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \ldots \\ x_n^* \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(3.22)}$$

где A — матрица перехода **(3.19)**.

7. Скалярным произведением двух векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется число

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i. \qquad (3.23)$$

8. Евклидовым пространством называется линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющих определенным[1] свойствам.

Длиной (нормой) вектора $\boldsymbol{x}$ в евклидовом пространстве называется число

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\,. \qquad (3.24)$$

9. Угол φ *между векторами* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ определяется равенством:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|}, \qquad (3.25)$$

где $0 < \varphi < \pi$.

10. Два вектора $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ называются *ортогональными*, если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ n-мерного евклидова пространства образуют *ортогональный базис*, если $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$ при $i \neq j$, и — *ортонормированный базис*, если $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $|\boldsymbol{e}_i| = 1$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

3.23. Выяснить, является ли линейным пространством множество всех:

а) действительных чисел; *б*) целых чисел; *в*) рациональных чисел?

Р е ш е н и е. Из указанных множеств только множество действительных чисел образует линейное пространство. В самом деле, при сложении действительных чисел и умножении их на любое число получаются всегда действительные числа. А при умножении целых чисел, например, на рациональные числа $\lambda = p/q$ получаются рациональные числа, но не обязательно целые. Аналогично при умножении рациональных чисел, например, на иррациональные числа λ получаются иррациональные, а не рациональные числа.▶

3.24. Выяснить, являются ли векторы $\boldsymbol{a}_1 = (4; -5; 2; 6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2; -2; 1; 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (6; -3; 3; 9)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4; -1; 5; 6)$ линейно зависимыми?

---

[1] См. учебник, с. 76, 77.

Р е ш е н и е. Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ линейно зависимы, если существуют такие значения λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что будет выполняться векторное равенство[1] **(3.17)**:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}4\\-5\\2\\6\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}6\\-3\\3\\9\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}4\\-1\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Задача свелась к решению системы:

$$\begin{cases}4\lambda_1+2\lambda_2+6\lambda_3+4\lambda_4=0,\\-5\lambda_1-2\lambda_2-3\lambda_3-\lambda_4=0,\\2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3+5\lambda_4=0,\\6\lambda_1+3\lambda_2+9\lambda_3+6\lambda_4=0.\end{cases}\qquad (*)$$

Решая систему **(*)** методом Гаусса, приводим ее к виду:

$$\begin{cases}4\lambda_1+2\lambda_2+6\lambda_3+4\lambda_4=0,\\2\lambda_2+18\lambda_3+16\lambda_4=0,\\-6\lambda_4=0,\\0=0,\end{cases}$$

т.е. ранг матрицы системы ($r = 3$) меньше числа переменных ($n = 4$), откуда следует бесконечное множество решений (λ_1, λ_2, λ_3, λ_4) данной системы, следовательно, векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ – линейно зависимы.

З а м е ч а н и е. Установить неопределенность системы *однородных* линейных уравнений (*) можно было и иначе, убедившись в том, что определитель матрицы системы $\Delta = |A| = 0$.▶

3.25. Найти все значения m, при которых вектор $\boldsymbol{b} = (1;\ m;\ 3)$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1 = (2;\ 3;\ 7)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3;\ -2;\ 4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1;\ 1;\ -1)$.

Р е ш е н и е. Вектор $\boldsymbol{b}$ есть линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, если

$$\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3\ ,$$

или

$$\begin{pmatrix}1\\m\\3\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — какие-то числа.

---

[1] В данном случае векторы удобнее записать в виде вектор-столбцов.

Решая соответствующую систему

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 1, \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = m, \\ 7\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса, приводим ее к виду:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 1, \\ \quad 13\lambda_2 - 5\lambda_3 = 3 - 2m, \\ \quad\quad 0 = 2 - 2m. \end{cases}$$

Система будет совместна (а именно — неопределенная), если $0 = 2 - 2m$, т.е. при $m = 1$ вектор $\boldsymbol{b}$ есть линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Замечание. Задача допускает и другое решение. Так как определитель матрицы системы $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$, то система будет совместной (а именно — неопределенной), если определитель любой матрицы A_j, полученной из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов, равен нулю, т.е.

$$\Delta_j = |A_j| = 0 \quad (j = 1,\ 2, \ldots, n).$$

Например, $\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0,$ или $\Delta_2 = |A_2| = 0,$ или $\Delta_3 = |A_3| = 0$ при $m = 1$. ▶

3.26. В базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ даны векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0;\ 2;\ 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0;\ 1;\ 5)$:

а) доказать, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ образуют базис;

б) найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ в базисе $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$.

Решение:

а) Три вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ трехмерного пространства образуют базис, если они линейно независимы. Составим векторное равенство **(3.17)**:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Решая уравнение (*) аналогично примеру **3.24**, можно убедиться в единственном нулевом его решении: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, т.е. векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ представляют совокупность линейно независимых векторов и, следовательно, образуют базис.

б) Выразим связь между базисами ($\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$) и ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$):

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

В соответствии с **(3.20)**:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}, \text{ откуда матрица перехода } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(Обращаем внимание на то, что коэффициенты разложения новых базисных векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ по старому базису ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) образуют с т о л б ц ы матрицы перехода A.)

Вычисляем $A^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ (см. § **1.2**).

Теперь по **(3.21)** при $x = (2; -1; 1)'$ получим

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. координаты вектора $\boldsymbol{d}$ в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ есть 2, –2, 1, т.е.

$$\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3. \ ▶$$

3.27. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

перехода от базиса ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) к базису $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{e}_3^*$ в базисе ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$).

Р е ш е н и е. Вектор $\boldsymbol{e}_3^*$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$ имеет координаты $\boldsymbol{e}_3^* = (0; 0; 1)$.

Следовательно, по формуле (3.22):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix},$$

т.е. в базисе ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) вектор $\boldsymbol{e}_3^* = (3; 4; -5)$. ▶

3.28. Предприятие выпускает 4 вида продукции P_1, P_2, P_3, P_4 в количествах 50, 80, 20, 120 единиц. При этом нормы расхода сырья составляют соответственно 7; 3,5; 10; 4 кг. Определить суммарный расход сырья и его изменение при изменениях выпуска продукции P_1, P_2, P_3, P_4 соответственно +5, –4, –2, +10 единиц.

Р е ш е н и е. Пусть вектор выпуска продукции $\boldsymbol{x} = (50;\ 80;\ 20;\ 120)$, а вектор расхода сырья $\boldsymbol{y} = (7;\ 3{,}5;\ 10;\ 4)$. Тогда суммарный расход сырья S есть скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, т.е.

$$S = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 50\cdot 7 + 80\cdot 3{,}5 + 20\cdot 10 + 120\cdot 4 = 1310 \text{ (кг)}.$$

По свойству скалярного произведения векторов изменение суммарного расхода сырья:

$$\Delta S = (\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = +5\cdot 7 - 4\cdot 3{,}5 - 2\cdot 10 + 10\cdot 4 = 41 \text{ (кг)}. \blacktriangleright$$

3.29. Даны векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, образующие ортонормированный базис. Найти угол между векторами $\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

Р е ш е н и е. Найдем по формулам (3.23), (3.24) скалярное произведение векторов и их длины, учитывая, что единичные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ образуют ортонормированный базис:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 5\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 = 6;$$

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}\,;\ |\boldsymbol{y}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}\,.$$

По формуле (3.25) $\cos\varphi = \dfrac{6}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{6}{13}}$ и $\varphi = \arccos\sqrt{\dfrac{6}{13}} \approx 47°$. ▶

3.30. Выяснить, является ли линейным пространством множество всех алгебраических многочленов одной переменной: *а*) степени не выше n; *б*) степени n; *в*) степени выше n?

3.31. Выяснить, является ли линейным пространством множество всех:

а) матриц размера $m\times n$;

б) диагональных матриц порядка n;

в) невырожденных матриц порядка n;

г) векторов?

3.32. Выяснить, является ли множество всех решений системы n линейных однородных уравнений с n переменными линейным пространством?

3.33. Каким должно быть число a, чтобы множество, состоящее из одного этого числа, являлось линейным пространством?

3.34. Доказать, что в двумерном векторном пространстве R^2:

а) векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — линейно независимы;

б) любые два коллинеарных вектора линейно зависимы;

в) любые три вектора линейно зависимы.

3.35. Доказать, что в трехмерном векторном пространстве R^3:

а) векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — линейно независимы;

б) любые три компланарных вектора линейно зависимы;

в) любые четыре вектора линейно зависимы.

3.36. Доказать, что система векторов будет линейно зависима, если она содержит: *а*) два равных вектора; *б*) два пропорциональных вектора.

3.37. В некотором базисе заданы векторы $\boldsymbol{a}_1 = (-2; 0; 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1; -1; 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0; 1; 2)$. Выяснить, является ли вектор $\boldsymbol{a}_4 = (2; 3; 4)$ линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.

3.38. В некотором базисе даны векторы $\boldsymbol{a}_1 = (2; 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1; 3)$. Найти все значения m, при которых вектор $\boldsymbol{b} = (1; m)$ в том же базисе является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$.

3.39. В некотором базисе даны векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1; 2; 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2; 1; 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1; -2; -1)$. Найти все значения m, при которых вектор $\boldsymbol{b} = (2; 3; m)$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.

Выяснить, являются ли линейно зависимыми или линейно независимыми векторы:

3.40. $\boldsymbol{a}_1 = (-7; 5; 19)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-5; 7; -7)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-8; 7; 14)$.

3.41. $\boldsymbol{a}_1 = (1; 8; -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-2; 3; 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4; -11; 9)$.

3.42. В базисе ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$) даны векторы $\boldsymbol{a}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$: *а*) доказать, что векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ образуют базис; б) найти координаты вектора $\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$ в базисе ($\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$).

3.43. Выяснить, образуют ли базис трехмерного пространства R^3 векторы: $\boldsymbol{a}_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1;\ 0;\ 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2;\ 1;\ 2)$.

3.44. Выяснить, образует ли базис четырехмерного пространства R^4 векторы: $\boldsymbol{a}_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1;\ 0;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0;\ -1;\ 0;\ 1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1;\ 0;\ 0;\ 1)$.

3.45. В базисе ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) задан вектор $\boldsymbol{x} = (4;\ 0;\ -12)$. Найти координаты этого вектора в базисе ($\boldsymbol{e}_1^* = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$; $\boldsymbol{e}_2^* = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3^* = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$).

3.46. Найти матрицу перехода от базиса ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) к базису ($\boldsymbol{e}_1^* = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2^* = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3^* = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$).

3.47. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

перехода от базиса ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$) к базису ($\boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2^*$). Найти координаты векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ в базисе ($\boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2^*$).

3.48. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

перехода от базиса ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) к базису ($\boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2^*$, $\boldsymbol{e}_3^*$). Найти координаты векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ в базисе ($\boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2^*$, $\boldsymbol{e}_3^*$).

3.49. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису (e_1^*, e_2^*, e_3^*). Найти координаты вектора e_2^* в базисе (e_1, e_2, e_3).

3.50. Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3, e_4) к базису (e_3, e_4, e_2, e_1).

3.51. Предприятие выпускает три вида продукции P_1, P_2, P_3 в количестве 15, 25, 40 штук, реализуемых по ценам 30, 40, 50 усл. ед. соответственно. Найти выручку предприятия от реализации продукции и ее изменение при изменении цен продукции P_1, P_2, P_3 соответственно на +5, –3, +2 усл. ед.

3.52. Векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортогональный базис. Найти скалярное произведение векторов $x = 2e_1 - 3e_2 + 4e_3$ и $y = e_1 + e_2 - 5e_3$ и их длины, если $|e_1| = 1$, $|e_2| = 2$, $|e_3| = 2$.

3.53. Векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортонормированный базис. Найти угол между векторами $x = 3e_2 - e_3$ и $y = 4e_1 + e_2 - 2e_3$.

3.3. Линейные операторы

Справочный материал

1. Если задан закон (правило), по которому каждому вектору x пространства R^n ставится в соответствие единственный вектор y пространства R^m, то говорят, что задан *оператор* (*преобразование, отображение*) $A(x)$, действующий из R^n в R^m: $y = A(x)$.

Рассматриваем случай, когда пространства R^n и R^m совпадают.

2. Оператор A называется *линейным*, если для любых векторов x, y пространства R^n и любого числа λ верны соотношения:

$$A(x + y) = A(x) + A(y),$$

$$A(\lambda x) = \lambda A(x). \tag{3.26}$$

3. Вектор $y = A(x)$ называется *образом* вектора x, а сам вектор x — *прообразом* вектора y.

Связь между вектором x и *его образом* $y = A(x)$ может быть представлена в виде:

$$y = Ax, \tag{3.27}$$

где A — матрица линейного оператора; $x = (x_1, x_2, ..., x_n)'$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)'$ — векторы, записываемые в виде вектор-столбцов.

4. Сумма и произведение линейных операторов, а также произведение линейного оператора на число определяются равенствами:

$$(\widetilde{A}+\widetilde{B})(\boldsymbol{x})=\widetilde{A}(\boldsymbol{x})+\widetilde{B}(\boldsymbol{x}),$$
$$(\widetilde{A}\widetilde{B})(\boldsymbol{x})=\widetilde{A}(\widetilde{B}(\boldsymbol{x})), \tag{3.28}$$
$$\lambda\widetilde{A}(\boldsymbol{x})=\lambda(\widetilde{A}(\boldsymbol{x})).$$

5. Нулевым $O(\boldsymbol{x})$ и *тождественным* $E(\boldsymbol{x})$ называются операторы, действующие по правилу:

$$O(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0},$$
$$E(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}. \tag{3.29}$$

6. Матрицы A и A^* линейного оператора $\widetilde{A}$ в базисах $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ и $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \ldots, \boldsymbol{e}_n^*)$ связаны соотношением:

$$A^*=C^{-1}AC, \tag{3.30}$$

где C — матрица перехода от старого базиса к новому[1].

3.54. Выяснить, является ли оператор $\widetilde{A}(\boldsymbol{x})=(2x_1-x_3;\ x_3;\ x_1-x_2)$ линейным, если вектор $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$.

Р е ш е н и е. По условию вектор $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$. Пусть вектор $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)$. Тогда по определению операций над векторами:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3),\ \ \lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Найдем образы векторов:

$$\widetilde{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(2(x_1+y_1)-(x_3+y_3);\ x_3+y_3;\ (x_1+y_1)-(x_2+y_2))=$$
$$=((2x_1-x_3)+(2y_1-y_3);\ x_3+y_3;\ (x_1-x_2)+(y_1-y_2))=$$
$$=(2x_1-x_3;\ x_3;\ x_1-x_2)+(2y_1-y_3;\ y_3;\ y_1-y_2);$$

$$\widetilde{A}(\lambda\boldsymbol{x})=(\lambda x_1-\lambda x_3;\ \lambda x_3;\ \lambda x_1-\lambda x_2)=\lambda(x_1-x_3;\ x_3;\ x_1-x_2).$$

Так как $\widetilde{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\widetilde{A}(\boldsymbol{x})+\widetilde{A}(\boldsymbol{y})$, $\widetilde{A}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\widetilde{A}(\boldsymbol{x})$, то оператор $\widetilde{A}$ является линейным.▶

3.55. Найти матрицу линейного оператора

$\boldsymbol{y}=A(\boldsymbol{x})=(x_1+x_2-x_3;\ 2x_3;\ 2x_2+5x_3)$, где $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ в том базисе, в котором даны координаты векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

Р е ш е н и е. Запишем связь между координатами векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и соответственно матрицу линейного оператора $\widetilde{A}$:

---

[1] В § 3.2 матрица перехода обозначалась буквой $\boldsymbol{A}$.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = \qquad\quad 2x_3, \\ y_3 = \quad 2x_2 + 5x_3, \end{cases} \qquad \text{следовательно, } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}. ▶$$

3.56. Найти (в том же базисе) координаты вектора $\boldsymbol{y} = \widetilde{A}(\boldsymbol{x})$, если оператор $\widetilde{A}$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3.$$

Р е ш е н и е. В соответствии с **(3.27)**:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \boldsymbol{y} = (-4; 7; 7). ▶$$

3.57. Матрица линейного оператора в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A^* этого оператора в базисе $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$, если $\boldsymbol{e}_1^* = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2^* = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3^* = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3$.

Р е ш е н и е. Матрица C перехода от старого базиса к новому имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле **(3.30)**:

$$A^* = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Расчеты предлагаем провести читателю самостоятельно.) ▶

Выяснить, является ли оператор $\widetilde{A}(\boldsymbol{x})$ линейным, если вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$:

3.58. $\widetilde{A}(\boldsymbol{x}) = (x_2 - 2x_3;\ x_1 + x_2;\ x_1)$. **3.59.** $\widetilde{A}(\boldsymbol{x}) = (x_1x_2;\ x_2x_3;\ x_1x_3)$.

3.60. $\widetilde{A}(\boldsymbol{x}) = (x_1^2;\ x_2^2;\ x_3^2)$. **3.61.** $\widetilde{A}(\boldsymbol{x}) = (x_1 - x_2;\ 2x_1 + x_3;\ x_2 - 2x_3)$.

3.62. $\widetilde{A}(\boldsymbol{x})$ — тождественный оператор $E(\boldsymbol{x}) = (x_1;\ x_2;\ x_3)$.

3.63. $\widetilde{A}(\boldsymbol{x})$ — нулевой оператор $O(\boldsymbol{x}) = (0;\ 0;\ 0)$.

Найти координаты вектора $\boldsymbol{y} = \widetilde{A}(\boldsymbol{x})$, если оператор $\widetilde{A}$ задан матрицей A (в этом же базисе):

3.64. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$.

3.65. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

3.66. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = (2; -1)$.

Найти матрицу A^* линейного оператора в базисе $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$, заданного матрицей A в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$:

3.67. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_1^* = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2^* = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$.

3.68. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_1^* = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2^* = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$,

$\boldsymbol{e}_3^* = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$.

3.69. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_1 = 3\boldsymbol{e}_1^* - \boldsymbol{e}_2^*$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1^* + \boldsymbol{e}_2^*$.

3.70. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2 = 3\boldsymbol{e}_1^* + \boldsymbol{e}_2^*$, $\boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{e}_1^* + \boldsymbol{e}_2^* + 2\boldsymbol{e}_3^*$.

3.4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора (матрицы)

Справочный материал

1. Вектор $x \neq 0$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\tilde{A}$ (или матрицы A), если найдется такое число λ, что

$$\tilde{A}(x) = \lambda x \tag{3.31}$$

или

$$Ax = \lambda x. \tag{3.32}$$

Число λ называется *собственным* (*характеристическим*) *значением* (*числом*) *оператора* $\tilde{A}$ (*или матрицы* A), соответствующим вектору x.

Определение (3.32) может быть записано в виде:

$$(A - \lambda E)\,x = \mathbf{0}. \tag{3.33}$$

2. Характеристическим уравнением оператора $\tilde{A}$ (или матрицы A) называется уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{3.34}$$

где определитель $|A - \lambda E|$ называется *характеристическим многочленом* оператора $\tilde{A}$ (или матрицы A).

Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса.

3. Матрица оператора $\tilde{A}$ в базисе, состоящем из его собственных векторов с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, является диагональной:

$$A^* = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \tag{3.35}$$

И обратно, если матрица A линейного оператора $\tilde{A}$ в некотором базисе является диагональной (3.35), то все векторы этого базиса — собственные векторы оператора $\tilde{A}$ с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

3.71. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widetilde{A}$ (матрицы A):

$$a)\ A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix};\qquad б)\ A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -8\\ -4 & 7 & -4\\ -8 & -4 & 1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е (*а*):

1. Составляем характеристическое уравнение **(3.34)**:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\ ,\qquad \text{или}\qquad (2-\lambda)(1-\lambda)-12=0,$$

откуда $\lambda^2-3\lambda-10=0$ и собственные значения матрицы $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=5$.

2. Найдем собственный вектор $x^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=-2$:

$$(A-\lambda_1 E)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\ ,\quad \text{или}\quad \begin{pmatrix}4 & 3\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ \text{т.е.}\ \begin{cases}4x_1+3x_2=0,\\ 4x_1+3x_2=0.\end{cases}$$

Полагая $x_2=c_1$, найдем $\left(x_1=-\dfrac{3}{4}c_1,\ x_2=c_1\right)$, т.е. вектор $x^{(1)}=\left(-\dfrac{3}{4}c_1, c_1\right)$ при любом $c_1\neq 0$ есть собственный вектор оператора $\widetilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda=-2$.

3. Найдем собственный вектор $x^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2=5$:

$$(A-\lambda_2 E)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\quad \text{или}\quad \begin{pmatrix}-3 & 3\\ 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ \text{т.е.}\ \begin{cases}-3x_1+3x_2=0,\\ \ \ 4x_1-4x_2=0.\end{cases}$$

Полагая $x_2=c_2$, получим $x_1=c_2$, $x_2=c_2$, т.е. вектор $x^{(2)}=(c_2, c_2)$ при любом $c_2\neq 0$ есть собственный вектор оператора $\widetilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda=5$.

Р е ш е н и е (*б*):

1. Составляем характеристическое уравнение **(3.34)**

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -4 & -8\\ -4 & 7-\lambda & -4\\ -8 & -4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

После преобразований уравнение примет вид:

$$\lambda^3-9\lambda^2-81\lambda+729=0.$$

Решая это уравнение, получим:

$$\lambda^2(\lambda-9)-81(\lambda-9)=0,\ \text{или}\ (\lambda-9)(\lambda^2-81)=0,$$

откуда собственные значения оператора $\widetilde{A}$ (матрицы A): $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

2. Найдем собственный вектор $x^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$:

$$(A-9E)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \\ \qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r = 1$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 1 = 2$ свободные (неосновные) переменные, например, x_2 и x_3. Полагая $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$, найдем вектор $\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(-\frac{1}{2}c_1 - c_2;\, c_1;\, c_2\right)$, который при любых c_1, c_2, удовлетворяющих условию $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, есть собственный вектор оператора $\widetilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda = 9$.

3. Аналогично находим, что вектор $\boldsymbol{x}^{(2)} = \left(c_3;\, \frac{1}{2}c_3;\, c_3\right)$ при любом $c_3 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\widetilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda = -9$.▶

3.72. Привести к диагональному виду матрицу A линейного оператора $\widetilde{A}$:

$$а)\; A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \qquad б)\; A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. В примере **3.71**, *а* найдены собственные значения оператора $\widetilde{A}$ (матрицы A) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 5$ и его собственные векторы $\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(-\frac{3}{4}c_1;\, c_1\right)$, $\boldsymbol{x}^{(2)} = (c_2;\, c_2)$, где $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Следовательно, в базисе $(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)})$, состоящем из собственных векторов, матрица A будет иметь диагональный вид, т.е.

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-2;\, 5).$$

Это означает, что при переходе от старого базиса $\left(e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix};\ e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ к базису ($x^{(1)}$, $x^{(2)}$), состоящему из собственных векторов, т.е., например, при матрице перехода $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (полученной при $c_1 = 4$, $c_2 = 1$), матрица A в соответствии с формулой **(3.30)** станет диагональной:

$$A^* = C^{-1}AC = \text{diag}\,(-2;\,5).$$

В примере **3.71**, *б* найдены собственные значения оператора $\widetilde{A}$ (матрицы A): $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$ и его собственные векторы: $\left(-\frac{1}{2}c_1 - c_2;\ c_1;\ c_2\right)$, $\left(c_3;\ \frac{1}{2}c_3;\ c_3\right)$, где $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$. Следовательно, в базисе, состоящем из *трех* собственных векторов, матрица A будет иметь диагональный вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \text{diag}\,(9;\,9;\,-9).$$

Это означает, что при переходе от старого базиса $\left(e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix},\right.$ $\left. e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ к базису, состоящему из собственных векторов (полученных, например, при $c_1 = 2$, $c_2 = 0$, $c_3 = 2$ и $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$), т.е. при матрице перехода $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрица A в соответствии с формулой **(3.30)** станет диагональной:

$$A^* = C^{-1}AC = \text{diag}\,(9;\,9;\,-9). \blacktriangleright$$

3.73. Выяснить, приводится ли к диагональному виду матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Аналогично примеру **3.71** устанавливаем, что данная матрица имеет собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ и отвечающие им собственные векторы $\boldsymbol{x}^{(1)} = (0; -c_1; c_1)$ и $\boldsymbol{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}c_2, -\frac{3}{2}c_2, c_2\right)$, где $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Так как два линейно независимых собственных вектора, получаемых при любых парах значений $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, не могут образовать базис в пространстве R^3, то матрица A не может быть приведена к диагональному виду.▶

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\widetilde{A}$ (матрицы A):

3.74. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

3.75. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.76. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

3.77. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.78. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3.79. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.80. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.81. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 2 & -4 & 7 & -4 \\ -1 & -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти базис, в котором линейный оператор $\widetilde{A}$, задаваемый матрицей A, имеет диагональный вид:

3.82. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. **3.83.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. **3.84.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Выяснить, приводится ли к диагональному виду матрица A. Если приводится, то записать диагональный вид матрицы:

3.85. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3.86. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3.87. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. **3.88.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.5. Квадратичные формы

Справочный материал

1. Квадратичной формой $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j. \quad (3.36)$$

В *матричной записи* квадратичная форма имеет вид:

$$L = X'AX, \quad (3.37)$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ — матрица-столбец переменных.

2. При невырожденном линейном преобразовании $X = CY$ (где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$) матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A^* = C'AC, \quad (3.38)$$

где C — матрица линейного преобразования.

3. Квадратичная форма $L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ называется *канонической* (имеет *канонический* вид), если все ее коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$:

$$L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^2. \quad (3.39)$$

Ранг квадратичной формы равен числу отличных от нуля коэффициентов канонической формы и не меняется при линейных преобразованиях.

4. Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля,

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \qquad (L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0).$$

Квадратичная форма $L = X'AX$ ***положительно определена*** тогда и только тогда, когда:

а) все собственные значения λ_i матрицы A положительны;

б) все главные (угловые) миноры матрицы A положительны (*критерий Сильвестра*).

Квадратичная форма $L = X'AX$ *отрицательно определена* тогда и только тогда, когда:

а) все собственные значения λ_i матрицы A отрицательны;

б) все главные (угловые) миноры матрицы A нечетного порядка отрицательны, а миноры матрицы четного порядка положительны (*критерий Сильвестра*).

Если квадратичная форма *знакоопределенная*, то все главные (угловые) миноры ее матрицы отличны от нуля.

3.89. Дана квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3.$$

Записать ее в матричном виде.

Р е ш е н и е. Диагональные элементы симметрической матрицы A квадратичной формы равны коэффициентам при квадратах переменных, т.е. 2; –5; 8, а другие элементы — половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы. Поэтому, используя (3.37), получим

$$L = X'AX = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

3.90. Найти квадратичную форму, соответствующую матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. В соответствии с (3.37) получим после преобразований

$$L = X'AX = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3. \blacktriangleright$$

3.91. Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$. Найти квадратичную форму $L\ (y_1, y_2)$, полученную из данной линейным преобразованием $x_1 = 2y_1 - y_2,\quad x_2 = y_1 + y_2$.

Р е ш е н и е. Матрица данной квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

а матрица линейного преобразования $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, по

(3.38) матрица искомой квадратичной формы

$$A^* = C'AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix},$$

а квадратичная форма имеет вид: $A^* = 19y_1^2 - 10y_1y_2 - 2y_2^2$.▶

3.92. Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$L = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Р е ш е н и е. Сгруппируем все члены, содержащие x_1, и дополним их до полного квадрата:

$$L = \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3\right) + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 =$$
$$= \left(x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2\right) - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_2x_3.$$

Сгруппируем все члены, содержащие x_2, и дополним их до полного квадрата:

$$L = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 5x_3^2.$$

Итак, невырожденное линейное преобразование $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$ приводит данную квадратичную форму к каноническому виду $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2$.▶

3.93. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму L:

а) $L = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

б) $L = 2x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$; *в*) $L = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$.

Р е ш е н и е (*а*):

I способ. Матрица A квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения (находим аналогично примеру 3.71): $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{7}$ — все положительные, следовательно, квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3)$ положительно определенная.

II способ. Так как все главные (угловые) миноры матрицы A положительны, т.е.

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$ то по критерию Сильвестра квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3)$ положительно определенная.

Р е ш е н и е (*б*). Матрица A квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Так как $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -7 < 0$, то квадратическая форма $L\ (x_1, x_2)$ не является знакоопределенной (она была бы отрицательно определенной, если бы $\Delta_1 < 0$, а $\Delta_2 > 0$).

Р е ш е н и е (*в*). Матрица A квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Так как $\Delta_1 = 4$, а $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, то квадратичная форма $L\ (x_1, x_2)$ не является знакоопределенной.▶

Написать квадратичную форму L в матричном виде:

3.94. $L = 3x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$.

3.95. $L = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 5x_1x_3$.

3.96. $L = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3$.

Найти ранг квадратичной формы L:

3.97. $L = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$.

3.98. $L = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3$.

3.99. $L = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$.

Найти квадратичную форму, полученную из данной указанным преобразованием:

3.100. $L=3x_1^2-x_2^2+4x_1x_2$;
$$\begin{cases} x_1=2y_1-y_2, \\ x_2=y_1+y_2. \end{cases}$$

3.101. $L=2x_1^2+3x_2^2-x_3^2+x_1x_2$;
$$\begin{cases} x_1=-y_1+2y_2, \\ x_2=3y_1+y_2+y_3, \\ x_3=-2y_1-y_2. \end{cases}$$

3.102. $L=2x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+x_2x_3$;
$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2-y_3, \\ x_2=y_1-y_2+y_3, \\ x_3=y_1+y_2. \end{cases}$$

Привести к каноническому виду квадратичные формы:

3.103. $L=2x_1^2-3x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$.

3.104. $L=x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_3$.

3.105. $L=x_1^2-4x_2x_3+x_3^2$.

3.106. $L=x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$.

Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму L:

3.107. $L=x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$.

3.108. $L=-2x_2^2-x_1^2-x_1x_3+2x_2x_3-2x_3^2$.

3.109. $L=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+4x_2x_3$.

3.110. $L=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$.

При каких значениях параметра m является знакоопределенной квадратичная форма L:

3.111. $L=mx_1^2+x_2^2+4x_1x_2$.

3.112. $L=2x_1^2+3x_2^2+2mx_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$.

3.113. $L=mx_2^2-x_1^2-4x_1x_2+6x_1x_3+10x_2x_3$.

Найти все значения параметра m, при которых положительно определены квадратичные формы L:

3.114. $L=2x_1^2+x_2^2+mx_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

3.115. $L = mx_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

3.116. $L = 2mx_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$

3.117. $L = 2x_1^2 + mx_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$

Найти все значения параметра m, при которых отрицательно определена квадратичная форма L:

3.118. $L = -x_1^2 + mx_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

3.119. $L = -2x_1^2 - 2x_2^2 + mx_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

3.120. $L = 2mx_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

3.121. $L = -x_1^2 - 2x_2^2 + 2mx_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$

3.6. Линейная модель обмена (модель международной торговли)

Справочный материал

Линейная модель обмена (*модель международной торговли*) позволяет найти национальные доходы стран (или их соотношение) для сбалансированной торговли.

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектор национальных доходов стран S_1, S_2, ..., S_n, а $A_{n\times n} = (a_{ij})$ — структурная матрица торговли, где a_{ij} — доля национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i, причем $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

Для сбалансированной торговли необходимо найти такой равновесный вектор национальных доходов $\boldsymbol{x}$, чтобы[1]

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}. \qquad (3.40)$$

Задача свелась к отысканию собственного вектора $\boldsymbol{x}$, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$ (см. §3.4).

[1] См. учебник, с. 92.

3.122. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов этих стран для сбалансированной торговли.

Р е ш е н и е. Находим собственный вектор $\boldsymbol{x}$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, решив уравнение $(A - E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, или

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & -0,6 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & -0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

методом Гаусса. Найдем $\boldsymbol{x} = (c;\ 2c;\ c)$. Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при соотношении их национальных доходов 1 : 2 : 1. ▶

Найти соотношение национальных доходов стран $S_1, \ldots, S_n$, для сбалансированной торговли, если задана структурная матрица торговли A:

3.123. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 1/3 \\ 0,5 & 0,5 & 1/3 \\ 0,5 & 0,25 & 1/3 \end{pmatrix}$. **3.124.** $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$.

Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли A, если известно, что суммарный доход этих стран равен 402 усл. ден. ед.:

3.125. $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,7 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$. **3.126.** $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$.

3.127. $A = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/10 & 1/10 \\ 1/10 & 2/5 & 3/10 \\ 1/2 & 3/10 & 3/5 \end{pmatrix}$. **3.128.** $A = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/5 & 2/5 \\ 3/10 & 1/10 & 1/10 \\ 2/5 & 7/10 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Задачи для повторения

3.129. Разложить вектор $\vec{c}=(9;\ 4)$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;\ 2)$ и $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}$.

3.130. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеют равные длины и попарно образуют равные углы. Найти вектор $\vec{c}$, если $\vec{a}=(1;\ 1;\ 0)$, $\vec{b}=(0;\ 1;-1)$.

3.131. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$; $|\vec{q}|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен 45°.

3.132. Дана пирамида с вершинами $A_1(7;\ 2;\ 4)$, $A_2(7;\ -1;\ -2)$, $A_3(3;\ 3;\ 1)$, $A_4(-4;\ 2;1)$. Найти длину ребра $\overline{A_1A_2}$ и угол между ребрами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$.

3.133. Найти вектор $\vec{d}$, зная, что $\vec{d}\perp\vec{a}$, $\vec{d}\perp\vec{b}$, где $\vec{a}=(2;\ 3;\ -1)$, $\vec{b}=(1;\ -2;\ 3)$ и $\vec{d}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$.

3.134. Убедиться в том, что векторы $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}$ образуют базис пространства R^2 и найти разложение вектора $\vec{c}=\vec{i}+3\vec{j}$ в этом базисе.

3.135. Найти все значения параметра t, при которых векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-5t\vec{j}+t\vec{k}$ образуют базис в пространстве R^3.

3.136. Известны векторы заработной платы (в усл. ден. ед.) семи работников за январь $\boldsymbol{a}$ = (500; 190; 160; 210; 300; 270; 310) и за февраль $\boldsymbol{b}$ = (380; 190; 170; 150; 230; 250; 300). В марте этим работникам предоставили отпуск, заплатив им по среднему заработку за январь и февраль. Найти вектор $\boldsymbol{c}$ — вектор заработной платы этих работников за март и доказать, что векторы a, b, c линейно зависимы.

3.137. Даны векторы $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_2=2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3$, где $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ — базис линейного пространства. Необходимо: а) доказать, что векторы $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ образуют базис; б) найти координаты вектора $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ в базисе $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$.

3.138. В некотором базисе даны векторы $\boldsymbol{a}_1=(2;\ 3;\ 7)$, $\boldsymbol{a}_2=(3;\ -2;\ 4)$, $\boldsymbol{a}_3=(-1;\ 1;\ -1)$. Найти все значения m, при которых вектор $\boldsymbol{b}=(1;\ m;\ 3)$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$.

3.139. В базисе $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ задан вектор $\boldsymbol{x}=(-1;\ 2;\ 0)$. Найти координаты этого вектора в базисе $(\boldsymbol{e}_1^*=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2^*=-3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_3^*=4\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3)$.

3.140. Найти (в том же базисе) координаты вектора $y = \tilde{A}x$, если оператор задан единичной матрицей четвертого порядка и $x = 2e_1 + e_2 - e_3 + e_4$.

3.141. Матрица линейного оператора в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^* этого оператора в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*), если $e_1 = e_1^*$, $e_2 = 3e_1^* + e_2^*$, $e_3 = 2e_1^* + e_2^* + 2e_3^*$.

3.142. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\tilde{A}$ (матрицы A):

а) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.143. Выяснить, приводится ли к диагональному виду матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.144. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

3.145. Написать квадратичную форму

$$L = -3x_1^2 - 5x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

в матричной форме и выяснить, является ли она положительно (отрицательно) определенной, используя собственные значения ее матрицы.

3.146. Решить пример **3.145**, используя критерий Сильвестра.

3.147. Квадратичная форма L имеет вид квадратного трехчлена: $L = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$. Какова взаимосвязь между знакоопределенностью квадратичной формы и дискриминантом квадратного трехчлена?

3.148. В каком отношении должны быть национальные доходы трех стран для сбалансированной торговли, если структурная матрица торговли имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}?$$

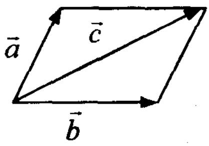
Контрольные задания по главе 3 «Элементы матричного анализа»

<table>
<tr><th>№</th><th>Вариант 3.1</th><th>Вариант 3.2</th><th>Вариант 3.3</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td colspan="3">Даны два единичных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$, угол между которыми 120°. Найти: а) острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) проекцию вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$:</td></tr>
<tr><td>$\vec{a}=-2\vec{m}+\vec{n}$,
$\vec{b}=-\vec{m}+3\vec{n}$</td><td>$\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}$,
$\vec{b}=-3\vec{m}+\vec{n}$</td><td>$\vec{a}=\vec{m}-3\vec{n}$,
$\vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td colspan="3">Выяснить, являются ли линейно зависимыми векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$:</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{a}_1=(1;4;6)$,
$\boldsymbol{a}_2=(1;-1;1)$,
$\boldsymbol{a}_3=(1;1;3)$</td><td>$\boldsymbol{a}_1=(2;-3;1)$,
$\boldsymbol{a}_2=(3;-1;5)$,
$\boldsymbol{a}_3=(1;-4;3)$</td><td>$\boldsymbol{a}_1=(1;2;3)$,
$\boldsymbol{a}_2=(4;5;6)$,
$\boldsymbol{a}_3=(7;8;9)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td colspan="3">Даны четыре вектора $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе:</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{a}_1=(4;5;2)$,
$\boldsymbol{a}_2=(3;0;1)$,
$\boldsymbol{a}_3=(-1;4;2)$,
$\boldsymbol{b}=(5;7;8)$</td><td>$\boldsymbol{a}_1=(3;-5;2)$,
$\boldsymbol{a}_2=(4;5;1)$,
$\boldsymbol{a}_3=(-3;0;-4)$,
$\boldsymbol{b}=(-4;5;-16)$</td><td>$\boldsymbol{a}_1=(-2;3;5)$,
$\boldsymbol{a}_2=(1;-3;4)$,
$\boldsymbol{a}_3=(7;8;-1)$,
$\boldsymbol{b}=(1;20;1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td colspan="3">Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$ (матрицы A). Привести матрицу A к диагональному виду A^* (если это возможно):</td></tr>
<tr><td>$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$</td><td>$A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$</td><td>$A=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\0&4&-1\\0&-1&4\end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td colspan="3">Привести к каноническому виду квадратическую форму L. Найти ранг квадратичной формы L. Выяснить, является ли квадратическая форма L знакоопределенной:</td></tr>
<tr><td>$L=x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+$
$+4x_2x_3+4x_3^2$</td><td>$L=4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3-$
$-3x_2^2+4x_3^2$</td><td>$L=4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+$
$+3x_2^2-4x_3^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td colspan="3">Выяснить, в каком отношении должны быть национальные доходы трех стран для сбалансированной торговли, если задана структурная матрица торговли A:</td></tr>
<tr><td>$A=\begin{pmatrix}0{,}3&0{,}3&0{,}8\\0{,}6&0{,}1&0{,}1\\0{,}1&0{,}6&0{,}1\end{pmatrix}$</td><td>$A=\begin{pmatrix}0{,}5&0{,}3&0{,}6\\0{,}4&0{,}3&0{,}1\\0{,}1&0{,}4&0{,}3\end{pmatrix}$</td><td>$A=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}3&0{,}4\\0{,}2&0{,}5&0{,}1\\0{,}1&0{,}2&0{,}5\end{pmatrix}$</td></tr>
</table>

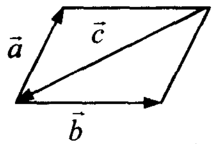
Тест 3

1. Установить соответствие между рисунками и векторными равенствами:

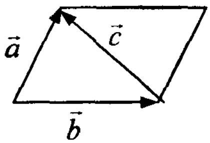
1)



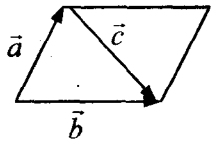
2)



3)



4)



а) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$; *б*) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$; *в*) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$; *г*) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$.

2. Определить длину вектора $\vec{c}=4\vec{a}+3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=120^\circ$.

3. Найти $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{c}$, где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — единичные векторы, удовлетворяющие условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

4. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$. Найти (с точностью до 0,1) проекцию вектора $(\vec{b}+\vec{c})$ на направление вектора $(\vec{a}+\vec{b})$.

5. Выяснить, какие множества элементов образуют линейное пространство:

1) множество натуральных чисел;
2) множество четных чисел;
3) множество всех многочленов степени не выше n;
4) множество всех ненулевых матриц;
5) множество всех решений системы n линейных однородных уравнений с n переменными.

6. Вектор $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ представить в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}=(3;-1)$, $\boldsymbol{b}=(1;-2)$, $\boldsymbol{c}=(-1;7)$.

Ответ: $\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$, где $\alpha=\ldots$; $\beta=\ldots$.

7. Выяснить, какие из приведенных троек векторов образуют базис в пространстве R^3:

1) (0; 0; 1), (0; 1; 0), (0; 1; 1);
2) (0; 0; 1), (1; 0; 0), (0; 1; 0);
3) (1; 1; 1), (0; 1; 0), (2; 2; 2);
4) (1; 1; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0).

8. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$) к базису $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*)$. Найти координаты ($a$; b) вектора $\boldsymbol{e}_1$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*)$.

9. Вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$) имеет координаты –3; 1. Найти координаты (a; b) этого вектора в базисе $(\boldsymbol{e}_1^* = -2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2^* = \boldsymbol{e}_2)$.

10. Векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ образуют ортонормированный базис. Найти (с точностью до 0,01) косинус угла между векторами $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

11. Линейный оператор $\widetilde{A}$ в базисе ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$) задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти образ $\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x})$ вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$.

Ответ: $\boldsymbol{y} = (a; b)$, где $a = \ldots$; $b = \ldots$.

12. Известно, что неколлинеарные векторы $\boldsymbol{x}_1 = (a; 1)$ и $\boldsymbol{x}_2 = (b; 1)$ являются собственными векторами матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти соответствующие собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы A и значения a и b ($a > b$).

13. Матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (см. задание **12**) привести к диагональному виду A^*.

Ответ: $A^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где $a = \ldots$; $b = \ldots$.

14. Найти ранг матрицы квадратичной формы $(x_1, \; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

15. Найти наибольшее целое значение m, при котором квадратичная форма $L = 4m x_1^2 + 3x_2^2 + 48x_1x_2$ не является знакоопределенной.

Глава 4
Уравнение линии. Прямая и плоскость

4.1. Простейшие задачи. Уравнение прямой на плоскости

Справочный материал

1. Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ координатной оси находится по формуле:

$$d=|x_2-x_1|. \qquad (4.1)$$

2. Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ плоскости находится по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (4.2)$$

3. Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ пространства находится по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (4.3)$$

4. Координаты (x, y) точки M, делящей отрезок с концами $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в отношении λ, т.е. $|M_1M|:|MM_2|=\lambda$, находятся по формуле:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \qquad (4.4)$$

5. Координаты (x, y) точки M – середины отрезка с концами $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ находятся по формуле:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases} \qquad (4.5)$$

6. Уравнение прямой:

- с угловым коэффициентом k и начальной ординатой b:

$$y=kx+b; \qquad (4.6)$$

- проходящей в данном направлении (с угловым коэффициентом k) через данную точку $M(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1); \qquad \textbf{(4.7)}$$

- проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad \textbf{(4.8)}$$

(с угловым коэффициентом

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}); \qquad \textbf{(4.9)}$$

- в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \textbf{(4.10)}$$

(a и b — соответственно отрезки, отсекаемые на осях Ox и Oy);

- общее:

$$Ax + By + C = 0. \qquad \textbf{(4.11)}$$

7. Расстояние d от точки A (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad \textbf{(4.12)}$$

8. Две прямые (1) и (2) заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ или $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Угол φ между прямыми находится из соотношения[1]:

$$\operatorname{tg} \overset{\frown}{\varphi} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \qquad \textbf{(4.13)}$$

или

$$\cos\varphi = \frac{\pm(A_1A_2 + B_1B_2)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad \textbf{(4.14)}$$

Условие параллельности прямых:

$$k_1 = k_2 \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \qquad \textbf{(4.15)}$$

[1] Стрелка означает, что искомый угол φ находится поворотом прямой (1) до прямой (2) против часовой стрелки.

Условие перпендикулярности прямых:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad \text{или} \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad \textbf{(4.16)}$$

Точка пересечения двух прямых находится из решения системы:

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2, \end{cases} \text{или} \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(4.17)}$$

4.1. Даны вершины треугольника $A(7; 9)$, $B(2; -3)$, $C(3; 6)$. Найти:

а) точку M пересечения медиан треугольника;

б) точку E пересечения биссектрисы AE со стороной BC.

Р е ш е н и е:

а) По формуле **(4.5)** найдем середину D стороны CB (рис. 4.1):

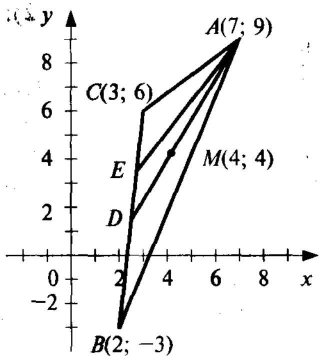


Рис. 4.1

$$x_D = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2},$$

$$y_D = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}, \text{ т.е. } D\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Точка M пересечения медиан треугольника делит любую медиану, например AD, в отношении $\lambda = 2{:}1$ (считая от вершины). Следовательно, по формуле **(4.4)**:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{7 + 2\cdot\frac{5}{2}}{1+2} = 4;$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{9 + 2\frac{3}{2}}{1+2} = 4, \textbf{ т.е. } O(4; 4).$$

б) По формуле **(4.2)** найдем длины сторон AC и BC:

$$|AC| = \sqrt{(7-3)^2 + (9-6)^2} = 5, \quad |AB| = \sqrt{(7-2)^2 + (9+3)^2} = 13.$$

Так как биссектриса AE делит сторону BC на отрезки, пропорциональные длинам противолежащих сторон, т.е.

$$\lambda = \frac{|CE|}{|EB|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{5}{13}, \text{ то}$$

$$x_E = \frac{x_C + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{3 + \frac{5}{13}\cdot 2}{1 + \frac{5}{13}} = \frac{49}{18}; \qquad y_E = \frac{y_C + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{6 + \frac{5}{13}(-3)}{1 + \frac{5}{13}} = \frac{7}{2},$$

т.е. $E\left(\frac{49}{18}; \frac{7}{2}\right)$.▶

4.2. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(2; -2)$ равно ее расстоянию от прямой $x + 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Расстояние от любой точки линии $M(x, y)$ до точки $A(2; -2)$ по формуле **(4.2)**:

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}.$$

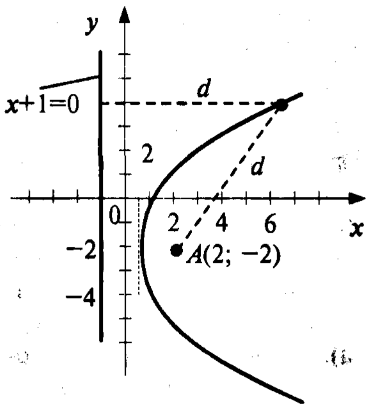


Рис. 4.2

Расстояние от точки $M(x, y)$ до прямой $x + 1 = 0$ по формуле **(4.12)**:

$$d = \frac{|1\cdot x + 0\cdot y + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x+1|.$$

По условию:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} = |x+1|.$$

После возведения в квадрат и соответствующих преобразований получим уравнение:

$$(y+2)^2 = 6\cdot(x - \frac{1}{2}).$$

Искомая линия (см. § **4.2**) — парабола, симметричная относительно прямой, параллельной оси Ox, с вершиной в точке $(\frac{1}{2}; -2)$ (рис. 4.2).▶

4.3. Издержки y (в руб.) на изготовление партии деталей определяются по формуле $y = ax + b$, где x — объем партии. Для первого варианта технологического процесса $y = 1{,}45x + 20$. Для второго варианта известно, что $y = 157{,}5$ (руб.) при $x = 100$ (дет.) и $y = 452{,}5$ (руб.) при $x = 300$ (дет.). Провести оценку двух вариантов технологического процесса и найти себестоимость продукции для обоих вариантов при $x = 200$ (дет.).

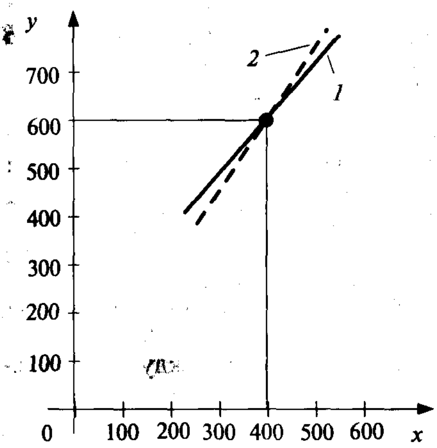


Рис. 4.3

Р е ш е н и е. Для второго варианта определяем параметры a и b из системы уравнений:

$$\begin{cases} 157,5 = a \cdot 100 + b, \\ 452,5 = a \cdot 300 + b, \end{cases}$$

откуда a = 1,475 и b = 10, т.е. $y = 1,475x + 10$.

Точка $(x_0,\ y_0)$ пересечения двух прямых находится из системы их уравнений:

$$\begin{cases} y = 1,45x \ \ + 20, & (1) \\ y = 1,475x + 10, & (2) \end{cases}$$

откуда $x_0 = 400$, $y_0 = 600$.

Очевидно (рис. 4.3), что при объеме партии $x < 400$ выгоднее второй вариант технологического процесса, при $x > 400$ — первый вариант. Себестоимость продукции (руб.) при $x = 200$ по первому варианту составляет $y = 1,45 \cdot 200 + 20 = 310$, а по второму — $y = 1,475 \cdot 200 + 10 = 305$. ▶

4.4. *1*. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;\ 2)$:

а) под углом 135° к оси Ox;

б) параллельно оси Oy;

в) и точку B (–2; –1).

2. Найти угол между прямыми, задаваемыми в п. 1*а* и 1*в*.

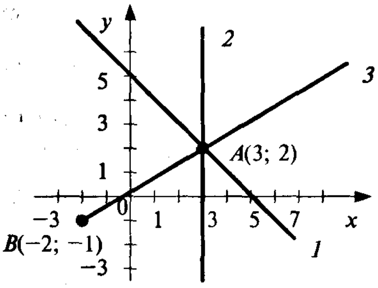


Рис. 4.4

Р е ш е н и е:

1. *а*) Угловой коэффициент прямой (*1*) $k = \text{tg}135° = -1$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;\ 2)$, по формуле **(4.7)** имеет вид: $y - 2 = (-1) \cdot (x - 3)$ или $x + y - 5 = 0$ (рис. 4.4).

б) Уравнение прямой (*2*), проходящей через точку $A(3;\ 2)$ и параллельной оси Oy, $x = 3$.

в) Уравнение прямой (*3*), проходящей через точки $A(3;\ 2)$ и B (–2; –1), по формуле **(4.8)** имеет вид:

$$\frac{y-2}{-1-2} = \frac{x-3}{-2-3}, \quad \text{или} \quad 3x - 5y + 1 = 0.$$

2. Угловой коэффициент прямой AB: $k_2 = k_{AB} = \frac{3}{5}$ (ибо уравнение AB можно представить в виде $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$). Тогда по формуле **(4.13)**:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{3}{5} + 1}{1 - 1 \cdot \frac{3}{5}} = 4, \text{ т.е. } \varphi = \operatorname{arctg} 4 \approx 76^\circ. ▶$$

4.5. Составить уравнение двух прямых, проходящих через точку $A(5;\ 1)$, одна из которых параллельна прямой $3x+2y-7=0$, а другая — перпендикулярна той же прямой. Найти расстояние между параллельными прямыми.

Решение:

1-й способ. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(5;\ 1)$, имеет вид:

$$y - 1 = k(x - 5).$$

Из этого пучка следует выделить две прямые (*2*) и (*3*) — параллельную и перпендикулярную данной (рис. 4.5).

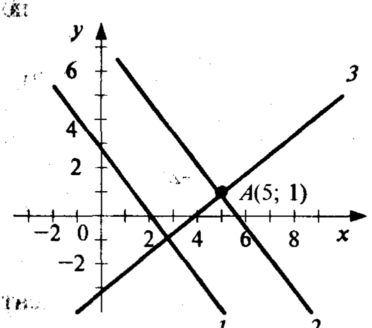


Рис. 4.5

Угловой коэффициент прямой (*1*): $k_1 = -\frac{3}{2}$ (так как уравнение прямой (*1*) можно представить в виде $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$). По условию параллельности угловой коэффициент прямой (*2*): $k_2 = k_1 = -3/2$ и ее уравнение имеет вид: $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 5)$ или $3x + 2y - 17 = 0$. По условию перпендикулярности угловой коэффициент прямой (*3*) $k_3 = -\frac{1}{k_1} = \frac{2}{3}$ и уравнение этой прямой $y - 1 = \frac{2}{3}(x - 5)$, или $2x - 3y - 7 = 0$ (см. рис. 4.5).

2-й способ. Прямая $Ax + By + C = 0$ будет параллельна прямой $3x + 2y - 7 = 0$, если ее коэффициенты при x и y пропорциональны, т.е. $\frac{A}{3} = \frac{B}{2}$. Взяв $A = 3$, $B = 2$ (при коэффициенте пропорциональности, равном 1), получим уравнение $3x + 2y + C = 0$. Коэффициент C найдем с учетом того, что координаты точки $A(5;\ 1)$, лежащей на прямой, должны удовлетворять ее уравнению, т.е. $3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + C = 0$, откуда $C = -17$ и уравнение прямой (*2*): $3x + 2y - 17 = 0$.

Уравнение прямой, перпендикулярной данной $3x + 2y - 7 = 0$, будет иметь вид $2x - 3y + C = 0$ (ибо в этом случае сумма произведений коэффициентов при переменных x и y равна нулю, т.е. $3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0$). Теперь, подставляя координаты точки $A(5;\ 1)$ в уравнение прямой, получим $2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 + C = 0$, откуда $C = -7$ и уравнение прямой (*3*): $2x - 3y - 7 = 0$.

Для нахождения расстояния между параллельными прямыми на одной из них, например, прямой $3x + 2y - 17 = 0$ возьмем любую точку, скажем, $A(5;\ 1)$. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки A до прямой $3x + 2y - 7 = 0$, определяемое по формуле (**4.12**):

$$d = \frac{|3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 - 7|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}} \approx 2{,}8. \ ▶$$

4.6. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $A(10; -6)$ и отсекает от координатного угла треугольник площадью 15 кв. ед.

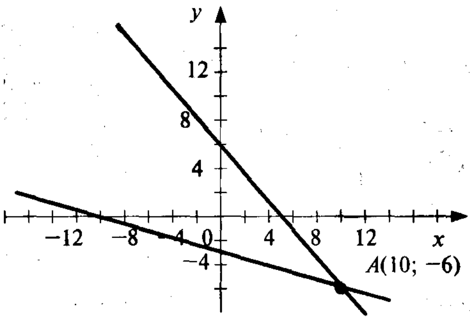


Рис. 4.6

Р е ш е н и е. Обозначим отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, a и b (рис. 4.6). Тогда прямая **(4.10)**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

отсекает от координатного угла треугольник, площадь которого равна

$$S = \frac{1}{2}|ab| = 15,$$

т.е. $ab = 30$ или $ab = -30$.

Так как точка $A(10; -6)$ должна удовлетворять уравнению прямой, то имеем две системы:

$$\begin{cases} \dfrac{10}{a} - \dfrac{6}{b} = 1, \\ ab = 30; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{10}{a} - \dfrac{6}{b} = 1, \\ ab = -30. \end{cases}$$

Из первой системы находим два решения: $a_1 = 5$, $b_1 = 6$; $a_2 = -10$, $b_2 = -3$. Вторая система решений не имеет. Итак, уравнения прямой:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1, \text{ или } 6x + 5y - 30 = 0;$$

$$\frac{x}{-10} + \frac{y}{-3} = 1, \text{ или } 3x + 10y + 30 = 0. ▶$$

4.7. Даны вершины $A(-7;\ 2)$; $B(5;\ -3)$; $C(8;\ 1)$ треугольника ABC. Составить уравнения медианы, высоты и биссектрисы, проведенных из вершины B.

Р е ш е н и е:

1. Пучок прямых, проходящих через точку $B(5; -3)$ (рис. 4.7) имеет вид:

$$y+3=k\,(x-5). \qquad (*)$$

2. Найдем уравнение медианы BD. По формулам **(4.5)** координаты середины D отрезка AC:

$$x_D=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-7+8}{2}=\frac{1}{2},\quad y_D=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2},$$

т.е. $D\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$. По формуле **(4.9)** угловой коэффициент

$$k_{BD}=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{3/2+3}{1/2-5}=-1.$$

Подставляя $k=-1$ в формулу (*), получим уравнение медианы BD:

$$y+3=-(x-5)\text{, или } x+y-2=0.$$

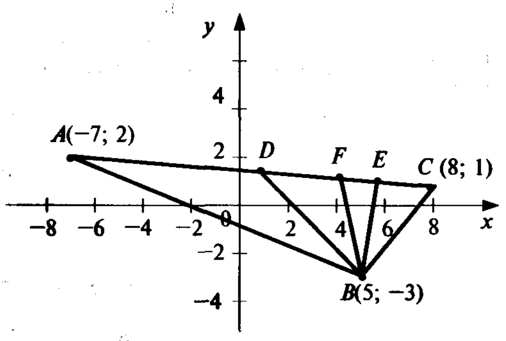


Рис. 4.7

3. Найдем уравнение высоты BE. По формуле **(4.9)** угловой коэффициент прямой AC

$$k_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{1-2}{8+7}=-\frac{1}{15}.$$

На основании условия перпендикулярности двух прямых $k_{BE}=-\dfrac{1}{k_{AC}}=15.$

Следовательно, по формуле (*) уравнение высоты BE примет вид:

$$y+3=15(x-5),\ \text{ или } 15x-y-78=0.$$

4. Найдем уравнение биссектрисы BF.

1-й способ. Угловой коэффициент k_{BF} получим из равенства $\operatorname{tg}\angle ABF=\operatorname{tg}\angle FBC$, используя формулу **(4.13)**:

$$\frac{k_{BF}-k_{BC}}{1+k_{BF}k_{BC}}=\frac{k_{AB}-k_{BF}}{1+k_{AB}k_{BF}},\quad\text{или}\quad \frac{k_{BF}-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}k_{BF}}=\frac{-\frac{5}{12}-k_{BF}}{1-\frac{5}{12}k_{BF}}$$

(где $k_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{1+3}{8-5}=\frac{4}{3}$, $k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-3-2}{5+7}=-\frac{5}{12}$), откуда после преобразований $33k_{BF}^2+112k_{BF}-33=0$ и $(k_{BF})_1=\frac{3}{11}$, $(k_{BF})_2=-\frac{11}{3}$. Чертежу задачи удовлетворяет $(k_{BF})_2=-\frac{11}{3}$, так как биссектриса BF образует тупой угол с осью Ox.

Теперь по формуле (*) уравнение BF:

$$y+3=-\frac{11}{3}(x-5),\ \text{ или }\ 11x+3y-46=0.$$

2-й способ. По формуле (*) найдем уравнения сторон треугольника AB и BC, учитывая, что $k_{AB}=-\frac{5}{12}$, $k_{BC}=\frac{4}{3}$:

$$y+3=-\frac{5}{12}(x-5),\ \text{ или }\ 5x+12y+11=0 \qquad (AB);$$

$$y+3=\frac{4}{3}(x-5),\ \text{ или }\ 4x-3y-29=0 \qquad (BC).$$

Учитывая, что по свойству биссектрисы расстояния ее от любой точки $M(x, y)$ до сторон AB и BC равны, по формуле **(4.12)** получим ее уравнение:

$$\frac{|5x+12y+11|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{|4x-3y-29|}{\sqrt{4^2+3^2}}.$$

Записанному уравнению удовлетворяют два:
$\frac{5x+12y+11}{13}=\pm\frac{4x-3y-29}{5}$, или (после преобразований) $3x-11y-48=0$ и $11x+3y-46=0$, из которых последнее — уравнение с отрицательным угловым коэффициентом.▶

4.8. На оси абсцисс найти точку, отстоящую на расстоянии $d=10$ от точки $A(2;\ 6)$.

4.9. На оси абсцисс и на оси ординат найти точки, равноудаленные от точек $A(2;\ 3)$ и $B(5;\ 6)$.

4.10. Отрезок, ограниченный точками $A(1;\ -3)$ и $B(4;\ 3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

4.11. Три вершины параллелограмма — точки $A(3;\ -5)$, $B(5;\ -3)$, $C(-1;\ 3)$. Определить четвертую вершину D, противоположную B.

4.12. Точки $A(-2; 1)$, $B(2; 3)$ и $C(4; -1)$ — середины сторон треугольника. Найти координаты его вершин.

4.13. Даны вершины треугольника: $A(3; 5)$, $B(-3; 3)$, $C(5; -8)$. Определить длину медианы, проведенной из вершины C.

4.14. Найти центр масс однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами $A(2; 4)$, $B(0; 1)$, $C(4; -2)$.

4.15. Треугольник задан координатами вершин $A(3; 5)$, $B(9; -3)$ и $C(0; 1)$. Найти длину биссектрисы угла A.

4.16. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек $M_1(-4; 3)$ и $M_2(2; 5)$.

4.17. Составить уравнение множества точек, сумма расстояний каждой из которых от точек $F_1(2; 0)$ и $F_2(-2; 0)$ равна $2\sqrt{5}$.

4.18. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точки $F(2; 2)$ и от оси Ox.

4.19. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от оси Oy и точки F $(4; 0)$.

4.20. Составить уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(0; -1)$, чем к точке $B(0; -4)$.

4.21. Издержки перевозки y двумя видами транспорта выражаются уравнениями: $y = 150 + 50x$ и $y = 250 + 25x$, где x — расстояния в сотнях километров, y — транспортные расходы. Начиная с какого расстояния более экономичен второй вид транспорта?

4.22. Зная, что изменение объема производства y с изменением производительности труда x происходит по прямой линии, составить ее уравнение, если при $x = 3$ $y = 185$, а при $x = 5$ $y = 305$. Определить объем производства при $x = 20$.

4.23. Лежат ли на одной прямой три данные точки $A(2; 0)$, $B(6; 4)$, $C(11; 9)$?

4.24. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; -1)$ под углом 45° к оси Ox.

4.25. Составить уравнение прямых, проходящих через точку $A(-4; 1)$ параллельно осям координат.

4.26. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $A(-4; 2)$ и $B(3; -1)$.

4.27. Найти угол между прямой $3x + y - 6 = 0$ и прямой, проходящей через точку $A(-3; 1)$ и $B(3; 3)$.

4.28. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(2; 3)$ под углом 45° к прямой $5x + 2y - 4 = 0$.

4.29. Дана прямая $2x + 5y - 1 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 3)$: *а*) параллельно данной прямой; *б*) перпендикулярно данной прямой.

4.30. Через вершину треугольника $A(-1; 2)$, $B(3; -1)$ и $C(0; 4)$ проведены прямые параллельно противолежащим сторонам. Составить их уравнения.

4.31. Даны две прямые $y = 3x - 2$ и $3x - y + 12 = 0$. Составить уравнение прямой, проведенной параллельно данным на равном расстоянии между ними.

4.32. Две стороны квадрата лежат на прямых $3x + 4y + 22 = 0$, $3x + 4y - 13 = 0$. Вычислить площадь квадрата.

4.33. Через точку $M(2; 5)$ провести прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между осями координат, делился в этой точке пополам.

4.34. Даны середины сторон треугольника $P(1; 2)$, $Q(5; -1)$ и $R(-4; 3)$. Составить уравнения его сторон.

4.35. Уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ параллельно прямой $x + 3y = 0$.

4.36. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ перпендикулярно к прямой $y = 2x$.

4.37. Составить уравнение перпендикуляра к прямой $8x + 4y - 3 = 0$ в точке пересечения ее с прямой $x - y = 0$.

4.38. Даны вершины треугольника $A(-1; 3)$, $B(3; -2)$ и $C(5; 3)$. Составить уравнения: *а*) трех его сторон; *б*) медианы, проведенной из вершины B; *в*) высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

4.39. Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма $x + y + 5 = 0$ и $x - 4y = 0$. Составить уравнения двух других сторон, если известна точка пересечения его диагоналей $P(2; -2)$.

4.40. Даны уравнения сторон прямоугольника $3x - 4y + 5 = 0$, $4x + 3y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(-2; 1)$. Составить уравнения двух других сторон прямоугольника.

4.41. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x + 3y - 5 = 0$ и вершину прямого угла $C(2; -1)$.

4.42. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(0; 2)$, и уравнения высот (BM) $x + y - 4 = 0$ и (CM) $y = 2x$, где M — точка пересечения высот.

4.43. Даны две вершины $A(-2; 1)$ и $B(3; -4)$ треугольника и точка $D(5; -1)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон этого треугольника.

4.44. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $3x + 4y - 1 = 0$ и $4x - 3y + 5 = 0$.

4.45. Уравнение одной из сторон некоторого угла $2x - 9y - 3 = 0$, а уравнение биссектрисы $4x - y + 11 = 0$. Составить уравнение второй стороны угла.

4.46. В треугольнике ABC даны уравнения стороны (AB) $x + 7y - 6 = 0$ и биссектрис (AL) $x + y - 2 = 0$ и (BM) $x - 3y - 6 = 0$. Найти координаты вершин.

4.2. Кривые второго порядка

Справочный материал

1. Общее уравнение кривых второго порядка:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey + F = 0. \quad \textbf{(4.18)}$$

2. Нормальное уравнение окружности радиуса R с центром в точках C (x_0, y_0) и O (0;0) соответственно имеют вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad \textbf{(4.19)}$$

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad \textbf{(4.20)}$$

3. Каноническое уравнение эллипса (координатные оси совпадают с осями эллипса):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \textbf{(4.21)}$$

где a и b — оси эллипса:

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad \textbf{(4.22)}$$

$F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ — фокусы эллипса, если $a > b$.

Эксцентриситет эллипса

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad \textbf{(4.23)}$$

(для эллипса $\varepsilon < 1$).

Расстояния точки $M(x, y)$ эллипса *до его фокусов (фокальные радиусы)* находятся по формулам:

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x. \quad \textbf{(4.24)}$$

4. Каноническое уравнение гиперболы (оси координат совпадают с осями гиперболы):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \textbf{(4.25)}$$

где a, b соответственно действительная и мнимая полуоси гиперболы;

$$c^2=a^2+b^2, \qquad \textbf{(4.26)}$$

$F_1(-c;\,0)$, $F_2(c;\,0)$ — фокусы гиперболы, $c>a$.

Эксцентриситет гиперболы находится по формуле (**4.23**); для гиперболы $\varepsilon>1$.

Расстояния точки M(x, y) гиперболы до фокусов (фокальные радиусы) находятся по формулам:

$$r_1=|\varepsilon x-a|,\ \ r_2=|\varepsilon x+a|. \qquad \textbf{(4.27)}$$

Уравнение обеих асимптот гиперболы:

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \qquad \textbf{(4.28)}$$

5. Обратная пропорциональная зависимость

$$y=\frac{m}{x} \qquad \textbf{(4.29)}$$

есть равносторонняя гипербола с асимптотами – координатными осями и вершинами $(x_0,\,y_0)$, где $|x_0|=|y_0|=\sqrt{|m|}$ (знаки x_0, y_0 зависят от квадранта).

6. Дробно-линейная функция

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ \ (c\neq 0,\ bc-ad\neq 0) \qquad \textbf{(4.30)}$$

есть равносторонняя гипербола с асимптотами $y=\frac{a}{c}$, $x=-\frac{d}{c}$, параллельными осям координат, и центром в точке $\left(-\frac{d}{c},\ \frac{a}{c}\right)$.

7. Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат имеет вид:

$$y^2=2px \qquad \textbf{(4.31)}$$

(если она симметрична относительно оси Ox),

или

$$x^2=2py, \qquad \textbf{(4.32)}$$

$$y=Ax^2 \qquad \textbf{(4.33)}$$

(если она симметрична относительно оси Oy), где p или $A = \dfrac{1}{2p}$ — параметры параболы.

Расстояние от фокуса параболы $F\left(\dfrac{p}{2};\,0\right)$ *до оси* Ox (*фокальный* радиус) находится по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}. \qquad \textbf{(4.34)}$$

Уравнение директрисы параболы:

$$x = -\frac{p}{2}. \qquad \textbf{(4.35)}$$

8. Квадратный трехчлен $y = Ax^2 + Bx + C$ есть парабола с осью симметрии, параллельной оси Oy, и вершиной в точке $\left(-\dfrac{B}{2A}, -\dfrac{D}{4A}\right)$, где $D = B^2 - 4AC$ — дискриминант.

4.47. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1;\,5)$, $B(-4;\,0)$ и $D(4;\,-4)$.

Р е ш е н и е. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0)$ имеет вид **(4.19)**: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Так как точки A, B, D лежат на окружности, то их координаты должны удовлетворять этому уравнению:

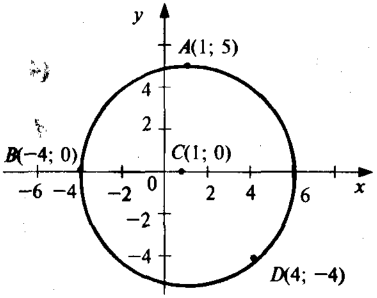


Рис. 4.8

$$\begin{cases} (1 - x_0)^2 + (5 - y_0)^2 = R^2, \\ (-4 - x_0)^2 + (0 - y_0)^2 = R^2, \\ (4 - x_0)^2 + (-4 - y_0)^2 = R^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, а затем третье, получим (рекомендуем читателю убедиться в этом самостоятельно) $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, а далее и $R = 5$, т.е. уравнение окружности: $(x - 1)^2 + y^2 = 25$ (рис. 4.8).▶

4.48. Найти значение параметра a, **при** котором окружность $x^2 + y^2 - 4x + a = 0$ касается прямой $y = x\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, ее центр и точку касания.

Р е ш е н и е. По условию окружность и прямая имеют одну общую точку, следовательно, система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + a = 0, \\ y = x\sqrt{3} \end{cases}$$

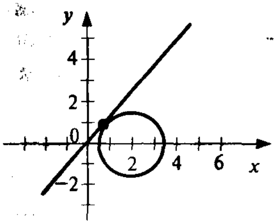


Рис. 4.9

или уравнение

$$x^2 + \left(x\sqrt{3}\right)^2 - 4x + a = 0$$

должны иметь единственное решение.

Это произойдет, если дискриминант полученного квадратного уравнения $4x^2 - 4x + a = 0$ будет равен нулю, т.е. $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4a = 16(1 - a) = 0$, откуда $a = 1$.

Решая квадратное уравнение при $a = 1$, находим $x = \frac{1}{2}$, т.е. точка касания $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Для определения радиуса окружности приведем ее уравнение к нормальному виду, группируя члены, содержащие x, и дополняя их до полного квадрата:

$$(x^2 - 4x) + y^2 + 1 = 0, \ (x^2 - 4x + 4) - 4 + y^2 + 1 = 0,$$

откуда $(x - 2)^2 + y^2 = 3$, т.е. центр окружности (2; 0) и радиус $R = \sqrt{3}$ (рис. 4.9).▶

4.49. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $9x^2 + 4y^2 = 36$.

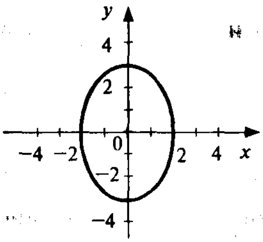


Рис. 4.10

Р е ш е н и е. Разделив на 36, приведем уравнение к виду $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Отсюда следует, что большая полуось эллипса $a = 3$, а малая полуось $b = 2$. При этом большая ось эллипса и ее фокусы расположены на оси Oy (рис. 4.10). По формуле (**4.22**) расстояние от фокуса эллипса до начала координат $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, т.е. координаты фокусов $F_1(0; -\sqrt{5})$ и $F_2(0; \sqrt{5})$.

Эксцентриситет эллипса по формуле (**4.23**) $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.▶

4.50. Найти координаты центра, вершин и уравнения асимптот гиперболы $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$.

Р е ш е н и е. Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду, разделив обе части уравнения на (–144): $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

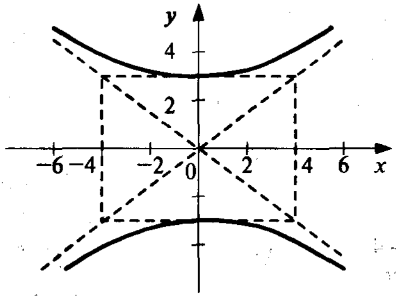


Рис. 4.11

Следовательно, гипербола имеет фокусы на оси Oy, ее действительная полуось $a = 3$, а мнимая полуось $b = 4$ (рис. 4.11).

Асимптоты гиперболы по формуле **(4.28)**: $x = \pm\frac{4}{3}y$ или $y = \pm\frac{3}{4}x$. Вершины данной гиперболы $A_1(0; -3)$, $A_2(0; 3)$. Далее, по формуле **(4.26)**: $c = \sqrt{16+9} = 5$, поэтому фокусы расположены в точках $F_1(0; -5)$, $F_2(0; 5)$. Эксцентриситет гиперболы по формуле **(4.23)** $\varepsilon = 5/3$. ▶

4.51. Составить уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\frac{3}{5}x$ и гипербола проходит через точку $M(10; -3\sqrt{3})$. Найти расстояние между фокусами и вершинами гиперболы.

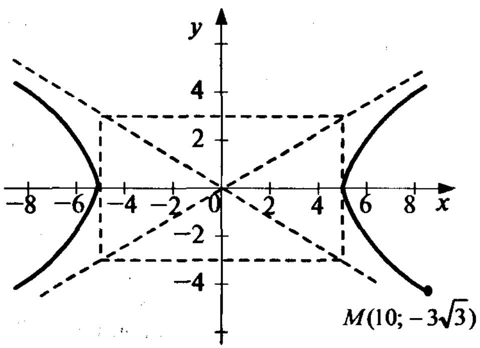


Рис. 4.12

Р е ш е н и е. Так как точка $(10; -3\sqrt{3})$ лежит на гиперболе (причем выше асимптоты $y = -\frac{3}{5}x$, рис. 4.12), то ее координаты должны удовлетворять уравнению **(4.25)**: $\frac{100}{a^2} - \frac{27}{b^2} = 1$. Кроме того, $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$, так как асимптоты гиперболы $y = \pm\frac{3}{5}x$.

Решив полученную систему двух уравнений, найдем $a = 5$, $b = 3$, т.е. уравнение гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$. Расстояние между вершинами гиперболы $2a = 10$, между фокусами $2c=2\sqrt{34}$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}=$ $=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$.▶

4.52. Дан эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы — в вершинах данного эллипса.

Р е ш е н и е. Полуоси эллипса $a_э = 3$, $b_э=\sqrt{5}$, $c_э=\sqrt{9-5}=2$. По условию для гиперболы $a_г = c_э = 2$, $c_г = a_э = 3$. Следовательно, по формуле **(4.26)**, $b_г=\sqrt{c_г^2-a_з^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ и уравнение искомой гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ (рис. 4.13).▶

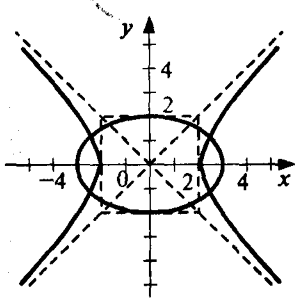


Рис. 4.13

4.53. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(2;\,4)$ и симметрична относительно оси Ox. Найти фокус и уравнения параболы и ее директрисы.

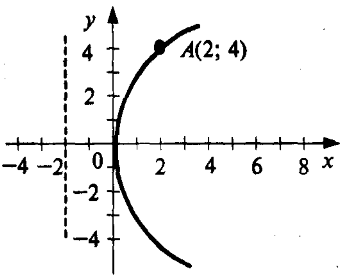


Рис. 4.14

Р е ш е н и е. Так как парабола проходит через точку $O(0;\,0)$ и симметрична относительно оси Ox, то ее уравнение **(4.31)** $y^2 = 2px$. Подставляя координаты точки A в это уравнение, т.е. $4^2 = 2p\cdot 2$, найдем параметр $p = 4$. Следовательно, уравнение параболы $y^2 = 8x$. Уравнение ее директрисы **(4.35)** $x = -2$, фокус параболы $F(2;\,0)$ (рис. 4.14).▶

4.54. Через точку $A(3;\,-1)$ провести такую хорду параболы $y=\frac{1}{4}x^2-x-2$, которая делилась бы в данной точке пополам.

Р е ш е н и е. Для построения параболы представим ее в виде

$$y=\frac{1}{4}\left(x^2-4x-8\right)=\frac{1}{4}\left[(x-2)^2-4-8\right]=\frac{1}{4}(x-2)^2-3,$$

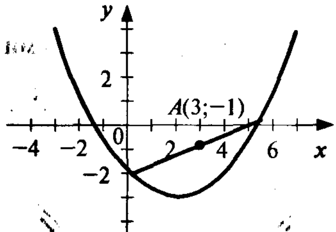


Рис. 4.15

т.е. вершина параболы (2;–3). Уравнение прямой (хорды), проходящей через точку $A(3; -1)$ в соответствии с **(4.7)** имеет вид: $y + 1 = k(x - 3)$. Точки пересечения хорды с параболой определяются системой:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2, \\ y + 1 = k(x-3), \end{cases}$$

решение которой, после исключения y, сводится к уравнению:

$$\left(\frac{1}{4}x^2 - x - 2\right) + 1 = k(x-3) \text{ или } x^2 - 4(k+1)x + 4(3k-1) = 0. \qquad (*)$$

По условию точка $A(3; -1)$ делит хорду пополам, следовательно, $x_A = \frac{x_1 + x_2}{2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения (*).

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 4(k + 1)$, следовательно, $x_A = \frac{4(k+1)}{2} =$ $= 2(k+1)$ или $x_A = 2(k + 1) = 3$, откуда $k = \frac{1}{2}$, и уравнение хорды: $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$ или $x - 2y - 5 = 0$ (рис. 4.15). ▶

4.55. Найти центр и радиус окружности $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 0$.

4.56. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $A(-1; 5)$, $B(-2; -2)$ и $C(5; 5)$.

4.57. Через точки $A(8; 2)$ и $B(10; 0)$ провести окружность радиуса $R = 10$.

4.58. Составить уравнение окружности, проходящей через точку (5; 3) с центром в точке пересечения прямых $5x - 3y - 13 = 0$ и $x + 4y + 2 = 0$.

4.59. Составить уравнение окружности, касающейся оси Oy в начале координат и пересекающей ось Ox в точке $M(6; 0)$.

4.60. Составить уравнение окружности, если она проходит через точки $A(3; 1)$ и $B(-1; 3)$, а центр ее лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$.

4.61. Составить уравнение прямой, проходящей через центр окружности $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 15 = 0$ параллельно прямой $x + y = 0$.

4.62. Составить уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ с прямой $x + y = 0$ и точку $M(4; 4)$.

4.63. Определить полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$.

4.64. Определить эксцентриситет эллипса, если его большая ось втрое больше малой.

4.65. Составить каноническое уравнение эллипса, если его большая полуось равна 12, а эксцентриситет равен 0,8. Найти расстояние между фокусами эллипса.

4.66. Эллипс проходит через точки $M_1(2; \sqrt{3})$ и $M_2(0; 2)$. Составить уравнение эллипса и найти расстояние от точки M_1 от фокусов.

4.67. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше ее расстояния от левого фокуса.

4.68. Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами большой и малой осей.

4.69. Ординаты всех точек окружности $x^2 + y^2 = 36$ сокращены втрое. Составить уравнение полученной новой кривой.

4.70. Составить каноническое уравнение гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$. Найти координаты ее фокусов и вершин, эксцентриситет и уравнения асимптот.

4.71. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки $A(2; 1)$ и $B(-4; \sqrt{7})$.

4.72. Гипербола проходит через точку $M(6; -2\sqrt{2})$ и имеет мнимую полуось $b = 2$. Составить ее уравнение и найти расстояние точки M от фокусов.

4.73. Найти расстояние фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ от ее асимптот и угол между асимптотами.

4.74. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы — в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

4.75. Составить уравнения касательных к гиперболе $x^2 - 4y^2 = 16$, проведенных из точки $A(0; -2)$.

4.76. Составить уравнение равносторонней гиперболы, вершины которой удалены от начала координат на расстояние $d = 4$.

4.77. Составить уравнения асимптот равносторонней гиперболы $y = \frac{2x+3}{x-3}$ и найти координаты ее вершин.

4.78. Составить уравнения осей симметрии равносторонней гиперболы $y = \dfrac{4-3x}{x-1}$.

4.79. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат и проходящей через точку $A(-2; -3)$. Найти фокус и директрису параболы.

4.80. Составить уравнение параболы: *а*) проходящей через точки $(0; 0)$ и $(1; -3)$ и симметричной относительно оси Ox; *б*) проходящей через точки $(0; 0)$ и $(2; -4)$ и симметричной относительно оси Oy.

4.81. Составить уравнение параболы с осью симметрии, параллельной оси Oy, если она проходит через точки $(-2; 8)$, $(0; 2)$ и $(3; \frac{1}{2})$.

4.82. Вычислить длину хорды, образуемой пересечением прямой $y = 4x$ с параболой $y = 3 + 2x - x^2$.

4.83. Составить уравнение прямой, которая проходит через вершину параболы $y = -3x^2 + 12x - 9$ параллельно прямой $\dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{8} = 1$.

4.84. Составить уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы $y^2 = 2px$ и касающейся ее директрисы. Найти точки пересечения параболы и окружности.

4.85. Составить уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и симметрична относительно оси Oy.

4.86. Из вершины параболы $y^2 = 2px$ проведены всевозможные хорды. Составить уравнения множества середин этих хорд.

4.3. Прямая и плоскость в пространстве

Справочный материал

1. Уравнение плоскости:

- *перпендикулярной данному вектору* $\vec{n} = (A, B, C)$ *и проходящей через данную точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; \qquad \textbf{(4.36)}$$

- *в отрезках*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \textbf{(4.37)}$$

(a, b, c — отрезки, отсекаемые соответственно на осях Ox, Oy, Oz);

- *общее*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad \textbf{(4.38)}$$

2. Расстояние d от точки A (x_0, y_0, z_0) *до плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad \textbf{(4.39)}$$

3. Даны две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (*1*) и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ (*2*).

Угол φ, *образованный двумя плоскостями,* находится из соотношения:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad \textbf{(4.40)}$$

Условие параллельности двух плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad \textbf{(4.41)}$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad \textbf{(4.42)}$$

4. Уравнение прямой в пространстве:

- *как линии пересечения двух плоскостей*:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases} \qquad \textbf{(4.43)}$$

- ***проходящей через данную точку M** (x_1, y_1, z_1) **с направляющим вектором**[1]* $\vec{s} = (m, n, p)$:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \qquad \textbf{(4.44)}$$

(канонические уравнения прямой);

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt \end{cases} \qquad \textbf{(4.45)}$$

(параметрические уравнения прямой);

[1] В случае, если знаменатель какой-либо из дробей равен нулю, это означает, что равен нулю соответствующий числитель.

- *проходящих через две данные точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad \textbf{(4.46)}$$

5. Даны две прямые с направляющими векторами $\vec{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$.

Угол φ *между двумя прямыми* находится из соотношения:

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad \textbf{(4.47)}$$

Условие параллельности двух прямых в пространстве:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad \textbf{(4.48)}$$

Условие перпендикулярности двух прямых в пространстве:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad \textbf{(4.49)}$$

6. Дана прямая $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ и плоскость $Ax+By+Cz+$ $+D=0$.

Угол φ *между прямой и плоскостью* определяется из соотношения:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad \textbf{(4.50)}$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$Am+Bn+Cp=0. \qquad \textbf{(4.51)}$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \qquad \textbf{(4.52)}$$

4.87. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ и:

а) перпендикулярной вектору $\vec{n}=(3; -4; 5)$;

б) параллельной плоскости $3x-4y+5z+6=0$;

в) точку $M_1(0; 2; 5)$, и параллельной оси Oy;

г) проходящей через ось Oz.

Р е ш е н и е:

а) Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}=(3; -4; 5)$ и проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ по формуле **(4.36)** имеет вид:

$$3(x-1)-4(y+2)+5(z-3)=0, \text{ или } 3x-4y+5z-26=0.$$

б) *I способ*. Плоскость, параллельная плоскости $3x - 4y + 5z + 6 = 0$, очевидно, перпендикулярна нормальному вектору $\vec{n} = (3; -4; 5)$. Уравнение такой плоскости, проходящей через данную точку $M(1; -2; 3)$, получено в п. *а*).

II способ. Плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ параллельна плоскости $3x - 4y + 5z + 6 = 0$, если ее коэффициенты при переменных пропорциональны, т.е. $\frac{A}{3} = \frac{B}{-4} = \frac{C}{5}$. Взяв $A = 3$, $B = -4$, $C = 5$ (при коэффициенте пропорциональности, равном 1), получим уравнение $3x - 4y + {}$ $+ 5z + D = 0$. Коэффициент D найдем с учетом того, что координаты точки $M(1; -2; 3)$, лежащей на плоскости, должны удовлетворять ее уравнению, т.е. $3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 + D = 0$, откуда $D = -26$ и уравнение искомой плоскости

$$3x - 4y + 5z - 26 = 0.$$

в) Так как плоскость параллельна оси Oy, то в уравнении **(4.36)** ее коэффициент $B = 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид $Ax + Cz +$ $+ D = 0$. Так как точки $M(1; -2; 3)$ и $M(0; 2; 5)$ лежат на плоскости, то их координаты должны удовлетворять ее уравнению, т.е. $\begin{cases} A + 3C + D = 0, \\ 5C + D = 0, \end{cases}$ откуда $A = -\frac{2}{5}D$; $C = -\frac{1}{5}D$; следовательно, уравнение плоскости $\left(-\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}z + 1\right)D = 0$, или (после сокращения на $D \neq 0$) $2x + z - 5 = 0$.

г) Так как плоскость проходит через ось Oz, то в уравнении **(4.36)** ее коэффициенты $C = 0$, $D = 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид $Ax + By = 0$. Подставляя в уравнение координаты точки $M(1; -2; 3)$, лежащей на плоскости, получим $1 \cdot A - 2B = 0$, откуда $A = 2B$ и уравнение плоскости (после сокращения на $B \neq 0$) $2x + y = 0$. ▶

4.88. Составить уравнение плоскости, проходящей через:

а) точку $M(1; 2; 3)$ параллельно двум данным векторам $\vec{a} = (6; -8; 10)$ и $\vec{b} = (4; -3; 5)$;

б) точки $M_1(1; 2; 3)$ и $M_2(4; -1; -2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (6; -8; 10)$;

в) точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(4; -1; -2)$ и $M_3(4; 0; 3)$.

Р е ш е н и е:

а) В соответствии с **(4.36)** уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 2; 3)$:

$$A(x - 1) + B(y - 2) + C(z - 3) = 0. \qquad (*)$$

Так как плоскость параллельна двум векторам $\vec{a}=(6;-8;10)$ и $\vec{b}=(4;-3;5)$, то нормальный вектор плоскости $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$ перпендикулярен каждому из данных векторов, а значит, их скалярные произведения равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} \vec{a}\vec{n}=6A-8B+10C=0, \\ \vec{b}\vec{n}=4A-3B+5C=0. \end{cases}$$

Из полученной системы найдем $A=-\dfrac{5}{7}C$; $B=\dfrac{5}{7}C$ и подставим в уравнение (*), получим (после сокращения на $C\neq 0$):

$$-\frac{5}{7}(x-1)+\frac{5}{7}(y-2)+z-3=0, \text{ или } 5x-5y-7z+26=0.$$

б) В п. *а*) получено, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;\ 2;\ 3)$, есть $A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0$ (*), а в силу того, что плоскость параллельна вектору $\vec{a}=(6;-8;10)$, получаем равенство:

$$6A-8B+10C=0. \qquad (**)$$

Так как плоскость проходит через точку $M_2(4;\ -1;\ -2)$, то ее координаты удовлетворяют уравнению (*):

$$A\,(4-1)+B\,(-1-2)+C\,(-2-3)=0, \text{ или } 3A-3B-5C=0. \qquad (***)$$

Решая систему уравнений (**), (***):

$$\begin{cases} 6A-8B+10C=0, \\ 3A-3B-5C=0, \end{cases}$$

получим $A=\dfrac{35}{3}C$, $B=10C$. Подставляя полученные значения в уравнение (*), получим (после сокращения на $C\neq 0$)

$$\frac{35}{3}(x-1)+10(y-2)+z-3=0 \text{ или } 35x+30y+3z-104=0.$$

в) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;\ 2;\ 3)$, имеет вид:

$$A\,(x-1)+B\,(y-2)+C\,(z-3)=0.$$

Так как точки $M_2(4;\ -1;\ -2)$ и $M_3(4;\ 0;\ 3)$ лежат на плоскости, то их координаты удовлетворяют уравнению плоскости, т.е.

$$\begin{cases} A(4-1)+B(-1-2)+C(-2-3)=0, \\ A(4-1)+B(0-2)\ \ +C(3-3)\ \ =0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3A-3B-5C=0, \\ 3A-2B\qquad\ =0, \end{cases}$$

откуда $A=-\frac{10}{3}C$; $B=-5C$. Подставляя полученные уравнения в уравнение (*), получим (после сокращения на $C\neq 0$)

$$-\frac{10}{3}(x-1)-5(y-2)+z-3=0,\quad \text{или}\quad 10x+15y-3z-31=0.\blacktriangleright$$

4.89. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;\,0;\,5)$ и:

а) образующей с осями координат углы $\alpha=\pi/3$, $\beta=\pi/4$, $\gamma=2\pi/3$;

б) параллельной прямой $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{-2}$;

в) параллельной оси Oy;

г) параллельной прямой:

$$\begin{cases} x+y-\ z+2=0,\\ x-y+2z-1=0;\end{cases}$$

д) точку $M_1(2;\,-3;\,4)$.

Р е ш е н и е:

а) В качестве направляющего вектора прямой возьмем единичный вектор данной прямой, координатами которого являются направляющие косинусы: $\vec{s}=(\cos\alpha;\,\cos\beta;\,\cos\gamma)=(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2})$. По формуле **(4.46)** канонические уравнения прямой:

$$\frac{x+1}{1/2}=\frac{y}{\sqrt{2}/2}=\frac{z-5}{-1/2}.$$

б) В качестве направляющего вектора искомой прямой берем направляющий вектор данной, т.е. $\vec{s}=(5;\,4;\,-2)$. Поэтому по формуле **(4.44)** канонические уравнения прямой:

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z-5}{-2}.$$

в) В качестве направляющего вектора прямой берем единичный вектор, направленный по оси Oy, т.е. $\vec{s}=(0;\,1;\,0)$. Тогда канонические уравнения искомой прямой[1]:

$$\frac{x+1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{0}.$$

---

[1] Равенство знаменателей нулю означает, что соответствующие числители $x+1=0$ и $z-5=0$.

г) Приведем уравнения прямой, заданной системой, к каноническому виду.

Выразим одну из переменных, например, x поочередно через две другие — z и y, а затем приравняем полученные выражения. Складывая оба уравнения системы, получим $2x + z + 1 = 0$, откуда $x = \frac{z+1}{-2}$.

Умножая первое уравнение системы на 2 и складывая со вторым, получим $3x + y + 3 = 0$, откуда $x = \frac{y+3}{-3}$. Приравнивая полученные выражения, получим канонические уравнения заданной прямой: $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{-2}$. Далее, решая аналогично задаче *б*), получим канонические уравнения искомой прямой:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-2}.$$

***д*)** По формуле **(4.46)** уравнение искомой прямой:

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-0}{-3-0} = \frac{z-5}{4-5}, \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}. \ ▶$$

4.90. Составить уравнение плоскости, проходящей через: *а*) прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ и точку $M(2;\ 0;\ 1)$; *б*) две параллельные прямые

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}.$$

Р е ш е н и е:

***а*)** Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ 0;\ 1)$, по формуле **(4.36)** имеет вид:

$$A(x-2) + By + C(z-1) = 0.$$

Направляющий вектор прямой $\vec{s} = (1;\ 2;\ -1)$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$ перпендикулярны, следовательно, их скалярное произведение $\vec{s}\vec{n} = 0$, т.е.

$$A + 2B - C = 0. \qquad (*)$$

С другой стороны, точка $A(1;\ -1;\ -1)$ лежит на прямой, а значит, и на плоскости, т.е. ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости:

$$A(1-2) + B(-1) + C(-1-1) = 0, \text{ или } -A - B - 2C = 0. \qquad (**)$$

Решив систему уравнений (*), (**), получим $A = -5C$; $B = 3C$. Следовательно, искомое уравнение плоскости $(-5(x-2) + 3y + z - 1)\ C = 0$ или (после сокращения на $C \neq 0$) и преобразований $5x - 3y - z - 9 = 0$.

б) Взяв на одной из прямых точку, например, на первой прямой точку $M(1;\ 0;\ -2)$, получаем задачу, аналогичную в п. *а*). Искомая плоскость имеет уравнение $3x - 2y - 3 = 0$ (предоставляем читателю в этом убедиться самостоятельно). ▶

4.91. Найти проекцию B точки A $(5;\ 2;\ -1)$ на: *а*) плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$; *б*) прямую $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+11}{4} = \dfrac{z-2}{5}$.

Решение:

а) Найдем уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;\ 2;\ -1)$ и перпендикулярной плоскости. В качестве направляющего вектора прямой $\vec{s}$ берем нормальный вектор плоскости, т.е. $\vec{s} = \vec{n} = (2;\ -1;\ 3)$. Тогда по формуле **(4.44)** уравнение перпендикуляра AB имеет вид:

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}.$$

Найдем точку пересечения прямой AB и плоскости. Для этого представим уравнения прямой в параметрическом виде, приравнивая к t каждое из трех данных отношений. Получим параметрические уравнения прямой $x = 5 + 2t$; $y = 2 - t$; $z = -1 + 3t$. Подставляя полученные выражения в уравнение плоскости, получим: $2(5+2t) - (2 - t) + 3(-1 + 3t) + 23 = 0$, откуда $t = -2$ есть значение параметра, при котором находится точка пересечения прямой AB с данной плоскостью, т.е. $x_B = 5 + 2(-2) = 1$; $y_B = 2 - (-2) = 4$; $z_B = -1 + 3(-2) = -7$. Итак, $B(1;\ 4;\ -7)$.

б) Точка B есть точка пересечения данной прямой с перпендикулярной ее плоскостью, проходящей через точку A. Вектор $\vec{s} = (2;\ 4;\ 5)$ перпендикулярен этой плоскости, следовательно, по формуле **(4.36)**:

$$2(x-5) + 4(y-2) + 5(z+1) = 0, \text{ или } 2x + 4y + 5z - 13 = 0.$$

Точка $B(3;\ -7;\ 7)$ пересечения этой плоскости с данной прямой находится аналогично задаче ***а***). ▶

4.92. Найти угол между: *а*) прямыми $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ (*1*) и $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+11}{2} = \dfrac{z+6}{1}$ (*2*) и выяснить, являются ли эти прямые пересекающимися или скрещивающимися; *б*) прямой (*1*) и плоскостью $2x + 3y - 6z + 2 = 0$ (*3*).

Р е ш е н и е:

а) По формуле **(4.47)**

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot1-1\cdot2-2\cdot1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{-2}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{9},$$

следовательно, угол $\varphi = \arccos(-6\sqrt{9}) \approx 106°$. Найдем точку пересечения прямых в предположении, что они пересекаются. Представим уравнение (*1*) в каноническом виде: $x = 2t + 1$, $y = -t - 2$; $z = -2t$. Подставляя полученные выражения в уравнения прямой (*2*), получим: $2t+2 = \dfrac{-t+9}{2} = -2t+6$, откуда $t = 1$. Так как оба уравнения дают *одно и то же* значение $t = 1$, значит, существует точка пересечения прямых $M(3; -3; -2)$.

б) По формуле **(4.50)**:

$$\sin\varphi = \frac{|2\cdot2+3\cdot(-1)+(-6)\cdot(-2)|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{13}{7\cdot3} = \frac{13}{21};$$

$\varphi \approx \arcsin\dfrac{13}{21} \approx 38°$.▶

4.93. Составить уравнение плоскости, проходящей: *а*) через ось Ox и через точку $A(1; -1; 3)$; *б*) через ось Oy и через точку $B(2; 1; -1)$.

4.94. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4; -4; 2)$ и параллельной плоскости xOz.

4.95. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 3; 4)$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = 1$, $b = -1$.

4.96. Из точки $M(-1; -1; 4)$ опущен на плоскость перпендикуляр; его основание $N(2; 1; 3)$. Составить уравнение плоскости.

4.97. Плоскость проходит через ось Oz и составляет с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ угол $\pi/3$. Составить ее уравнение.

4.98. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2; 7; 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z + 1 = 0$.

4.99. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -3; 1)$ параллельно векторам $\vec{a} = (-3; 2; -1)$ и $\vec{b} = (1; 2; 3)$.

4.100. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2; -15; 1)$ и $M_2(3; 1; 2)$ перпендикулярно плоскости $3x - y - 4z = 0$.

4.101. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; 1; 2)$ и $M_2(-1; 1; -1)$, параллельно прямой, определяемой точками $A(5; -2; 3)$ и $B(6; 1; 0)$.

4.102. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.

4.103. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1; 1; -3)$ параллельно вектору $\vec{s} = (1; -3; 4)$.

4.104. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2; -1; -1)$ и $M_2(3; 3; -1)$.

4.105. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1; -5; 3)$ и образующей с осями координат углы $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = 2\pi/3$.

4.106. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1; -3; 5)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

4.107. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; -2; 4)$ перпендикулярно плоскости $5x + 3y - 7z + 1 = 0$.

4.108. Найти проекцию точки $A(4; -3; 1)$ на плоскость $x + 2y - z - 3 = 0$.

4.109. Найти проекцию точки $A(1; 2; 1)$ на прямую

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Задачи для повторения

4.110. Даны вершины треугольника A (7; 2), B (1; 9), C (–8; –11). Найти расстояние от точки O пересечения медиан треугольника до вершины B.

4.111. Составить уравнение множества точек, сумма расстояний от каждой точки которого до точек $F_1(-2; 0)$ и $F_2(2; 0)$ равна $2\sqrt{5}$.

4.112. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $B(2; -3)$ параллельно прямой, проходящей через точки M_1 (–4; 0) и M_2 (2; 2).

4.113. Найти точку, симметричную точке $A(-2; 2)$ относительно прямой $x + y - 4 = 0$.

4.114. Найти площадь четырехугольника с вершинами $A(-3; 2)$, $B(3; 4)$, $C(6; 1)$, $D(5; -2)$.

4.115. Даны две вершины треугольника A (2; –2), B (–6;2) и точка O (1; 2) пересечения его высот. Найти третью вершину C.

4.116. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x + y - 6 = 0$ и $2x + y - 12 = 0$ и отсекающей на осях равные отрезки.

4.117. Известны вершины треугольника A(–4; –2), B(0; 1), C(2; –1). Найти расстояние от начала координат до точки пересечения медианы, проведенной из вершины A, с высотой, проведенной из вершины B.

4.118. Дан треугольник с вершинами A(4; 6), B(–3; 0), C(2; –3). Составить уравнения биссектрисы AD и высоты CE и найти острый угол между ними.

4.119. Даны две смежные вершины квадрата (1; 4) и (4; 5) Найти другие вершины.

4.120. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами A(0; 2), B(1; 1), C(2; –2).

4.121. Найти точки эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, в которых фокальные радиусы перпендикулярны.

4.122. В эллипс $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$ вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной эллипса. Найти другие вершины треугольника.

4.123. На гиперболе $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$ найти точку M, ближайшую к прямой $2x+y-2=0$ и вычислить расстояние от точки M до этой прямой.

4.124. Составить уравнение гиперболы, эксцентриситет которой $\varepsilon = 2$, а фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{1}=1$.

4.125. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку пересечения прямой $y-x=0$ и окружности $x^2+y^2-4y=0$.

4.126. Через фокус параболы $y^2=-x$ проведена прямая под углом $135°$ к оси Ox. Найти длину образовавшейся хорды.

4.127. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M_1(2; 3; –1) и M_2(1; 5; 3) перпендикулярно плоскости $3x-y+3z+15=0$.

4.128. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей $x-2y+3z-4=0$ и $x+y-5z+9=0$ и параллельной оси Ox.

4.129. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и составляющей с плоскостью $x+\sqrt{6}y-x-3=0$ угол $60°$.

4.130. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(3;\ -2;\ 0)$ перпендикулярно к прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ и расположенной в плоскости Oxy.

4.131. Убедившись в том, что прямые $\begin{cases} x+y-z+4=0, \\ 2x-3y-z-5=0 \end{cases}$ и $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ пересекаются, найти их точку пересечения.

4.132. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{3}$ параллельно прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-2}{-5}$.

4.133. Найти точку M', симметричную точке $M\ (3;\ 4;\ 5)$ относительно плоскости $x-2y+z-6=0$.

Контрольные задания по главе 4 «Уравнение линии. Прямая и плоскость»

№	*Вариант 4.1*	*Вариант 4.2*	*Вариант 4.3*
1	Составить уравнение множества точек:		
	равноудаленных от точки $A(2;\ 0)$ и от прямой $x=4$	равноудаленных от точек $A(3;\ 2)$ и $B(-4;\ 0)$	каждая из которых отстоит от точки $A(0;\ 2)$ вдвое дальше, чем от точки $B(-4;\ 0)$
2	Даны вершины $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ треугольника. Составить: *а)* уравнение медианы и высоты, проведенной из вершины A; *б)* уравнение биссектрисы внутреннего угла B:		
	$A(3;\ 1)$, $B(-13;\ -11)$, $C(-6;\ 13)$	$A(26;\ -5)$, $B(2;\ 2)$; $C(-2;\ -1)$	$A(-2;\ 3)$, $B(-18;\ -9)$, $C(-11;\ 15)$

№	*Вариант 4.1*	*Вариант 4.2*	*Вариант 4.3*
3	Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $y = x + 7$, отсеченной гиперболой $xy = -6$	Найти расстояние фокуса параболы $y^2 = 4x$ от точек пересечения ее с окружностью $x^2 + y^2 = 12$	Составить уравнение эллипса, имеющего фокусы в вершинах, а вершины — в фокусах гиперболы $y^2 - x^2 = 4$
4	Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ и точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$:		
	$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}$; $M_0(2; -1; 2)$	$\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$; $M_0(2; 1; -3)$	$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z+2}{-3}$; $M_0(-1; 0; 2)$
5	Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:		
	$M_0(5; 2; 2)$; $M_1(3; 4; 6)$; $M_2(3; -2; -3)$; $M_3(6; 3; 2)$	$M_0(-6; 1; 3)$; $M_1(2; 3; 0)$; $M_2(1; 2; 2)$; $M_3(-1; 0; -3)$	$M_0(6; 1; 2)$; $M_1(3; 4; 2)$; $M_2(4; 5; 2)$; $M_3(7; 3; -2)$

Тест 4

1. Траектория движения точки $M(x, y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1; 1)$, чем к точке $B(-4; 4)$, есть:
1) прямая линия; 2) окружность; 3) гипербола; 4) парабола; 5) эллипс.

2. Найти координаты точки (x_0, y_0) пересечения медиан треугольника ABC, где $A(2; 4)$, $B(-3; 0)$, $C(7; -1)$.

3. Найти (в градусах) острый угол между прямыми $4x - 2y - 7 = 0$ и $y = \frac{1}{3}x - 11$.

4. Какие из данных прямых перпендикулярны прямой $2x - y + 3 = 0$:
1) $4x + 8y + 17 = 0$; 2) $4x - 8y - 11 = 0$; 3) $y = -\frac{1}{2}x + 5$; 4) $y = -2x - 7$; 5) $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$.

5. В треугольнике ABC известны вершины треугольника $A(-4; 3)$, $B(2; 5)$, $C(6; -2)$. Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A.
Ответ: $4x + By + C = 0$, где $B = \ldots$, $C = \ldots$.

6. Найти расстояние между параллельными прямыми
$y = -0{,}75x - 6$ и $3x + 4y - 12 = 0$.

7. Найти координаты центра (x_0, y_0) и радиус R окружности $x^2 - 10x + y^2 - 8y + 32 = 0$.

8. Найти расстояния d_1 между фокусами эллипса $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$ и d_2 между фокусами гиперболы $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

9. Найти расстояние между центром равносторонней гиперболы $y = \frac{12x - 5}{4x - 8}$ и вершиной параболы $y = -2x^2 + 20x - 43$.

10. Найти соответствие между утверждениями относительно двух плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (*1*), $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ (*2*), прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и их признаками:

1) плоскости параллельны;

а) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;

2) плоскости перпендикулярны;

$$б)\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$$

3) плоскость (*1*) и прямая параллельны;

$$в)\ A_1m + B_1n + C_1p = 0;$$

4) плоскость (*1*) и прямая перпендикулярны.

$$г)\ \frac{A_1}{m} = \frac{B_1}{n} = \frac{C_1}{p}.$$

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; 3; -1)$ параллельно плоскости $4x - 2y + 5z - 3 = 0$.

Ответ: $4x + By + Cz + D = 0$, где $B = \dots$, $C = \dots$, $D = \dots$.

12. Убедившись в том, что прямые

$$\begin{cases} x + y - z + 4 = 0, \\ 2x - 3y - z - 5 = 0 \end{cases} \text{ и } \frac{x+3}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{2}$$

пересекаются, найти их точку пересечения (x_0, y_0, z_0).

Учебно-тренировочные тесты по дисциплине «Линейная алгебра (с элементами аналитической геометрии)» (раздел I)

№	Тест ЛА – 1	Тест ЛА – 2	Тест ЛА – 3
1	Найти размер, который должна иметь матрица B, чтобы:		
	существовало произведение $A \cdot B$, если матрица A имеет размер 2×4	матрица $A' \cdot B$ была квадратной, если матрица A имеет размер 3×4	существовали оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если матрица A имеет размер 3×2
	Ответы: 1) 2×3; 2) 4×2;	3) 3×4; 4) 3×2;	5) 4×3; 6) 2×4
2	Матрица $C = A'B + 2E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найти:		
	определитель $\|2C\|$	определитель $\|C\|$	ранг $rang\ C$
3	Найти матрицу $C = ABEB^{-1}A^{-1}$	Найти решение матричного уравнения $A^{-1}A^2XB^{-1} = E$	Найти матрицу, обратную к матрице $C = \left(A^{-1}B\right)^{-1}\left(AE\right)^{-1}$
	Ответы: 1) E; 2) A;	3) B; 4) AB;	5) AB^{-1}; 6) $A^{-1}B$

<table>
<tr>
<td>4</td>
<td>Найти алгебраическое дополнение элемента a_{23} матрицы $$A=\begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$</td>
<td>Найти элемент c_{32} матрицы $C = B \cdot A$, если $$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$</td>
<td>Найти определитель матрицы $C = A - 2B$, если $$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">5</td>
<td colspan="3">Решить систему линейных уравнений:</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$</td>
<td>$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$</td>
<td>$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2, \\ -x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Ответы:
<table>
<tr><td>Значения:</td><td>– 2</td><td>– 1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$x_1 =$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x_2 =$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x_3 =$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">6</td><td colspan="3">Установить свойства системы линейных уравнений, если при решении методом Гаусса получена расширенная матрица вида:</td></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ответы: 1) совместная; 2) несовместная; 3) определенная; 4) неопределенная</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Найти значение параметра a, при котором систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ нельзя решить по формулам Крамера</td><td>Найти значение параметра a, при котором при решении системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_3 = 1 + a, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ по формулам Крамера выполняется равенство $\Delta = \Delta_2$</td><td>Найти x_3, если при решении системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2, \\ 2x_1 + x_3 = 1, \\ -x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$ по формулам Крамера получены определители $\Delta_1 = -10$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 15$</td></tr>
</table>

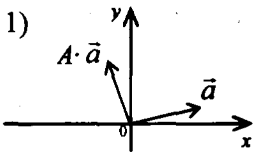
<table>
<tr><td rowspan="3">8</td><td colspan="3">Найти значения параметров a и b, при которых однородная система линейных уравнений:

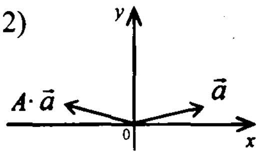
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_4 = 0, \\ (3-a)x_3 = 0, \\ (b-2)x_4 = 0 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>имеет два линейно независимых решения</td><td>имеет единственное решение</td><td>имеет единственную неосновную переменную</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ответы: 1) $a=3$, b – любое; 2) $b=2$, a – любое; 3) $a\neq 3$, $b=2$;
4) $b\neq 2$, $a=3$; 5) $a=3$, $b=2$; 6) $a\neq 3$, $b\neq 2$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Найти число линейно независимых столбцов матрицы

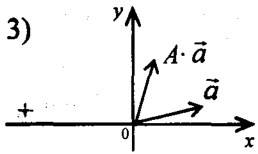
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$</td><td>Найти ранг матрицы

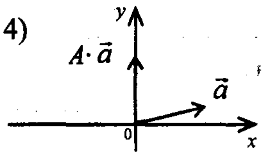
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$</td><td>Найти число линейно независимых строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>10</td><td>Найти проекцию вектора $\vec{a}-2\vec{b}$ на направление вектора $\vec{c}$, если
$\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}-8\vec{k}$,
$\vec{b}=-4\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$ и
$\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$</td><td>Найти скалярное произведение векторов $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$, если
$\left|\vec{a}\right|=2, \left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ и $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=3$</td><td>Найти длину вектора
$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right|=3$,
$\left|\vec{b}\right|=2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляет $60°$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Найти собственное значение матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$</td><td>Найти собственное значение матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, которое соответствует собственному вектору $(2;-4)$</td><td>Найти значение параметра a, при котором вектор $(1;a)$ является собственным для матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">12</td><td colspan="3">Указать рисунок, на котором изображено преобразование вектора $\vec{a}$ с помощью линейного оператора $\tilde{A}$, задаваемого матрицей:</td></tr>
<tr><td>$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$</td><td>$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$</td><td>$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ответы:
1) 

2) 

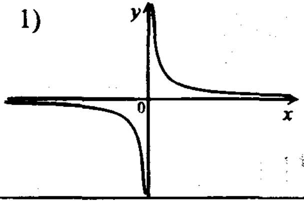
3) 

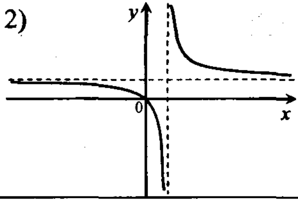
4) 
</td></tr>
</table>

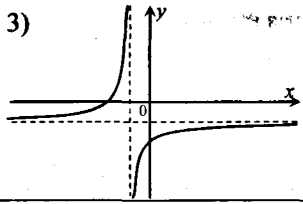
13	Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму:		
	$L = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + {}$ $+2x_1x_2 + 2x_1x_3$	$L = -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2$	$L = 5x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 -{}$ $-2x_1x_2 + 8x_1x_3$
	Ответы: 1) положительно определенная; 2) отрицательно определенная; 3) не является знакоопределенной		
14	Даны вершины четырехугольника $A(0;1)$, $B(8;2)$, $C(6;5)$ и $D(-2;4)$. Найти:		
	расстояние от точки пересечения диагоналей до оси абсцисс	тангенс угла A	угловой коэффициент высоты, опущенной из вершины С
15	Найти значение параметра a, при котором прямые $2x-3y+5=0$ и $4x+ay+1=0$ параллельны	Найти значение параметра a, при котором прямые $x-2y+3=0$ и $y=ax+5$ перпендикулярны	Найти тангенс угла между прямыми $y=2x-1$ и $2y=x+6$
16	Найти расстояние между центром окружности $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ и центром равносторонней гиперболы $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$	Найти расстояние между вершиной параболы $y=x^2-2x-3$ и центром окружности $(x+3)^2+(y+1)^2=1$	Найти расстояние между вершиной параболы $y^2=2(x-2)$ и центром равносторонней гиперболы $y=\dfrac{3x+5}{x-4}$
17	Определить, какую линию второго порядка задает на плоскости уравнение:		
	$y^2+2y-6x-10=0$	$4x^2-y^2+16x-2y+11=0$	$4x^2+y^2-16x+2y+12=0$
	Ответы: 1) эллипс; 2) окружность; 3) парабола; 4) гипербола		

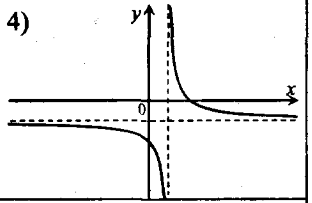
18	Указать рисунок, на котором изображен график функции:		
	$y=\dfrac{-2x-7}{2+x}$	$y=\dfrac{5-x}{x-1}$	$y=\dfrac{25}{x}$

Ответы:

1) 

2) 

3) 

4) 

19	Определить взаимное расположение в пространстве прямых:		
	$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\2x+3y-8z+3=0\end{cases}$	$\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-5}{3}$ и $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{2y+4}{-1}=\dfrac{2z-16}{-3}$	$\dfrac{3x+12}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{3z}{5}$ и $\begin{cases}x-2y+z=4,\\2x+y-z=0\end{cases}$

Ответы: **1) совпадают;** 2) параллельны; 3) скрещиваются; **4) пересекаются,** но не перпендикулярны; 5) пересекаются под прямым углом

20			
20	Найти **косинус** угла **между** плоскостями $4x-5y+3z-1=0$ и $x-4y-z+9=0$	Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $4x-4y+2z-9=0$ и $4x-4y+2z+15=0$	Найти значение параметра D в уравнении плоскости $x-5y-z+D=0$, если она проходит через точку $(-4;1;3)$ перпендикулярно вектору $(1;-5;-1)$

Итоговые контрольные задания по дисциплине «Линейная алгебра (с элементами аналитической геометрии)» (раздел I)

№	*Вариант ЛА. 1*	*Вариант ЛА. 2*	*Вариант ЛА. 3*	*Вариант ЛА. 4*	*Вариант ЛА. 5*
1	Найти матрицу $C = B(AB)^{-1} + (B'B)'B^{-1}$, предварительно приведя ее к более простому виду, где:				
	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 8 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 8 \\ 6 & 1 & -9 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -4 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 8 & 9 \\ -7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -9 & 0 & -8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$
2	Методом Гаусса решить систему уравнений, заданную в матричной форме: $AX = B$. Найти ранг матрицы A. Дано: $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)'$ и:				
	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$, $B = (4\ \ 4\ \ 2\ \ 3)'$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = (-3\ \ 8\ \ 6\ \ 3)'$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = (5\ \ 1\ \ 6\ \ 1)'$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 & 2 \\ 7 & 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = (1\ \ 2\ \ 4\ \ 7)'$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & -8 & 8 & 7 \\ 2 & -4 & 8 & 8 \\ 2 & -3 & 10 & 8 \end{pmatrix}$, $B = (1\ \ 3\ \ 0\ \ 1)'$
3	Даны вершины $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$, $C\ (x_3, y_3)$ треугольника. Найти уравнения и длины высоты CD и медианы CE. Сделать чертеж.				
	$A(3; 0)$, $B(-5; 6)$, $C(-4; 1)$	$A(10; 2)$, $B(2; 8)$, $C(3; 3)$	$A(6; 2)$, $B(-2; 8)$, $C(-1; 3)$	$A(8; 3)$, $B(0; 9)$, $C\ (1; 4)$	$A(5; -1)$, $B(-3; 5)$, $C(-2; 0)$

№	*Вариант ЛА. 1*	*Вариант ЛА. 2*	*Вариант ЛА. 3*	*Вариант ЛА. 4*	*Вариант ЛА. 5*
4	Привести уравнение кривой второго порядка $f(x, y) = 0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой $Ax + By + C = 0$. Построить графики кривой и прямой:				
	$x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$, $3x + y - 3 = 0$	$2x^2 + y^2 - 12x + 10 = 0$, $x + y - 2 = 0$	$2x^2 + 8x + y + 7 = 0$, $2x + y + 3 = 0$	$y^2 + x + 4y + 3 = 0$, $x + 2y + 2 = 0$	$4x^2 - 8x - y^2 = 0$, $2\sqrt{3}x + y = 0$
5	Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:		Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:		
	$M(1; 0; 1)$, $4x + 6y + 4z - 25 = 0$	$M(-1;\ 0;\ -1)$, $2x + 6y - 2z + 11 = 0$	$M(0;\ -3;\ -2)$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3/2}{-1} = \dfrac{z}{1}$	$M(2;\ -1;\ 1)$, $\dfrac{x-9/2}{1} = \dfrac{y+3}{-1/2} = \dfrac{z-2}{1}$	$M(1; 1; 1)$, $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3/2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$
6	Даны четыре вектора $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{a}_4$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{a}_4$ в этом базисе:				
	$\boldsymbol{a}_1 = (1; 3; 5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0; 2; 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (5; 7; 9)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0; 4; 16)$	$\boldsymbol{a}_1 = (2; 4; -6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1; 3; 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0; -3; 7)$, $\boldsymbol{a}_4 = (3; 2; 52)$	$\boldsymbol{a}_1 = (4; 3; -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (5; 0; 4)$ $\boldsymbol{a}_3 = (2; 1; 2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0; 12; -6)$	$\boldsymbol{a}_1 = (3; 4; -3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2; 1; -4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-5 ; 5; 0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (8; -16; 17)$	$\boldsymbol{a}_1 = (-2; 1; 7)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3; -3; 8)$ $\boldsymbol{a}_3 = (5; 4; 1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (18; 25; 1)$
7	Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A. Привести к диагональному виду матрицу A (если это возможно):				
	$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$
8	Привести к каноническому виду квадратичную форму L:				
	$L = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 +$ $+ 4x_2x_3 + 4x_3^2$	$L = 4x_1^2 + 4x_1x_2 +$ $+ 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$	$L = 4x_1^2 + 8x_1x_2 +$ $+ 4x_1x_3 + x_3^2$	$L = 4x_1^2 + 8x_1x_2 +$ $+ 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$	$L = x_1^2 + 4x_1x_2 +$ $+ 4x_2x_3 + x_3^2$

Итоговый тест ЛА

1. При каких значениях a, b, c для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ a & 4 & b \\ -1 & c & -5 \end{pmatrix}$$

выполняется равенство $A^2 = 0$?

2. Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти определитель $|B|$ матрицы $B = AA'$.

3. Выяснить, какие из приведенных ниже матриц являются нулевыми (A и B — квадратные матрицы):

1) $BA - AB$; 2) $(B'A)' - A'B$; 3) $A^{-1}B^{-1} - B^{-1}A^{-1}$; 4) $(A^{-1}B)^{-1} - AB^{-1}$; 5) $AA' - A'A$.

4. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти след $\operatorname{tr} C$ матрицы $C = AB - BA + A + B$.

5. Выяснить, при каком значении a ранг матрицы A является наименьшим среди рангов приведенных матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. По формулам Крамера решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ -x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

В ответе дать значения переменных x_1, x_2 и определителя Δ_3.

7. Выяснить, какой из методов можно применить для решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$$

1) метод обратной матрицы; 2) по формулам Крамера; 3) метод Гаусса.

8. Дано матричное уравнение $AXB = C$. Его решение с помощью обратных матриц A^{-1}, B^{-1} имеет вид:

1) $A^{-1}B^{-1}C$; 3) $A^{-1}CB^{-1}$;
2) $B^{-1}CA^{-1}$; 4) $CA^{-1}B^{-1}$.

9. Для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

найти базисное решение (x_1, x_2, x_3), получаемое при выборе в качестве основных (базисных) переменных x_1, x_2.

10. Для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

найти фундаментальную систему решений. В ответе дать число таких решений.

11. Дана матрица прямых затрат A в модели Леонтьева:

$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу полных затрат S. В ответе дать ее элементы s_{11} и s_{21}.

12. Две стороны квадрата лежат на параллельных прямых $3x + 4y + 25 = 0$ и $3x + 4y + 50 = 0$. Найти площадь квадрата.

13. В треугольнике ABC заданы вершины $A(0; 2)$, $B(4; 0)$ и точка пересечения высот $M\left(\frac{8}{7}; \frac{16}{7}\right)$. Найти уравнение стороны BC.

Ответ: $4x + By + C = 0$, где $B = \ldots$, $C = \ldots$.

14. Составить уравнение биссектрисы тупого угла между прямыми $3x + y - 12 = 0$ и $y = 0$.

Ответ: $3x + By + C = 0$, где $B = \ldots$, $C = \ldots$.

15. Линия, расстояние каждой точки которой от точки $A(2; -2)$ вдвое меньше, чем от прямой $x + 1 = 0$, есть:

1) прямая линия; 2) окружность; 3) эллипс; 4) гипербола; 5) парабола.

16. Составить уравнение прямой, проходящей через центр гиперболы $y = \dfrac{4x+3}{x-2}$ и вершину параболы $y = -2x^2 + 16x - 30$.

Ответ: $x + By + C = 0$, где $B = \ldots$, $C = \ldots$.

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1; 2; -3)$ перпендикулярно прямой

$$\begin{cases} x = 2, \\ y - z = 1. \end{cases}$$

Ответ: $By + Cz + 1 = 0$, где $B = \ldots$, $C = \ldots$.

18. Найти (в градусах) угол между плоскостью $y = z$ и прямой

$$\begin{cases} x = -z + 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

19. Найти (в градусах) угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные векторы, образующие угол 120°.

20. Найти (с точностью до 0,1) проекцию вектора $\vec{a} = (2;\ -3;\ 4)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

21. Выяснить, при каком значении λ векторы $\boldsymbol{a}_1 = (-2;\ 0;\ 1)$; $\boldsymbol{a}_2 = (1;\ -1;\ 0)$; $\boldsymbol{a}_3 = (0;\ 1;\ \lambda)$ не образуют базис в пространстве R^3.

22. Выяснить, при каком значении λ вектор $b = (1;\ \lambda)$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1 = (2;\ 1)$ и $\boldsymbol{a}_2 = (4;\ 2)$.

23. Векторы $\boldsymbol{x}_1 = (-1;\ a)$ и $\boldsymbol{x}_2 = (b;\ 1)$ являются собственными векторами матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ с собственными значениями λ_1, λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) соответственно. Найти λ_1, λ_2 и значения a и b.

24. Найти наименьшее целое значение λ, при котором будет положительно определенной квадратичная форма $L = \lambda x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$.

Раздел II
Введение в анализ

Глава 5
Функция

Справочный материал

1. Если каждому элементу (значению) x множества X поставить в соответствие определенный элемент (значение) y множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$; при этом множество X называется *областью определения* функции y, а множество Y — *областью значений* функции y.

2. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений x из области определения функции $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае $f(x)$ — функция общего вида.

3. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на некотором промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции $f(x)$. Возрастающие или убывающие функции называются *монотонными*.

4. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке X, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$, для всех $x \in X$. В противном случае функция называется *неограниченной*.

5. Если функция $y = f(u)$ есть функция переменной u (определенной на множестве U с областью значений Y), а переменная u, в свою очередь, также является функцией $u = \varphi(x)$ (определенной на множестве X с областью значений U), то заданная на множестве X функция $y = f[\varphi(x)]$ называется *сложной* функцией.

6. Основные элементарные функции:

а) степенная функция $y = x^n$;

б) показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$(X = (-\infty;\ +\infty);\ \ Y = (0;\ +\infty));$$

в) логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$(X = (0;\ +\infty);\ \ Y = (-\infty;\ +\infty));$$

г) тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

д) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

7. Функции, построенные из основных элементарных функций при помощи конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются *элементарными*.

8. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если $f(x+T) = f(x)$ для любых $x \in X$.

9. *Преобразования графиков*:

а) $y = f(x+a)$ — сдвигает график $y = f(x)$ параллельно оси Ox на $|a|$ единиц, ($a > 0$ — влево, $a < 0$ — вправо);

б) $y = f(x) + b$ — сдвигает график $y = f(x)$ параллельно оси Oy на $|b|$ единиц ($b > 0$ — вверх, $b < 0$ — вниз);

в) $y = cf(x)$ $(c \neq 0)$ — растягивает в c раз $(c > 1)$ или сжимает $(0 < c < 1)$ график $y = f(x)$ относительно оси Oy; при $c < 0$ симметрично отображает график относительно оси Ox;

г) $y = f(kx)$ $(k \neq 0)$ — сжимает в k раз $(k > 1)$ или растягивает $(0 < k < 1)$ график $y = f(x)$ относительно оси Ox; при $k < 0$ симметрично отображает график относительно оси Oy.

10. Абсолютная величина (модуль) действительного числа x:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0; \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

5.1. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2^x(x-6)} + \ln(x+10).$$

Р е ш е н и е. Так как выражение под корнем четной степени должно быть неотрицательно, знаменатель дроби отличен от нуля, а выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительно, то область определения функции найдем из системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ 2^x(x-6) \neq 0, \\ x + 10 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x-2)(x+2) \geq 0, \\ x \neq 6, \\ x > -10, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ -2] \cup [2;\ +\infty), \\ x \neq 6, \\ x \in (-10;\ +\infty). \end{cases}$$

Значения переменной x, которые удовлетворяют всем неравенствам системы одновременно, есть $x \in (-10;\ -2] \cup [2;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$.▶

5.2. Найти область значений функции $y=\dfrac{1}{3\sin 2x+4\cos 2x}$.

Р е ш е н и е. Вынесем в знаменателе за скобку $\sqrt{3^2+4^2}=5$: $y=\dfrac{1}{5\left(\frac{3}{5}\sin 2x+\frac{4}{5}\cos 2x\right)}$. Полагая, что $\frac{3}{5}=\cos\beta$, $\frac{4}{5}=\sin\beta$ (это возможно, так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$), получим:

$$y=\frac{1}{5(\cos\beta\,\sin 2x+\sin\beta\,\cos 2x)},\text{ или }\ y=\frac{1}{5\sin(2x+\beta)}.$$

Учитывая, что $\sin(2x+\beta)$ принимает все возможные значения на отрезке $[-1;\ 1]$, или $5\sin(2x+\beta)$ на отрезке $[-5;\ 5]$, найдем, что $y\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{5}\right]\cup\left[\frac{1}{5};\ +\infty\right)$.▶

5.3. Найти область значений функции $y=10^{-2x^2}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся определением обратной функции, в соответствии с которым область ее определения будет являться областью значений исходной функции. Найдем функцию, обратную к функции $y=10^{-2x^2}$, выражая x через y: $-2x^2=\lg y$ или $x^2=-\frac{1}{2}\lg y$. Так как $x^2\geq 0$, то $-\frac{1}{2}\lg y\geq 0$, откуда $\lg y\leq 0$ и $y\in(0;\ 1]$, т.е. найденный полуинтервал и является областью значений искомой функции. ▶

5.4. Выяснить четность (нечетность) функции:

а) $y=\dfrac{x^4}{\cos x}-\sqrt{1-x^2}$; *б*) $y=3^x\sin x$.

Р е ш е н и е:

а) Найдем $y(-x)=\dfrac{(-x)^4}{\cos(-x)}-\sqrt{1-(-x)^2}=\dfrac{x^4}{\cos x}-\sqrt{1-x^2}$.

Так как $y(-x)=y(x)$, то по определению (п. 2) искомая функция является четной;

б) $y(-x)=3^{-x}\sin(-x)=3^{-x}-\sin x$. Так как $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$, то по определению (п. 2) искомая функция является функцией общего вида.

5.5. Найти основной (наименьший) период функции $y=2\sin 4x$.

Р е ш е н и е. По определению периодической функции (п. 8) $y(x+T)=y(x)$, для любых x и $T\neq 0$. Для $f(x)=2\sin 4x$ имеем:

$$2\sin(4(x+T)) = 2\sin 4x, \quad \text{или} \quad \sin(4x+4T) - \sin 4x = 0,$$

откуда $2\sin\dfrac{4x+4T-4x}{2}\cdot\cos\dfrac{4x+4T+4x}{2} = 0$, т.е. $\sin 2T\cdot\cos(4x + 2T) = 0$. Полученное равенство будет выполняться при любых x, т.е. тождественно, если сомножитель, не содержащий x, будет равен нулю, т.е. $\sin 2T = 0$ и наименьшее (не равное нулю) $T = \pi/2$. ▶

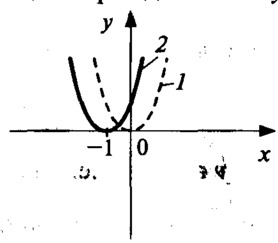
5.6. Построить графики функций: *а*) $y = 1 - 2x^2 - 4x$; *б*) $y = \dfrac{2x-3}{x-3}$.

Решение:

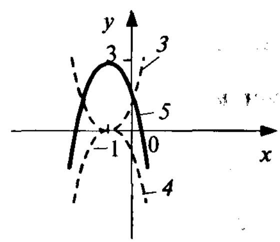
а) Выделим полный квадрат:

$$y = -2x^2 - 4x + 1 = -2(x^2 + 2x + 1) + 3 = -2(x+1)^2 + 3.$$

Воспользуемся преобразованиями графиков (п. 9): *а*) строим график $y = x^2$ (график *1*, рис. **5.1, *а***); *б*) строим график $y = (x+1)^2$ параллельным переносом $y = x^2$ на 1 единицу влево (график *2*, рис. **5.1, *а***); *в*) строим график $y = 2(x+1)^2$, растягивая график $y = (x+1)^2$ в 2 раза вдоль оси Oy (график *3*, рис. **5.1, *б***); *г*) строим график $y = -2(x+1)^2$, отображая график $y = 2(x+1)^2$ симметрично относительно оси Ox (график *4*, рис. **5.1, *б***); *д*) строим график $y = -2(x+1)^2 + 3$, перемещая график $y = -2(x+1)^2$ на 3 единицы вверх вдоль оси Oy (график *5*, рис. **5.1, *б***).



а



б

Рис. 5.1

б) Выделим целую часть дроби:

$$y = \frac{2x-3}{x-3}, \quad y = \frac{(2x-6)+3}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{3}{x-3}, \quad y = \frac{3}{x-3} + 2.$$

Воспользуемся преобразованиями графиков (п. 9): *а*) строим график $y = \dfrac{1}{x}$ (график *1*, рис. **5.2, *а***); *б*) строим график $y = \dfrac{1}{x-3}$, сдвигая $y = \dfrac{1}{x}$ вдоль оси Ox на 3 единицы вправо (график *2*, рис. **5.2, *а***); *в*) строим график $y = \dfrac{3}{x-3}$, растягивая $y = \dfrac{1}{x-3}$ в 3 раза вдоль оси Oy

(график *3*, рис. **5.2**, *б*); *г*) строим график $y=\dfrac{3}{x-2}+2$, перемещая $y=\dfrac{3}{x-3}$ на 2 единицы вверх вдоль оси *Oy* (график *4*, рис. **5.2**, *б*). ▶

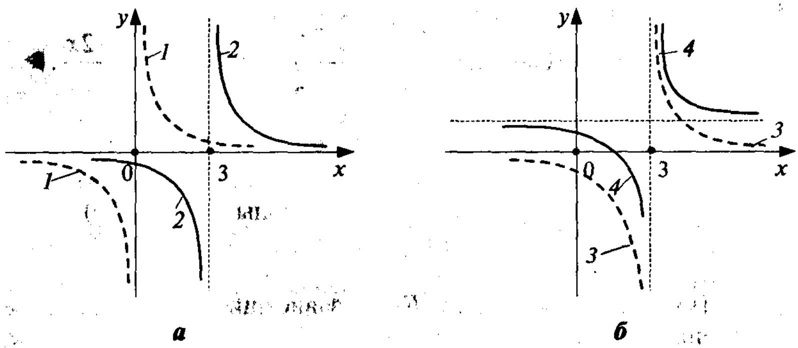


Рис. 5.2

5.7. Решить неравенства:

а) $|x+3|<5$; *б*) $|x^2-7|>9$.

Р е ш е н и е:

а) Из определения абсолютной величины (модуля) (п. 10) следует, что абсолютная величина разности двух чисел $|x-a|$ означает расстояние между точками x и a на числовой прямой. Поэтому решениями неравенства $|x-a|<c$ будут точки интервала $(a-c;\ a+c)$, удовлетворяющие неравенству $a-c<x<a+c$. В нашем случае (рис. **5.3**)

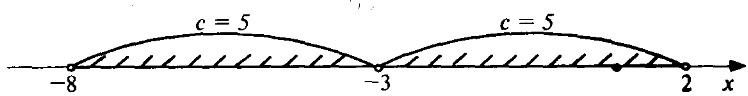


Рис. 5.3

$a=-3$; $c=5$, следовательно, $-3-5<x<-3+5$, т.е. $x\in(-8;\ 2)$.

б) Решим неравенство $|x^2-7|\le 9$: все значения x, являющиеся решением этого неравенства, не являются решениями исходного, и, напротив, все значения x, которые не являются решением последнего неравенства являются решением искомого.

Решая аналогично примеру *а*), имеем: $7-9\le x^2\le 7+9$, т.е. $-2\le x^2\le 16$. Так как $x^2\ge -2$ при всех x, то решаем неравенство $x^2\le 16$; получим $|x|<4$, откуда $-4\le x\le 4$, т.е. $x\in[-4;\ 4]$. Следовательно, решением искомого неравенства будет $x\in(-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty)$.

5.8. Дана функция $y(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$. Найти $y\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Р е ш е н и е. Чтобы найти $y\left(\dfrac{1}{x}\right)$, нужно вместо x в выражение для функции $y(x)$ подставить $\dfrac{1}{x}$. Получаем $y\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}+2}{\dfrac{1}{x}-2}$, или $y\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1+2x}{1-2x}$. ▶

5.9. Известно, что $y(x)=2x+5$, а $y(3-2\cdot z(x))=10-6x$. Найти $z(x)$.

Р е ш е н и е. С одной стороны, $f(3-2z(x))$ можно получить из $f(x)$, подставив вместо x $3-2z(x)$; с другой стороны, $f(3-2z(x))=10-6x$ по условию. Таким образом, имеем уравнение $2\cdot(3-2z(x))+5=10-6x$, из которого $z(x)=1{,}5x+0{,}25$. ▶

5.10. Постоянные издержки F (не зависящие от числа x единиц произведенной продукции) составляют 125 тыс. руб. в месяц, а переменные издержки $V(x)$ (пропорциональные x) — 700 руб. за каждую единицу продукции. Цена единицы продукции 1200 руб. Найти объем продукции x, при котором прибыль равна: *а*) нулю (точка безубыточности); *б*) 105 тыс. руб. в месяц.

Р е ш е н и е:

а) Издержки производства x единиц продукции составят: $C(x)=F+V(x)=125+0{,}7x$ (тыс. руб.). Совокупный доход (выручка) от реализации этой продукции $R(x)=1{,}2x$, а прибыль $P(x)=R(x)-C(x)=0{,}5x-125$ (тыс. руб.). Точка безубыточности, в которой $P(x)=0{,}5x-125=0$, равна $x=250$ (ед.).

б) Прибыль $P(x)$ равна 105 (тыс. руб.), т.е. $P(x)=0{,}5x-125=105$ при $x=460$ (ед.). ▶

5.11. Продолжительность выполнения y (мин.) при повторных операциях связана с числом x этих операций зависимостью $y=\dfrac{a}{x+c}$. Вычислить, сколько минут выполняется работа при 50 операциях, если известно, что при $x=20$ $y=125$, а при $x=200$ $y=50$.

Р е ш е н и е. Найдем параметры a и c, учитывая, что $y(20)=125$, $y(200)=50$. Имеем систему:

$$\begin{cases}125=\dfrac{a}{20+c},\\ 50=\dfrac{a}{200+c},\end{cases}$$

решая которую найдем $a=15\,000$, $c=100$.

Итак, $y=\dfrac{15000}{x+100}$ и при $x=50$ $y(50)=\dfrac{15000}{50+100}=100$ (мин.). ▶

Найти области определения функций:

5.12. $y=\dfrac{\sqrt[5]{\lg(x+1)}}{x-1}+2^{\sqrt{10-x}}$. **5.13.** $y=\dfrac{\sqrt[6]{16-x^2}}{\lg(x-1)^2}$. **5.14.** $y=\sqrt{4-x^2}\cdot\operatorname{tg}x$.

5.15. $y=\dfrac{\arcsin(x-1)}{\lg x}$. **5.16.** $y=\dfrac{\sqrt{\sin x-0{,}5}}{\sqrt[3]{x-2}}-\log(x-1)\cdot\ln(4-x)$.

Найти области значений функций:

5.17. $y=5\sin x+2\cos x$. **5.18.** $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$. **5.19.** $y=\dfrac{3x}{1+x^2}$.

5.20. $y=\dfrac{3}{(\sin x+\cos x)^2+2}$. **5.21.** $y=\log_\pi(\arccos x)$.

Выяснить четность (нечетность) функций:

5.22. $y=x+\sin x$. **5.23.** $y=x\cdot\sin^3 x$

5.24. $y=\dfrac{\lg(1-x^2)}{\sqrt[3]{\cos x}}\cdot e^{-x^2}$. **5.25.** $y=\dfrac{x^3\cos x}{2^{x^2}}+\sin^2 x$.

5.26. $y=\lg\left(\dfrac{2-x^3}{2+x^3}\right)$.

Найти наименьший период функций или доказать их непериодичность:

5.27. $y=4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+3x\right)$. **5.28.** $y=3\operatorname{tg}4x+1$. **5.29.** $y=\sin^2 x$.

5.30. $y=\sin\dfrac{1}{x}$. **5.31.** $y=x\cdot\sin x$.

5.32. Дана функция $y(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, найти $y\left(\dfrac{4-x}{2+x}\right)$.

5.33. Дана функция $y=2^x$, найти $y(\log_{0,5}x)$.

5.34. Известно, что $y(x)=\dfrac{3-x}{2+x}$, а $y\left(\dfrac{1+z(x)}{2}\right)=\dfrac{1}{x}$. Найти $z(x)$.

5.35. Известно, что $y(x)=3^x$, а $y(4z(x))=\dfrac{1}{x^2}$. Найти $z(x)$.

Построить графики функций:

5.36. $y = 7 + 6x - x^2$; $\qquad y = \dfrac{3x-2}{x+1}$; $\qquad y = 3 \cdot 2^{x+1}$.

5.37. $y = 2 \log_2 (4 + x)$; $\qquad y = 2 \cos (2x + \dfrac{\pi}{4})$.

5.38. Предприятие купило автомобиль стоимостью 150 тыс. руб. Ежегодная норма амортизации составляет 9%. Полагая зависимость стоимости автомобиля от времени линейной, найти стоимость автомобиля через 4,5 года.

5.39. Зависимость уровня потребления y некоторого вида товаров от уровня дохода семьи x выражается формулой: $y = a - \dfrac{b}{x+c}$. Найти уровень потребления товаров при уровне дохода семьи 158 ден. ед. Известно, что при $x = 50$ $y = 0$; при $x = 74$ $y = 0{,}8$; при $x = 326$ $y = 2{,}3$.

5.40. Банк выплачивает ежегодно 5% годовых (сложный процент). Определить: *а*) размер вклада через 3 года, если первоначальный вклад составил 10 тыс. руб.; *б*) размер первоначального вклада, при котором через 4 года вклад (вместе с процентными деньгами) составит 10 000 руб.

Указание. Размер вклада Q_t через t лет определяется по формуле $Q_t = Q_0 \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^t$, где p — процентная ставка за год, Q_0 — первоначальный вклад.

Задачи для повторения

Найти области определения функций:

5.40. $y = \dfrac{\log_{x^2-6x+9}(25-x^2)}{\sqrt{4^{\sin x}}}$. **5.41.** $y = \sqrt{x+5} \cdot \arccos(x+5)$.

Найти области значений функций:

5.42. $y = 3\sin 4x + 4\cos 4x$. **5.43.** $y = \dfrac{x}{1+2x^2}$.

Выяснить четность (нечетность) функций:

5.44. $y = x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \sqrt[3]{x^2}$. **5.45.** $y = x^3 \cdot \operatorname{arsin} x + \cos x$.

5.46. Найти наименьший период функции $y = 4\operatorname{tg} 3x$.

5.47. Дана функция $y(x) = \dfrac{2x}{3+x}$, найти $y\left(\dfrac{3x}{2-x}\right)$.

5.48. Известно, что $y(x) = 10^x$, а $y(2 + z(x)) = 100\sqrt{x}$. Найти $z(x)$.

5.49. Клиент взял в банке кредит под 10% годовых (сложный процент). Определить: а) размер кредита, если по истечении трех лет клиенту пришлось выплатить 159 720 рублей; б) по истечении скольких полных лет клиенту пришлось бы выплатить сумму вдвое большую, чем размер полученного кредита?

Контрольные задания по главе 5 «Функция»

№	*Вариант 5.1*	*Вариант 5.2*	*Вариант 5.3*
	Найти область определения функций:		
1	$y=\frac{x}{\sqrt[4]{25-x^2}}$	$y=\frac{3^{\sqrt{x}}}{\lg(3-x)}$	$y=\sqrt{x+2}-$ $-\ln(4-x)$
2	$y=\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\ln(x+1)}{(x^2+1)\sqrt{5^x}}-$ $-\frac{\sqrt[4]{x-1}}{x}$	$y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\operatorname{arctg} x}+$ $+\log_2(x-2)$	$y=\frac{\arcsin x}{\sin 5x}$
	Выяснить четность (нечетность) функций:		
3	$y=\frac{\sin x}{x^3}$	$y=(\sin^2 x+\cos x)\cdot x^3$	$y=x^2\ln x$
4	$y=3^{4x}\cdot x^2+\cos x$	$y=\frac{\operatorname{tg} x}{x^4+x^2+x}$	$y=\frac{x^4}{\sin x}-$ $-x^3\ln(1+x^2)$
	Найти область значений функций:		
5	$y=\frac{2\sqrt{2}x-1}{x^2+1}$	$y=6\sin x-8\cos x$	$y=2\cdot 5^{-2x^2}$
	Найти основной (наименьший) период функций:		
6	$y=\sin^2 4x$	$y=2\sin\frac{x}{2}$	$y=\operatorname{tg}^2 x$
	Построить графики функций:		
7	$y=-3x^2+10x-3$, $y=\frac{1-6x}{1-2x}$	$y=-5x^2+26x-5$, $y=\frac{1-5x}{2-5x}$	$y=-4x^2+17x-4$, $y=\frac{2-9x}{2-3x}$

Тест 5

1. Выяснить, какие из функций являются сложными:

1) $y=\dfrac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{3}}$; 2) $y=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^x$; 3) $y=\arcsin x$; 4) $y=\arcsin(3x)$.

2. Выяснить, какие из функций заданы неявно:

1) $y=\sin^3\ln x$; 2) $y=\operatorname{tg}(x+y)\cdot 3^x$; 3) $x-y=xy$.

3. Выяснить, какие из функций являются ограниченными:

1) $y=e^{-x^2}$; 2) $y=e^{x^2}$; 3) $y=\dfrac{\cos x}{x^2}$; 4) $y=\sin x+\cos x$.

4. Выяснить, какие из функций являются монотонными при $x\in(-\infty;+\infty)$:

1) $y=x^2$; 2) $y=x^3$; 3) $y=\begin{cases} x, & \text{при } x<0,\\ 2x, & \text{при } x\ge 0;\end{cases}$ 4) $y=\sqrt[3]{x}$.

5. Выяснить, какие из функций являются нечетными:

1) $y=\dfrac{x}{\cos x}+\sin x$; 2) $y=\dfrac{x(x+1)}{\sin x}$; 3) $y=x^3+\operatorname{tg}x$; 4) $y=x^3\cdot\operatorname{tg}x$.

6. Укажите верные утверждения для функции $y=\arcsin x$:

1) монотонная; 2) ограниченная; 3) неограниченная; 4) четная; 5) нечетная; 6) общего вида; 7) явная; 8) неявная; 9) сложная.

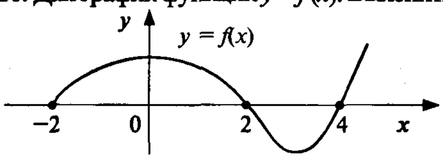
7. Сколько натуральных значений x содержит область определения функции $y=\dfrac{\ln(x^2-9)}{x-4}+\dfrac{\sqrt{9-x}}{2^x-64}$?

8. Найти область значений Y функции $y=\sin x+\sqrt{80}\cos x$. В ответе указать длину отрезка, представляющего Y.

9. Найти (в градусах) основной (наименьший) период функции

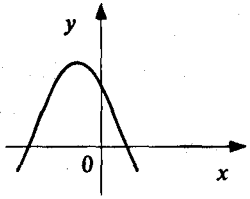
$$y=7\sin 5x.$$

10. Дан график функции $y=f(x)$. Выяснить, сколько различных действительных корней имеет уравнение



$$f(4x^2+3)=0.$$

11. Выяснить, каким условием удовлетворяют a, b, c, если график функции $y = a(x + b)^2 + c$ имеет вид:



1) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$;
2) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$;
3) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$;
4) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$;
5) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$.

12. Затраты на производство продукции y (тыс. руб.) выражаются уравнением $y = 100 + 10x$, где x — количество месяцев. Доход от реализации продукции выражается уравнением $y = 50 + 15x$. Начиная с какого месяца производство будет рентабельным?

Глава 6

Пределы и непрерывность

Справочный материал

1. Если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие определенное число a_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* $\{a_n\}$.

2. Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий от ε, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = A\right).$$

3. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется также число $S > 0$, зависящее от ε, что для всех x таких, что $|x| > S$, будет верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ $\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = A\right)$.

4. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = A\right).$$

5. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* величиной при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$), если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0\right)$.

6. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* величиной при $x \to x_0$, если для любого $M > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, зависящее от M, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ будет верно неравенство $|f(x)| > M$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty\right)$.

7. ***Свойства бесконечно малых.*** Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые величины при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$), то будут бесконечно малыми величины: $\alpha(x) \pm \beta(x)$; $c \cdot \alpha(x)$, c — постоянная; $f(x) \cdot \alpha(x)$ ($f(x)$ — ограниченная функция); $\alpha(x) \cdot \beta(x)$; $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}\left(\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) \neq 0\right)$.

*8. **Свойства бесконечно больших***. Если $f(x)$ — бесконечно большая величина при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$), то будут бесконечно большими величинами: $f(x) \cdot \varphi(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) \neq 0\right)$; $f(x) \pm \varphi(x)$ ($\varphi(x)$ — ограниченная функция); $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ($\varphi(x)$ имеет предел).

9. Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$), то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой, и обратно, если $f(x)$ бесконечно большая функция при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой величиной.

*10. **Сравнение порядков бесконечно малых***. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые величины при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) и $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$,

то при $k = 0$ бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой *более высокого порядка* малости, чем $\beta(x)$; при $0 < k < \infty$ — *одного порядка* малости; при $k = \infty$ — *более низкого порядка* малости, чем $\beta(x)$.

Если $k = 1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными***: $\alpha(x) \backsim \beta(x)$.

11. Примеры ***эквивалентных бесконечно малых*** величин при $x \to 0$: $\sin x \backsim x$; $e^x - 1 \backsim x$; $\ln(1 + x) \backsim x$; $(1 + x)^m \backsim 1 + mx$; $\arcsin x \backsim x$; $\operatorname{arctg} x \backsim x$; $1 - \cos x \backsim x^2/2$.

12. Предел отношения двух бесконечно малых величин не изменится, если эти бесконечно малые заменить им эквивалентными.

13. Теоремы о пределах:

1) $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} C = C$ (C – постоянная).

2) Если $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) = B$, то:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\big(f(x)+\varphi(x)\big)=A\pm B;\quad \lim_{x\to x_0(\infty)}\big(f(x)\cdot\varphi(x)\big)=A\cdot B;\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}\,(B\neq 0).$$

14. Если $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(\varphi(x)\big)=A$.

15. Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (6.1)$$

16. Второй замечательный предел (число e):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \qquad (6.2)$$

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e. \qquad (6.3)$$

6.1. Определение предела. Простейшие пределы

6.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$.

Р е ш е н и е. Пусть $\varepsilon = 0{,}3$, тогда неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ в определении (п. 4) будет иметь вид $|(3x-2)-4|<0{,}3$, или $|3x-6|<0{,}3$, откуда $-0{,}3<3(x-2)<0{,}3$, т.е. $-0{,}1<x-2<0{,}1$ и $|x-2|<0{,}1$. Аналогично при $\varepsilon = 0{,}09$ неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ будет выполнено при $|x-2|<0{,}03$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ оно будет выполняться при $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, что для всех $x\neq 2$ и удовлетворяющих условию $|x-2|<\delta$ верно неравенство $|f(x)-4|<\varepsilon$, где $f(x)=3x-2$; а это и означает, что $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$. ∎

6.2. Доказать, что последовательность $1;\ \dfrac{5}{7};\ \dfrac{7}{11};\ \dots;\ \dfrac{2n+1}{4n-1};\ \dots$ имеет предел, равный $\dfrac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Неравенство $|a_n - A|<\varepsilon$ в определении (п. 2) будет иметь вид: $\left|\dfrac{2n+1}{4n-1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$, или $\left|\dfrac{4n+2-4n+1}{2(4n-1)}\right|<\varepsilon$, откуда $\left|\dfrac{3}{2(4n-1)}\right|<\varepsilon$.

Учитывая, что $n \in N$, т.е. $\frac{3}{2(4n-1)} > 0$, имеем $\frac{3}{2(4n-1)} < \varepsilon$, откуда $4n-1 > \frac{3}{2\varepsilon}$ и $n > \frac{3}{8\varepsilon} + \frac{1}{4}$. Пусть $\varepsilon = 0{,}03$, тогда $n > 12{,}75$ ($N = 13$), или $\varepsilon = 0{,}006$, тогда $n > 250{,}25$ ($N = 251$). То есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$, начиная с которого будет выполнено неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$; это означает, что искомая последовательность имеет предел, равный $\frac{1}{2}$. ►

6.3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+5}{2x} = \frac{3}{2}$.

Р е ш е н и е. Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ в определении (п. 3) будет иметь вид: $\left|\frac{3x+5}{2x} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$, или $\left|\frac{3x+5-3x}{2x}\right| < \varepsilon$, откуда $\left|\frac{5}{2x}\right| < \varepsilon$ и $\frac{1}{|x|} < \frac{2\varepsilon}{5}$, т.е. $|x| > \frac{5}{2\varepsilon}$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $S = \frac{5}{2\varepsilon} > 0$, что для всех x, таких, что $|x| > S$, будет верным неравенство $\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$, где $f(x) = \frac{3x+5}{2x}$; это и означает, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{3}{2}$. ►

Для того чтобы найти предел элементарной функции, когда аргумент стремится к значению, принадлежащему области определения этой функции, нужно в выражение функции вместо аргумента подставить его предельное значение[1].

6.4. Найти $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+7}{2}$.

Р е ш е н и е. Подставляем вместо x в выражение под знаком предела 3, получим $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+7}{2} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{3^2+7}{2} = \lim\limits_{x\to 3} 8 = 8$. ►

6.5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x^3}$.

Р е ш е н и е. Знаменатель дроби x^3 при $x \to \infty$ является бесконечно большой величиной, по теореме (п. 9) $\frac{1}{x^3}$ при $x \to \infty$ является

[1] Используя тем самым определение непрерывности функции в точке (см. § 6.5).

бесконечно малой величиной, следовательно, по определению (п. 5) искомый предел равен нулю. ▶

6.6. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2}{x-4}$.

Р е ш е н и е. Знаменатель дроби $(x-4)$ при $x\to 4$ является бесконечно малой величиной, тогда $\dfrac{1}{x-4}$ по теореме (п. 9) — бесконечно большая величина; числитель дроби $2x^2$ является функцией, предел которой отличен от нуля $\left(\lim\limits_{x\to 4}2x^2=32\right)$. По свойству (п. 9) функция $\dfrac{2x^2}{x-4}$ является бесконечно большой величиной, т.е. искомый предел равен ∞.

Доказать, что:

6.7. $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$. **6.8.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$. **6.9.** $\lim\limits_{x\to 8}(\log_2 x)=3$.

6.10. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x}=2$. **6.11.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x}=3$.

6.2. Раскрытие неопределенностей различных типов

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной (см. пример 6.4) может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют *неопределенностями*; к ним относятся неопределенности видов

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right],\quad \left[\frac{0}{0}\right],\quad [0\cdot\infty],\quad [\infty-\infty],\quad \left[1^\infty\right],\quad \left[\infty^0\right],\quad \left[0^0\right].$$

Устранить неопределенность удается часто с помощью алгебраических преобразований.

6.12. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4-2x^2-10x\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Вынесем за скобку x в наибольшей степени: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4\left(1-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{10}{x^3}\right)\right)$. x^4 является бесконечно большой величиной при $x\to\infty$. По теоремам о пределах (п. 13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2}-\frac{10}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10}{x^3}=1-0-0=1$, так как $\frac{2}{x^2}$ и $\frac{10}{x^3}$ при $x\to\infty$ являются бесконечно малыми величинами, а предел постоянной равен самой постоянной (единице). По свойству бесконечно больших (п. 8) x^4 $(1$ — $\frac{2}{x^2}$ – $\frac{10}{x^3})$ является бесконечно большой величиной, т.е. искомый предел равен ∞.▶

Ответ данной задачи и приведенные в решении выкладки будем использовать при решении следующих примеров как заранее известные факты. Рассмотрим несколько типов примеров, классифицируя их по виду неопределенности и предельному значению x.

1-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ в общем случае – сложные степенные или показательные функции. В случае степенных функций необходимо выносить за скобку в числителе и знаменателе дроби x с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби; в случае показательных функций за скобку выносится наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

6.13. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x-2x^4}{4x^4+3x^2+1}$.

Р е ш е н и е. $A=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x-2x^4}{4x^4+3x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Вынося за скобку и в числителе и в знаменателе x в наибольшей степени, получим

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(\frac{7}{x^3}-2\right)}{x^4\left(4+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x^3}-2}{4+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\frac{0-2}{4+0+0}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2},$$

так как $\frac{7}{x^3}$, $\frac{3}{x^2}$, $\frac{1}{x^4}$, — величины бесконечно малые при $x\to\infty$.▶

6.14. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3x^2}{5x^3+9}$.

Р е ш е н и е. $A=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3x^2}{5x^3+9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Наибольшая степень среди всех слагаемых — третья; вынося за скобки x^3, получим

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}\right)}{x^3\left(5+\frac{9}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}}{5+\frac{9}{x^3}}=\frac{0-0}{5+0}=0,$$ ибо $\frac{2}{x^2}$, $\frac{3}{x}$, $\frac{9}{x^3}$ — бесконечно малые величины при $x\to\infty$.▶

6.15. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4-3x}-3x^2}{\sqrt[3]{27x^6+2}+2x-5}$.

Р е ш е н и е. $A=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4-3x}-3x^2}{\sqrt[3]{27x^6+2}+2x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Чтобы выяснить, какова наибольшая степень среди слагаемых дроби, следует сначала вынести x с наибольшим показателем степени в выражениях под знаком радикала:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4\left(1-\frac{3}{x^3}\right)}-3x^2}{\sqrt[3]{x^6\left(27+\frac{2}{x^6}\right)}+2x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{1-\frac{3}{x^3}}-3x^2}{x^2\sqrt[3]{27-\frac{2}{x^6}}+2x-5}.$$

Наибольшая степень вторая; вынося за скобку x^2, получим

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{1-\frac{3}{x^3}}-3\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{27-\frac{2}{x^6}}+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x^3}}-3}{\sqrt[3]{27+\frac{2}{x^6}}+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-0}-3}{\sqrt[3]{27+0}+0-0}=-\frac{2}{3},$$

так как $\frac{3}{x^3}$, $\frac{2}{x^6}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{5}{x^2}$ — бесконечно малые величины при $x\to\infty$.▶

6.16. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{4x+1}$.

Решение. $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{4x+1}$. Решая аналогично примеру **6.15**,

получим $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x}{4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x}{4x+1}$, ибо $\sqrt{x^2}=|x|$.

Необходимо рассмотреть два случая:

1) $x\ge 0$, тогда $|x|=x$ и

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x}{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}{x\left(4+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}{4+\dfrac{1}{x}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};$$

2) $x<0$, тогда $|x|=-x$ и

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x}{4x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1\right)}{x\left(4+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1\right)}{4+\dfrac{1}{x}}=0.$$

Итак, искомый предел: $A=\dfrac{1}{2}$ при $x\ge 0$ и $A=0$ при $x<0$. ▶

6.17. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+2^x}{1-3^x}$.

Решение. При $x\to+\infty$ показательная функция $y=a^x$, при $a>1$ стремится к $+\infty$. Быстрее будет возрастать та функция, у которой основание больше, поэтому в нашем случае выносим за скобки 3^x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(1+\dfrac{2^x}{3^x}\right)}{3^x\left(\dfrac{1}{3^x}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-1}=\frac{1+0}{0-1}=-1,$$

так как при $a=\dfrac{2}{3}<1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=0$ и при $a=\dfrac{1}{3}<1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$. ▶

Найти пределы:

6.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3-1}{3x^2-2x^4+x}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+2x}{x^3-x^4}$.

6.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x^3-15}{x^2-16}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{64x^3+1}+2}$.

6.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-9}-2x}{2-\sqrt[3]{x^3+5}}$.

6.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^8+2x-10}-3x^2}{5x^2-1-\sqrt[3]{27x^6+x^5-15x}}$.

6.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^5+(2x+2)^5+(2x+3)^5+\ldots+(2x+100)^5}{10x^5+100}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x+2}{3^{x+1}-1}$.

6.26. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4^x+3^{x+1}}{4^{x+1}+3^x}$.

6.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{20}}{3x^{20}+100}$.

6.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{4^n}}$.

6.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+..+(2n-1)}{5n^2}$.

6.30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{2x+4}\right)^{7x}$.

6.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x^2+5}{10x^2-1}\right)^{\frac{x}{2}}$.

6.32. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{4x-2}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{16x^2-x}}$.

6.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+2x^7}{2x^5-8x^7}$.

6.34. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2}+2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$.

6.35. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}$.

6.36. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

6.37. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^3+4}\cdot\sqrt[4]{x^2+2x}}{(x+1)^2}$.

6.38. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{5-4x^2-6x^3}$.

6.39. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^8}{x^8-1}$.

6.40. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)\cdot n!}{(n+1)!}$.

6.41. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)n!}{(n+1)!}$. **6.42.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n^2+5)(n-1)!}{(n+1)!}$.

6.43. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x+2}{3+2x^3+5x^5}$. **6.44.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^4-3x^2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}+7x^3-2x^4}$.

2-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. В этом случае необходимо разложить на множители и числитель, и знаменатель дроби или домножить и числитель, и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. Неопределенность устраняется после сокращения дроби.

6.45. Найти $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители: числитель — по формуле сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, а знаменатель — по формуле разложения квадратного трехчлена на множители при $=b^2-4ac\geq 0$:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\text{ где } x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Получим

$$A=\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x^2+7x+12}=\lim_{x\to-3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+4)}=\lim_{x\to-3}\frac{x-3}{x+4}.$$

После сокращения дроби следует подставить предельное значение x в сокращенную дробь. Получим $A=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{-3-3}{-3+4}=\dfrac{-6}{1}=-6$. ▶

6.46. Найти $\lim\limits_{x\to64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Р е ш е н и е. *1-й способ.* Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Дополним числитель до разности квадратов $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, а знаменатель до разности кубов $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$. Получим

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{x\to 64}\frac{(\sqrt{x}-8)(\sqrt{x}+8)\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)}{(\sqrt[3]{x}-4)(\sqrt{x}+8)\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 64}\frac{(x-64)\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)}{(x-64)(\sqrt{x}+8)}=\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{\sqrt{x}+8}=$$

$$=\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{64^2}+4\sqrt[3]{64}+16}{\sqrt{64}+8}=\frac{16+16+16}{8+8}=3.$$

2-й способ. Сделаем замену переменной: $\sqrt[6]{x}=t$, тогда $\sqrt[3]{x}=t^2$, а $\sqrt{x}=t^3$, при $x\to 64$ $t\to\sqrt[6]{64}$, т.е. $t\to 2$. Теперь

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)\left(t^2+2t+4\right)}{(t-2)(t+2)}=$$

$$=\lim_{t\to 2}\frac{t^2+2t+4}{t+2}=\lim_{t\to 2}\frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+2}=\frac{12}{4}=3. \blacktriangleright$$

Найти пределы:

6.47. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$. **6.48.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+6x+8}$.

6.49. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$. **6.50.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$.

6.51. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$. **6.52.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^2-9}$.

6.53. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$. **6.54.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{x^2-4}$.

6.55. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3-7x+6}$. **6.56.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$.

6.57. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}+1}$. **6.58.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

6.59. $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{x^2-1}{3x-3}\right)^{\frac{1}{x-1}}$. **6.60.** $\lim\limits_{x\to 2+0}\left(\dfrac{x^3-8}{4x-8}\right)^{\frac{1}{2-x}}$.

6.61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{3x}$.

6.62. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$.

6.63. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2-x)\cdot 2^{x-2}}{x^2-3x+2}$.

6.64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+x}{\sqrt{x+1}-1}$.

6.65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2+...+x^{10}}{\sqrt{x+4}-2}$.

6.66. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^8}{x^8-1}$.

6.67. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2+3x-2}$.

3-й тип. Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $[\infty-\infty]$. Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность устраняется или приводится ко 2-му типу после приведения дробей к общему знаменателю. Если упомянутая функция представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений, то неопределенность или устраняется, или приводится к 1-му типу путем домножения и деления функции на одно и то же (например, сопряженное) выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

6.68. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2x+8}{x^3-8}\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Приведем дроби к общему знаменателю:

$$A=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2x+8}{x^3-8}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4-2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Имеем предел 2-го типа, необходимо разложить на множители числитель дроби. Получим

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2+2x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{2+2}{2^2+2\cdot 2+4}=\frac{1}{3}.$$

6.69. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-5}-x\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Домножим и разделим функцию, стоящую под знаком предела на сопряженное выражение, приводящее к разности квадратов:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-5}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x-5}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x-5}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x-5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-5-x^2}{\sqrt{x^2-2x-5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-5}{\sqrt{x^2-2x-5}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Имеем предел 1-го типа. Решая далее аналогично примеру **6.16**, найдем

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-5}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-5}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+x}.$$

При $x\to+\infty$ $|x|=x$ по определению модуля; поэтому

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-5}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{-2-0}{\sqrt{1-0-0}+1}=-1,$$

так как при $x\to+\infty$ $\frac{5}{x}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{5}{x^2}$ — бесконечно малые величины.

Найти пределы:

6.70. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$.

6.71. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{2x^2-x}-\frac{1}{x^2-x}\right)$.

6.72. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$.

6.73. $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$.

6.74. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{3}{x^3-1}\right)$.

6.75. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{2x^2-x}-x\right)$.

6.76. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4}{x^2+3}-3x^2\right)$.

6.77. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3}{5x-1}-7x\right)$.

6.78. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^4}{x^2+x+2}-4x^2\right)$.

6.79. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\frac{3x^3}{3x^2+7}\right)$.

6.80. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2-2}-\dfrac{x^4}{x^2+2}\right)$.

6.81. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}\right)$.

6.82. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

6.83. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$.

6.84. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+10}-\sqrt{x+20}\right)$.

6.85. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+5}\right)$.

6.86. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x}-\sqrt{9x^2-x}\right)$.

6.87. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x}\right)$.

6.88. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2-2x}-\sqrt[3]{x^2+3x}\right)$.

6.89. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^4-3x^3+1}-\sqrt[3]{x^4+2x^3-x}\right)$.

6.90. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^4+3x^2}-\sqrt[3]{8x^4+2x^2}\right)$.

6.91. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt[4]{x^2+6x}-\sqrt[4]{x^2-x}\right)\sqrt{x}\right)$.

6.92. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x-\sqrt{x}}-\sqrt{16x-3\sqrt{x}}\right)$.

6.93. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+2x}\right)$.

6.94. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x}-\sqrt{2x^2-2x}\right)$.

6.95. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$.

6.96. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+3x^2+2}-2x\right)$.

6.3. Замечательные пределы

К пределам ***4-го типа*** отнесем примеры с неопределенностью вида $\left[1^{\infty}\right]$. В этом случае выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой степенно-показательную функцию, в основании которой необходимо выделить целую **часть** дроби (которая должна быть равна 1). Неопределенность устраняется при помощи выделения «второго замечательного предела» **(6.2)** или **(6.3)**.

6.97. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-0}{2+0}=1.$$

Выделим целую часть дроби

$$\frac{2x^2-3}{2x^2+1}=\frac{2x^2+1-4}{2x^2+1}=\frac{2x^2+1}{2x^2+1}+\frac{-4}{2x^2+1}=1+\frac{-4}{2x^2+1}.$$

$\alpha(x)=-\dfrac{4}{2x^2+1}$ является бесконечно малой величиной при $x\to\infty$.

Домножим показатель степени на $\left(\alpha(x)\cdot\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)$, это действие не нарушает знака равенства:

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{-4}\cdot\frac{-4}{2x^2+1}\cdot(-3x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{-4}}\right)^{\frac{12x^2}{2x^2+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2+1}},$$

ибо $\lim\limits_{\alpha(x)\to0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$. Найдем $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2}{2x^2+1}$. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, предел 1-го типа. Вынесем за скобки x^2, так как вторая степень наибольшая:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{12}{2}=6,$$

так как $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=0$. Таким образом, искомый предел равен $e^a=e^6$. ▶

6.98. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)^{\frac{3}{x}}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$, выделим целую часть дроби $\frac{x-1}{2x-1}=\frac{2x-1-x}{2x-1}=\frac{2x-1}{2x-1}-\frac{x}{2x-1}=1+\frac{-x}{2x-1}$.

$\alpha(x)=\frac{-x}{2x-1}$ является бесконечно малой при $x\to\infty$. Сделаем преобразования, аналогичные примеру **6.97**:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-x}\cdot\frac{-x}{2x-1}\cdot\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-x}}\right)^{\frac{-3x}{x(2x-1)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3x}{x(2x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3}{2x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3}{0-1}}=e^3,$$

ибо $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-x}}=e.$ ▶

6.99. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+3)-\ln 3}{5x}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, преобразуем ее в неопределенность вида $[1^\infty]$, пользуясь свойствами логарифмов:

$\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$ и $n\log_a x=\log_a x^n$. Получим

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+3)-\ln 3}{5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{5x}\cdot\ln\frac{x+3}{3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{x+3}{3}\right)^{\frac{1}{5x}}=\lim_{x\to 0}\cdot\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{5x}}.$$

Учитывая непрерывность логарифмической функции, символы lim и ln можно переставить (см. (**6.6**)), получим

$$A=\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{5x}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{5x}\right)}=\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{15}}=\ln e^{\frac{1}{15}}=\frac{1}{15},$$ так

как по формуле (**6.3**) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}=e.$ ▶

Найти пределы:

6.100. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{x}$.

6.101. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+5}\right)^{7x}$.

6.102. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+2}{4x^2-1}\right)^{5x^2}$.

6.103. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-4}\right)^{3x}$.

6.104. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x+5}\right)^{-2x}$.

6.105. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}$.

6.106. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3-3x^2+x+1}{2x^3-3x^2-2x+3}\right)^{5x^2}$.

6.107. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x^{10}-3}{7x^{10}+2}\right)^{-2x^{10}}$.

6.108. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+3x}{1+x}\right)^{\frac{5}{x}}$.

6.109. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-2x^2}{3+3x^2}\right)^{-\frac{4}{x}}$.

6.110. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x^2-1}{3x^2-1}\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

6.111. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x^2+4x-3}{5x^2+x-3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

6.112. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3-x)-\ln 3}{5x}$.

6.113. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln 2-\ln(2-x)}{10x}$.

6.114. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln x-\ln 4}{2x-8}$.

6.115. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5-x^2)-\ln 5}{2x^2}$.

6.116 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-x^2\right)}{x}$.

6.117. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x^2}$.

6.118. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{9x^2+1}{9x^2+3}\right)^{7x^3}$.

6.119. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+7}{2x^3+2}\right)^{6x^4}$.

6.120. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{2x}$.

5-й тип. К этому типу отнесем функции, сводящиеся к первому замечательному пределу **(6.1)**: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

6.121. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Р е ш е н и е. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$.

Первый сомножитель представляет собой первый замечательный предел и равен 1, второй сомножитель представляет предел, равный $\frac{1}{\cos 0}=1$. Таким образом, искомый предел равен $1\cdot 1=1$. ▶

6.122. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Сделаем замену переменной: $\arcsin x=y$; тогда $x=\sin y$; при $x\to 0$ $y\to 0$; получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y=0}\frac{y}{\sin y}.$$

Имеем первый замечательный предел, следовательно искомый предел равен 1, что и требовалось доказать. ▶

6.123. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Р е ш е н и е. $A=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\left[1^\infty\right]$. Сделаем преобразования, приводящие ко второму замечательному пределу:

$$A=\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot(\cos x-1)\cdot\frac{1}{x^2}}.$$

Выражение в квадратных скобках представляет второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}=e$, следовательно, $A=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$.

Найдем предел показателя степени:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=-\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $A=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$. ▶

Найти пределы:

6.124. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$. **6.125.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{3x^2}$. **6.126.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^3 4x}{10x^3}$.

6.127. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x^2}$. **6.128.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{2x}$. **6.129.** $\lim\limits_{x\to 0}(3x\cdot \operatorname{ctg} 2x)$.

6.130. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^3}{\sin^3 2x}$. **6.131.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 8x}{7x}$. **6.132.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\arcsin 9x}$.

6.133. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2x}$. **6.134.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$. **6.135.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 10x}$.

6.136. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}$. **6.137.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{\sin x^3}$. **6.138.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^3 2x}{\arcsin^3 3x}$.

6.139. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 8x}{4x}$. **6.140.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 7x}{\sin 5x}$.

6.141. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} 4x}{\arcsin x}$. **6.142.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{arctg} x^3}$.

6.143. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$. **6.144.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}$.

6.4. Применение эквивалентных бесконечно малых к вычислению пределов

Эффективным средством вычисления пределов является применение эквивалентных бесконечных малых. Данный способ основан на том, что предел отношения двух бесконечно малых величин не изменится, если эти бесконечно малые заменить им эквивалентными. Примеры эквивалентных бесконечно малых приведены в справочном материале (п. 11).

6.145. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Так как $3x\to 0$ при $x\to 0$, то $(e^{3x}-1)\to 0$, т.е. является бесконечно малой величиной. Заменяя $e^{3x}-1$ на эквивалентную ей бесконечно малую величину $3x$ (см. п. 11), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}=1{,}5. \blacktriangleright$$

6.146. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x^2}-1}{6x^2}$.

Р е ш е н и е. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x^2}-1}{6x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\ln 2^{x^2}}-1}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2\ln 2}-1}{6x^2}$.

Показатель степени $(x^2\ln 2)\to 0$ при $x\to 0$, следовательно, $(e^{x^2\ln 2}-1)\to 0$, т.е. является бесконечно малой величиной, которую можно заменить на эквивалентную $x^2\ln 2$ (см. п. 11). Теперь $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln 2}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln 2}{6}=\dfrac{\ln 2}{6}$. ▶

6.147. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Заменяя $\sin 3x$ эквивалентной ей бесконечно малой $3x$ при $x\to 0$ (п. 11), получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3x)^2}{5x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9}{5}=1{,}8$. ▶

Не рассмотренные в этой главе неопределенности видов $[0\cdot\infty]$, $[0^0]$ и $[\infty^0]$ могут быть устранены при помощи правила Лопиталя, которое будет рассмотрено в главе 8.

Найти пределы с помощью эквивалентных бесконечно малых:

6.148. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{6x}}{4x}$. **6.149.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-1}{5x^2}$. **6.150.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{5x^2}}{3x}$.

6.151. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-1}{x^2}$. **6.152.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[5x(\ln(x+6)-\ln x)\right]$.

6.153. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{125^x-1}{3x}$. **6.154.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)\right)$.

6.155. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{7x}$. **6.156.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{2x^2}$.

6.157. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^{10}-1}{6x}$. **6.158.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^6-64}{3x}$.

6.159. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{10x}$. **6.160.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{8x}$.

Найти значения параметра a, удовлетворяющих равенству:

6.161. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+3x^2-1}{4-5x+2x^3}=-3$. **6.162.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{ax}=e^{27}$.

6.163. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{4x}=e^{-8}$. **6.164.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 ax}{2x^2}=8$.

6.165. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{4x}=\dfrac{1}{2}$. **6.166.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{4x}=2$.

6.167. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{ax^2}=4$.

6.5. Непрерывность функции и точки разрыва

Справочный материал

1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она удовлетворяет следующим условиям: *1*) определена в точке x_0; *2*) имеет конечный предел при $x\to x_0$; *3*) этот предел равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (6.4)$$

(первое определение).

2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \qquad (6.5)$$

(второе определение).

3. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке, то их сумма, произведение и частное (при условии, что знаменатель отличен от нуля) являются функциями, непрерывными в этой точке.

4. Если функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, а функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Утверждение может быть записано в виде

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]. \qquad (6.6)$$

5. Функция называется *непрерывной* на некотором промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

6. Если не выполнено определение непрерывности **(6.4)** или **(6.5)**, то функция в точке x_0 терпит разрыв, причем:

а) если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ бесконечен, то x_0 – точка *разрыва второго рода*;

б) если оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ конечны, но не равны между собой, то x_0 — точка *неустранимого разрыва первого рода*;

в) если оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ конечны, равны между собой, но не равны $f(x_0)$, то x_0 — точка *устранимого разрыва первого рода.*

6.168. Исследовать на непрерывность функции $y=f(x)$ в точке $x=1$. В случае разрыва установить его характер:

а) $y(x)=\dfrac{(x-1)^3}{x-1}$; *б*) $y(x)=\dfrac{x}{x-1}$; *в*) $y(x)=x-1$; *г*) $y(x)=\begin{cases} x-1, & x\ge 1, \\ x+1, & x<1. \end{cases}$

Решение:

а) При $x=1$ функция не определена, следовательно, функция в точке $x=1$ терпит разрыв (рис. **6.1**): $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=\lim\limits_{x\to 1}(1-1)^2=0$,

т.е. конечный предел существует; следовательно, $x=1$ — точка устранимого разрыва первого рода. (Доопределив функцию в точке $x=1$, т.е. положив $f(1)=0$, получим, что новая функция

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)^3}{x-1}, & \text{при } x\ne 1, \\ 0, & \text{при } x=1 \end{cases}$$

будет уже непрерывна в точке $x=1$.)

б) При $x=1$ функция не определена, следовательно, функция в точке $x=1$ терпит разрыв (рис. **6.2**): $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x}{x-1}=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{x-1}=-\infty$.

Так как односторонние пределы (достаточно было бы одного) бесконечны, то $x=1$ — точка разрыва функции второго рода.

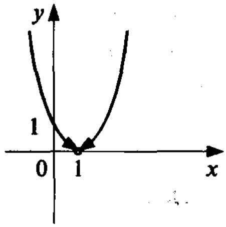


Рис. 6.1

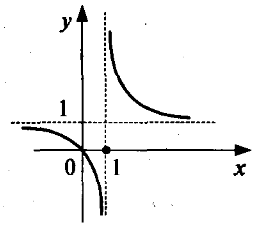


Рис. 6.2

в) При $x = 1$ функция определена, $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0$, $\lim\limits_{x\to 1-0}(x-1)=0$, $y(1) = 1 - 1 = 0$, т.е. $\lim\limits_{x\to 1-0} y(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} y(x)=y(1)=0$, следовательно, функция в точке $x = 1$ непрерывна (рис. 6.3).

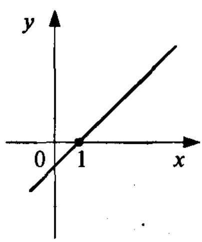


Рис. 6.3

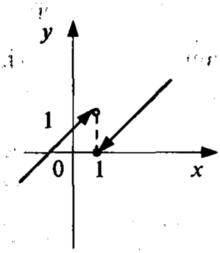


Рис. 6.4

г) При $x = 1$ функция определена, $y(1) = 0$,

$$\lim_{x\to 1-0} y(x)=\lim_{x\to 1-0}(x+1)=2\,,\quad \lim_{x\to 1+0} y(x)=\lim_{x\to 1+0}(x-1)=0\,,$$

имеем $\lim\limits_{x\to 1-0} y(x)\neq \lim\limits_{x\to 1+0} y(x)$, таким образом, в точке $x = 1$ функция терпит неустранимый разрыв первого рода (рис. 6.4).

6.169. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ и указать характер разрыва.

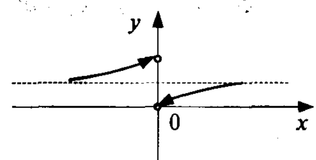


Рис. 6.5

Р е ш е н и е. При $x = 0$ функция не определена. Для установления характера разрыва в точке $x = 0$ найдем односторонние пределы при $x \to 0-0$ (слева) и при $x\to 0+0$ (справа): $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1+0}=1$ (так как при

$x \to 0-0$ показатель степени $\frac{1}{x} \to -\infty$ и $e^{\frac{1}{x}} \to 0$); $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$ (так как при $x \to 0+0$ (справа) показатель степени $\frac{1}{x} \to +\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$, а дробь $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \to 0$).

Таким образом, в точке $x = 0$ функция имеет неустранимый разрыв 1-го рода (рис. **6.5**). ▶

Исследовать на непрерывность, найти точки разрыва и указать характер разрыва:

6.170. $y(x) = \begin{cases} x-2, & \text{при } x<0, \\ 2, & \text{при } x=0, \\ x^2-2, & \text{при } x>0. \end{cases}$

6.171. $y(x) = \begin{cases} x-2, & \text{при } x<0, \\ -2, & \text{при } x=0, \\ -x-2, & \text{при } x>0. \end{cases}$ **6.172.** $y(x) = \frac{x-2}{x^2+2}$.

6.173. $y(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$. **6.174.** $y(x) = \begin{cases} x-2, & \text{при } x<2, \\ x+2, & \text{при } x \ge 2. \end{cases}$

Задачи для повторения

6.175. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x^5-2x^3-1}{4x^4-3x^5}$. **6.176.** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-3x^4-x^6}{10x^5+7}$.

6.177. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}+4x}{\sqrt[3]{2x^2-1}-2x}$. **6.178.** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt[3]{8x^3+5x^2}+2\sqrt[5]{x}}$.

6.179. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x-1}{3x+2}\right)^{5x}$. **6.180.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{7x+2}{8x-1}\right)^{\frac{6}{x}}$.

6.181. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4^x+5^x}{4^{x+1}-5^{x+1}}$. **6.182.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2n+3n\ \ldots\ +n^2}{4n^3+3n^2+2n+1}$.

6.183. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{125}+\ \ldots\ +\frac{1}{5^n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\ \ldots\ +\frac{1}{2^n}}$. **6.184.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3(n+2)!}{(2n-5)\cdot(4n+1)\cdot n!}$.

6.185. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$.

6.186. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-\sqrt{2x+3}}$.

6.187. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{2x+11}-3}{x^2-64}$.

6.188. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{2x^3+2}{x+2-x^2}\right)^{\frac{3}{x+1}}$.

6.189. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{5}}\right)^{\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}}$.

6.190. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{3x^2+11x+10}\right)$.

6.191. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{x^4-x}\right)$.

6.192. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x}{2\sqrt{x}-1}-3\sqrt{x}\right)$.

6.193. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^4+5}{2x^4-1}\right)^{9x^4}$.

6.194. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x^3+3}{x^3+3}\right)^{\frac{6}{x^3}}$.

6.195. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2\ln(x+1)-\ln 9}{3x-6}$.

6.196. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-1}{4x}$.

6.197. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{\sin^2 4x}$.

6.198. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{2}{\sin^2 x}}$.

6.199. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{arctg} x+2x}{\arcsin 5x}$.

6.200. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 4x}{x}$.

Найти значение параметра a, удовлетворяющих равенствам:

6.201. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-x+1}{4+2x-ax^2}=2$.

6.202. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{a}{x}}=\sqrt{e}$.

6.203. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{ax^2}=\dfrac{1}{2}$.

6.204. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{3x}=2$.

6.205. Исследовать функцию

$$y(x)=\begin{cases} x+3, & \text{при} \quad x<-1;\\ 2, & \text{при} \quad -1<x\le 1;\\ -\dfrac{3}{x-4}, & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

на непрерывность, найти точки разрыва и указать характер разрыва.

Контрольные задания по главе 6 «Пределы и непрерывность»

№	*Вариант 6.1*	*Вариант 6.2*	*Вариант 6.3*
	Найти пределы:		
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x^3}{5x^3+7x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x^3+1}{3x^2+x^4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-\sqrt{x}}{1+8x^3}$
2	$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-9x+14}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$
3	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+5}\right)$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x-1}\right)^{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+5}\right)^{-3x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{3x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\frac{x}{2}}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}(8x\cdot\operatorname{ctg}x)$
6	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\pi-2x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x)-\ln 2}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$
	Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функций (указать их характер):		
7	*а)* $y=\begin{cases}x-1, & \text{при } x\ge 0,\\ -x-1, & \text{при } x<0.\end{cases}$ *б)* $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x+1}}}$	*а)* $y=\begin{cases}2x-1, & \text{при } x\ge 0,\\ -2x-1, & \text{при } x<0.\end{cases}$ *б)* $y=\dfrac{1}{4+e^{\frac{1}{x-1}}}$	*а)* $y=\begin{cases}3x+1, & \text{при } x\ge 0,\\ -3x+1, & \text{при } x<0.\end{cases}$ *б)* $y=\dfrac{4}{3+5^{\frac{3}{x-2}}}$

Тест 6

1. Выяснить, чему равен $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$:

1) ∞; 2) -1; 3) не существует; 4) 1.

2. Выяснить, какие из перечисленных функций бесконечно малые при $x\to 0$:

1) $y=\dfrac{1}{x}$; 2) $y=x^{10}$; 3) $y=\sin\dfrac{x}{3}$; 4) $y=\cos 2x$; 5) $y=\dfrac{1}{\cos 3x}$.

3. Выяснить, какие из перечисленных функций бесконечно большие при $x\to\infty$:

1) $y=\sqrt[9]{x}$; 2) $y=\operatorname{tg}x$; 3) $y=\log_{0,5}x$; 4) $y=\dfrac{1}{x^{-2}}$; 5) $y=\operatorname{arctg}x$.

4. Произведение двух бесконечно малых и бесконечно большой величин является:

1) бесконечно малой величиной; 2) бесконечно большой величиной; 3) неопределенностью.

5. Выяснить, какие из перечисленных функций непрерывны в точке $x=0$:

1) $y=\dfrac{1}{x}$; 2) $y=\sqrt{x+1}$; 3) $y=\begin{cases}1, & \text{при } x\le 0,\\ x, & \text{при } x>0.\end{cases}$; 4)

$$y=\begin{cases}-x, & \text{при } x<0,\\ 0, & \text{при } x=0,\\ x, & \text{при } x\ge 0;\end{cases}$$

5) $y=\operatorname{tg}x$.

6. Товарооборот фирмы ежемесячно увеличивается на 1 %. Через сколько месяцев ее товарооборот, сохраняя темпы роста, увеличится в 2,7 раза по сравнению с первоначальным (считать $e\approx 2{,}7$). Ответ округлить до целых.

7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-10}{2x^2+7x+5}$.

8. Найти $a=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2+3}\right)^{x^2}$, в ответе указать $\ln a$.

9. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x\right)$.

10. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-5}\right)^{6x}$.

11. Найти a, если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^2-18}{ax^4-18x^2+3}=\dfrac{1}{2}$.

12. Найти a, если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{8x}=2$.

Раздел III
Дифференциальное исчисление

Глава 7
Производная

7.1. Определение производной

Справочный материал

1. Производной функции $y=f(x)$ называется конечный предел приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (при условии, что этот предел существует):

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (7.1)$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой* в этой точке (или на промежутке X).

2. Если функция $y=f'(x)$ дифференцируема в точке x_0 (или на промежутке X), то она в этой точке непрерывна (или на промежутке X). Если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке.

7.1. Используя определение производной, найти производную функции $f(x)=\cos x$.

Решение. Придавая аргументу x приращение $\Delta x\neq 0$, найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}=$$

$$=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Составим отношение: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$.

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \sin(x+\frac{\Delta x}{2}) = -\sin x$$

(ибо в силу (**6.1**) первый предел равен 1).

Таким образом: $y' = -\sin x$. ▶

7.2. Доказать, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = 0$.

Р е ш е н и е. Функция $y = \sqrt[3]{x}$:

1) определена на всей числовой оси, в том числе и в точке $x = 0$;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$;

3) этот предел равен значению функции в точке $x = 0$, т.е. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{0} = 0$.

Таким образом, согласно определению (**6.4**) непрерывности функции в точке, функция непрерывна при $x = 0$.

Производная функции

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty,$$

т.е. функция не является дифференцируемой при $x = 0$. ▶

Используя определение производной, найти производные функций:

7.3. $f(x) = 3x^2$.

7.4. $f(x) = 3\sin 3x$.

7.5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

7.6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

7.7. $f(x) = \dfrac{1}{3x-1}$.

7.8. $f(x) = \sqrt{2-3x}$.

Доказать, что функции непрерывны и дифференцируемы при $x = x_0$:

7.9. $f(x) = \cos 2x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

7.10. $f(x) = \sqrt{2x+5}, \quad x_0 = 2$.

Доказать, что функции являются непрерывными, но не дифференцируемыми при $x = x_0$:

7.11. $f(x)=|x+2|, \quad x_0=-2.$ **7.12.** $f(x)=\sqrt[3]{(x-3)^2}, \quad x_0=3.$

7.2. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций

Справочный материал

I. Дифференцирование явных функций

Правила дифференцирования:

c — постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференцируемые функции:

$$c' = 0; \quad (7.2)$$

$$x' = 1; \quad (7.3)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (7.4)$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \quad (7.5)$$

$$(cu)' = cu'; \quad (7.6)$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'; \quad (7.7)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v(x) \neq 0; \quad (7.8)$$

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}, \quad v(x) \neq 0. \quad (7.9)$$

Производная сложной функции. Если $y=f(u)$, $u = u(x)$, т.е. $y=f[u(x)]$, где $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то

$$y' = f'(u)\cdot u'. \quad (7.10)$$

Производная обратной функции. Если $y=f(x)$ — дифференцируемая и строго монотонная функция на промежутке X, то функция, обратная к данной $x = \varphi(y)$, также дифференцируема и ее производная определяется соотношением:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad y'_x \neq 0. \quad (7.11)$$

Логарифмическая производная. Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е.

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad (7.12)$$

***Формулы дифференцирования основных элементарных функций*:**

$(x^n)' = n\,x^{n-1};$ **(7.13)** $(\cos x)' = -\sin x$; **(7.20)**

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x > 0)$; **(7.14)** $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; **(7.21)**

$(e^x)' = e^x;$ **(7.15)** $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; **(7.22)**

$(a^x)' = a^x \ln a;$ **(7.16)** $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$; **(7.23)**

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(x > 0)$; **(7.17)** $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$; **(7.24)**

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $(x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$, **(7.18)** $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; **(7.25)**

$(\sin x)' = \cos x$; **(7.19)** $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$. **(7.26)**

II. Дифференцирование неявных функций

Если зависимость между x и y задана в неявной форме уравнением $F\,(x,\ y) = 0$, то для нахождения производной функции y необходимо продифференцировать по x обе части данного уравнения, рассматривая y как функцию от x. Из полученного уравнения первой степени (относительно y') находится y'.

III. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Если функция аргумента x задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$ и $y = \phi(t)$, то

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}. \qquad (7.27)$$

IV. Производные высших порядков

Производной n-го порядка называется производная от производной $(n-1)$-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции:

$$y'' = (y')';\ y''' = (y'')';\ \ldots;\ y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \qquad (7.28)$$

Если функция задана параметрически, то:

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}\ ;\ y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}\ ;\ \ldots;\ y_x^{(n)}=\frac{(y_x^{(n-1)})'_t}{x'_t}. \qquad (7.29)$$

7.13. Найти производные функций:

а) $y=2x^5-5\cdot 2^x+4x-7\ \log_2 x-\ln 2$; *б)* $y=(1+x^2)\cdot \operatorname{arctg} x$;

в) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$; *г)* $y=\log_3(2x^3+1)$.

Решение:

а) Используя правила дифференцирования **(7.2)**, **(7.4)** и **(7.6)** и формулы **(7.13)**, **(7.16)** и **(7.18)**, получим:

$$y'=(2x^5)'-(5\cdot 2^x)'+(4x)'-(7\log_2 x)'-(\ln 2)'=$$
$$=2\cdot(x^5)'-5\cdot(2^x)'+4(x)'-7\cdot(\log_2 x)'-0=$$
$$=10x^4-5\cdot 2^x\ln 2+4-\frac{7}{x\ln 2}.$$

б) Используя правила дифференцирования **(7.5)** и формулу **(7.25)**, получим:

$$y'=(1+x^2)'\cdot \operatorname{arctg} x+(1+x^2)\cdot(\operatorname{arctg} x)'=$$
$$=2x\cdot \operatorname{arctg} x+(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}=2x\cdot \operatorname{arctg} x+1.$$

в) Используя правила дифференцирования **(7.8)** и формулы **(7.19)** и **(7.20)**, получим:

$$y'=\frac{(\sin x+\cos x)'(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}=$$
$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=$$
$$=\frac{-2}{(\sin x+\cos x)^2}.$$

г) Используя правила дифференцирования сложной функции **(7.10)** и формулы **(7.13)** и **(7.18)**, получим:

$$y'=(\log_3(2x^3+1))'=\frac{1}{(2x^3+1)\cdot\ln 3}(2x^3+1)'=\frac{6x^2}{(2x^3+1)\cdot\ln 3}.$$ ▶

7.14. Найти производную x'_y обратной функции, если $y=x^2+e^x\ln x$.

Р е ш е н и е. Находим производную функции y по переменной x: $y' = 2x + e^x \ln x + \frac{e^x}{x} = \frac{2x^2 + e^x(x \ln x + 1)}{x}$. Следовательно, согласно соотношению **(7.11)**, получим: $x'_y = \frac{x}{2x^2 + e^x(x \ln x + 1)}$. ►

7.15. Найти производные функций:

а) $y = x^{x^3}$; *б*) $y = \frac{(3x+2)^4 \sqrt[3]{5x-1}}{(1-2x)^3 \sqrt{1-x^2}}$.

Р е ш е н и е:

а) Имеем показательно-степенную функцию. Используя метод логарифмического дифференцирования **(7.12)**, получим:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (\ln x^{x^3})' = (x^3 \cdot \ln x)' = 3x^2 \cdot \ln x + \frac{x^3}{x} = x^2(3 \ln x + 1).$$

Отсюда имеем:

$$y' = y \cdot (\ln y)' = y \cdot x^2(3 \ln x + 1) = x^{x^3} \cdot x^2(3 \ln x + 1) = x^{x^3+2} \cdot (3 \ln x + 1).$$

б) Здесь заданную функцию также целесообразно предварительно прологарифмировать:

$$\ln y = 4 \ln(3x+2) + \frac{1}{3} \ln(5x-1) - 3 \ln(1-2x) - \frac{1}{2} \ln(1-x^2).$$

Найдем производную: $(\ln y)' = \frac{12}{3x+2} + \frac{5}{3 \cdot (5x-1)} + \frac{6}{1-2x} + \frac{x}{1-x^2}$.

Тогда, согласно формуле **(7.12)**, получим:

$$y' = y \cdot (\ln y)' = \frac{(3x+2)^4 \sqrt[3]{5x-1}}{(1-2x)^3 \sqrt{1-x^2}} \cdot \left(\frac{12}{3x+2} + \frac{5}{3 \cdot (5x-1)} + \frac{6}{1-2x} + \frac{x}{1-x^2} \right).$$ ►

7.16. Найти производную $y'_x = \frac{dy}{dx}$ неявной функции

$$x^2 + 9y^2 = 16.$$

Р е ш е н и е. Так как y является функцией от x, то будем рассматривать y^2 как сложную функцию от x. Продифференцировав обе части данного уравнения по x, имеем: $2x + 18yy' = 0$. Разрешая последнее уравнение относительно y', получим: $y' = -\frac{2x}{18y} = -\frac{x}{9y}$. ►

7.17. Найти производную $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$ функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a\cos^2 t; \\ y = a\sin^2 t. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Используя правила дифференцирования функции, заданной параметрически **(7.27)**, найдем:

$\dfrac{dx}{dt} = (a\cos^2 t)' = 2a\cos t\,(-\sin t)$ и $\dfrac{dy}{dt} = (a\sin^2 t)' = 2a\sin t\cos t$. Отсюда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a\sin t\cos t}{-2a\cos t\sin t} = -1$. ▶

7.18. Найти производную 4-го порядка от функции $y = \sin 2x$.

Р е ш е н и е. Последовательно дифференцируя функцию, получим: $y' = 2\cos 2x$; $y'' = -4\sin 2x$; $y''' = -8\cos 2x$; $y^{(4)} = 16\cos 2x$. ▶

7.19. Найти производную второго порядка от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = a\sin t; \\ y = b\cos t. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Последовательно дифференцируя функцию, получим:

$$y'_x = \frac{(b\cos t)'_t}{(a\sin t)'_t} = -\frac{b\sin t}{a\cos t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t;$$

$$y''_x = \frac{\left(-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t\right)'_t}{(a\sin t)'_t} = \frac{-\frac{b}{a}\frac{1}{\cos^2 t}}{a\cos t} = -\frac{b}{a^2}\frac{1}{\cos^3 t}. ▶$$

7.20. Найти производную n-го порядка функции $y = \ln(1+x)$.

Р е ш е н и е. Последовательно дифференцируя функцию, получим:

$$y' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1};\ y'' = -(1+x)^{-2};\ y''' = 1\cdot 2\cdot(1+x)^{-3};$$

$$y^{(4)} = -1\cdot 2\cdot 3(1+x)^{-4};\ \ldots;$$

$$y^{(n)} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot(-1)^{n-1}(1+x)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}. ▶$$

Найти производные функций:

7.21. $y = x^7 - 2x^5 + 5 - \frac{8}{x^3} + \frac{5}{6}x\sqrt[5]{x}$.

7.22. $y = 2\sqrt{x} - 4\cos x + 2\sin x + \log_3 x - \ln 5$.

7.23. $y = 5^x - 7\,\mathrm{tg}\,x + 3\,\mathrm{ctg}\,x + \mathrm{arctg}\,x$.

7.24. $y = e^x - \sqrt[7]{x^4} - 2\arccos x + 3\arcsin x$.

7.25. $y = (x^2 + 2x + 2)\,e^{-x}$.

7.26. $y = 3x^3 \ln x - x^3$.

7.27. $y = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x$.

7.28. $y = \frac{3x+2}{2x+3}$.

7.29. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

7.30. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

7.31. $y = \frac{x\ln x}{1+x}$.

7.32. $y = \frac{\cos x}{2-3\sin x}$.

7.33. $y = \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}$.

7.34. $y = \ln(5x^2 + 2x^5)$.

7.35. $y = \sqrt{2-3x^4}$.

7.36. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$.

7.37. $y = \sqrt{1+\ln x}$.

7.38. $y = \mathrm{tg}\,2x + \frac{2}{3}\mathrm{tg}^3 2x + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 2x$.

7.39. $y = \ln(1+\cos x)$.

7.40. $y = \ln \mathrm{tg}\,2x$.

7.41. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+4})$.

7.42. $y = \ln\ln x$.

7.43. $y = \log_2(x + \sqrt{x^2-5})$.

7.44. $y = \ln(x + 3 + \sqrt{x^2+6x-7})$.

7.45. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$.

7.46. $y = \ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1-\sqrt{1+x^2}}$.

7.47. $y = \ln(\sqrt{2\sin x+1} - \sqrt{2\sin x - 1})$.

7.48. $y = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x} - 1)$.

7.49. $y = e^{\sin 2x}$.

7.50. $y = 3^{\arccos 2x}$.

7.51. $y = \mathrm{arctg}\,e^{-x}$.

7.52. $y = \sin e^{\sqrt{x}}$.

7.53. $y = 2e^{\sqrt{\ln x}}(1 - \sqrt{\ln x})$.

7.54. $y = \sqrt{\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}$.

7.55. $y = x\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}$.

7.56. $y = \sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

7.57. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{9x^2-1}$.

7.58. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{7-x^2}}$.

7.59. $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

7.60. $y=\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\dfrac{x}{2}$.

7.61. $y=x\sqrt{9-x^2}+9\arcsin\dfrac{x}{3}$.

7.62. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}$.

7.63. $y=x\arccos\dfrac{x}{3}-\sqrt{9-x^2}$.

7.64. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

7.65. $y=\arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$.

7.66. $y=e^x\operatorname{arctg}e^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$.

7.67. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

7.68. $y=x^{\sqrt{\ln x}}$.

7.69. $y=x^{-x}e^{-2x}$.

7.70. $y=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

Найти производные x'_y обратных функций:

7.71. $y=x-\cos x$.

7.72. $y=2x+x^3$.

7.73. $y=x^2-3\cos 2x$.

7.74. $y=2^x\ln(1-\sqrt{x})$.

7.75. $y=\dfrac{x-1}{x+5}$.

Найти производные y'_x от неявных функций:

7.76. $2x+y-4=0$.

7.77. $x\ln y+y\ln x=0$.

7.78. $x\cos y-y\sin x=0$.

7.79. $\sqrt{x}+\sqrt{y}-2=0$.

7.80. $xy-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=0$.

7.81. $\operatorname{arctg}(x+y)=x$.

7.82. $\ln y+\dfrac{x}{y}-a=0$.

7.83. $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

7.84. $x^y-y^x=0$.

7.85. $e^x+e^y-e^{xy}-1=0$.

Найти производные функций, заданных параметрически:

7.86. $\begin{cases} x = 2t+1; \\ y = t^3. \end{cases}$

7.87. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}; \\ y = \dfrac{t}{t+1}. \end{cases}$

7.88. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t); \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

7.89. $\begin{cases} x = a\cos^2 t; \\ y = a\sin^2 t. \end{cases}$

7.90. $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$

7.91. $\begin{cases} x = e^t \sin t; \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

7.92. $\begin{cases} x = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}; \\ y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$

7.93. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \\ y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

Найти производные второго порядка функций:

7.94. $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$.

7.95. $y = x^2\sqrt{1-x^2}$.

7.96. $y = x\ln(x+1)$.

7.97. $y = \sin^2 3x$.

7.98. $y = \dfrac{x+1}{2x+3}$.

7.99. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}; \\ y = \sqrt{t-t^2}. \end{cases}$

Найти производные n-го порядка функций:

7.100. $y = xe^x$.

7.101. $y = \ln x$.

7.102. $y = 5^x$.

7.103. $y = \sin x$.

7.104. $y = \dfrac{1}{3x+5}$.

7.105. $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

7.106. Показать, что функция $y = 2\,\mathrm{tg}(2x-1)$ удовлетворяет уравнению $y'' = 2yy'$.

7.107. Показать, что функция $y = 2e^{3x} - e^{-3x}$ удовлетворяет уравнению $yy''' = y'y''$.

7.108. Показать, что функция $y=(1-\frac{x^2}{4})\cos x+(1+\frac{x}{4})\sin x$ удовлетворяет уравнению $y''+y=x\sin x$.

7.3. Геометрические и механические приложения производной

Справочный материал

1. Геометрический смысл производной. Если кривая задана уравнением $y=f(x)$ или $F(x, y)=0$, то $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$ есть *угловой коэффициент касательной* (тангенс угла ее наклона с положительным направлением оси абсцисс).

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0 имеет вид:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\ , \qquad (7.30)$$

а *уравнение нормали*:

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\ . \qquad (7.31)$$

Углом между двумя кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0, тангенс которого находится по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}\ . \qquad (7.32)$$

2. Механический смысл производной. Если точка движется по закону $s=s(t)$, где s — путь, t — время, то $s'(t)$ представляет *скорость* изменения пути в момент t. Вторая производная пути по времени $s''(t)=[s'(t)]'=v'(t)$ есть скорость изменения скорости или *ускорение* точки в момент t.

7.109. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y=\frac{3-x}{2x-3}$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

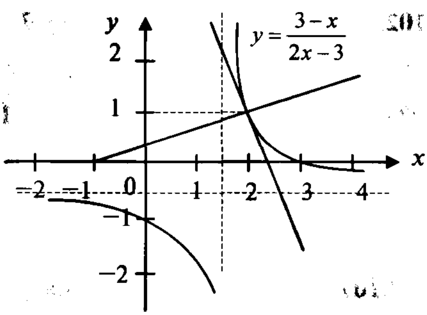


Рис. 7.1

Р е ш е н и е. Вычислим значение функции в точке $x_0=2$: $y_0=\frac{3-2}{2\cdot 2-3}=1$. Производная функции $y' = \dfrac{-3}{(2x-3)^2}$. Значение производной в точке $x_0 = 2$: $y'(2) = \dfrac{-3}{(2 \cdot 2 - 3)^2} = -3$. Согласно **(7.30)**, уравнение касательной имеет вид: $y - 1 = -3(x-2)$, или $3x + y - 7 = 0$, а уравнение нормали **(7.31)** — $y - 1 = \dfrac{1}{3}(x-2)$, или $x - 3y + 1 = 0$. ▶

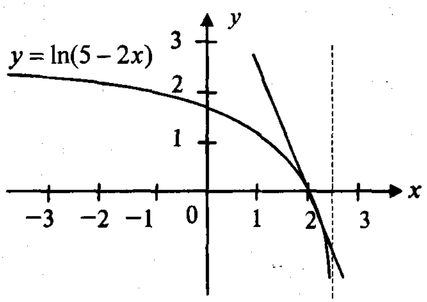


Рис. 7.2

7.109a. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \ln(5 - 2x)$, перпендикулярной прямой $x - 2y + 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Угловой коэффициент заданной прямой $k_1 = 1/2$, а прямой, перпендикулярной к ней, по формуле **(4.16)** есть $k_2 = -2$. Поэтому точка x_0 кривой $y = \ln(5 - 2x)$, в которой касательная перпендикулярна данной прямой, находится из уравнения $f'(x_0) = -2$, или $\dfrac{-2}{5 - 2x_0} = -2$, откуда $x_0 = 2$ и $f(2) = \ln(5 - 2 \cdot 2) = \ln 1 = 0$. По формуле **(7.30)** уравнение касательной $y - 0 = -2(x-2)$, или $2x + y - 4 = 0$ (рис. 7.2). ▶

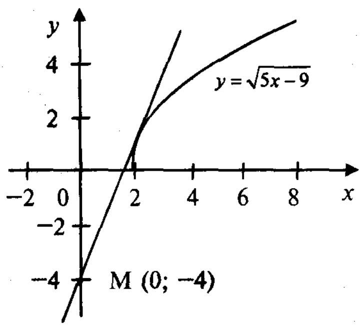


Рис. 7.3

7.110. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{5x-9}$, проходящую через точку $M(0; -4)$.

Р е ш е н и е. Определим абсциссу точки касания из условия, что точка M принадлежит касательной, т.е. ее координаты удовлетворяют уравнению **(7.30)**: $-4 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$.

Подставляя в это соотношение выражение для значения функции и ее производной в точке x_0, получим уравнение вида:

$-4-\sqrt{5x_0-9}=\dfrac{-5x_0}{2\sqrt{5x_0-9}}$. Решая его относительно x_0, найдем, что $x_0=2$. Определив значение функции и ее производной в этой точке, уравнение касательной запишем в виде: $y-1=\dfrac{5}{2}(x-2)$, или $5x-2y+8=0$. ▶

7.111. Составить уравнение касательной и нормали в точке (1; 4) к кривой, заданной параметрически: $x=\dfrac{2+t}{t^2}$, $y=t^2$.

Р е ш е н и е. Найдем значение t, при котором $x_0=1$, $y_0=4$, из решения системы: $\begin{cases}\dfrac{2+t}{t^2}=1,\\ t^2=4.\end{cases}$ Получим, что $t=2$.

Производную определим по формуле **(7.27)**: $y'_x=-\dfrac{2t^4}{t+4}$.

Значение производной при $t=2$: $y'_x=-\dfrac{16}{3}$.

Тогда уравнение касательной запишется в виде: $y-4=-\dfrac{16}{3}(x-1)$, или $3y+16x-28=0$, а уравнение нормали примет вид: $y-4=\dfrac{3}{16}(x-1)$, или $3x-16y+61=0$. ▶

7.112. Найти угол между параболами $y=x^2+6x-5$ и $y=x^2+7$ в точке их пересечения.

Р е ш е н и е. Решив совместно систему уравнений парабол, находим точку их пересечения: $x_0=2$ и $y_0=11$. Продифференцировав уравнения парабол $y'_1=2x+6$, $y'_2=2x$, найдем их угловые коэффициенты в точке пересечения: $y'_1(2)=10$, $y'_2(2)=4$. Согласно **(7.32)**, тангенс угла между параболами будет равен: $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{10-4}{1+10\cdot 4}=\dfrac{6}{41}$.

Следовательно, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{6}{41}\approx 8{,}3^\circ$. ▶

Составить уравнение касательной и нормали к кривым в указанных точках:

7.113. $y=2x^3-4x^2-5x-3$, $x_0=2$.

7.114. $y=\ln(1+x)$, $x_0=0$.

7.115. $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}$, $x_0=0$.

7.116. $\begin{cases}x=t+3;\\ y=\sqrt{t-1};\end{cases}$ $M_0(5;\,1)$

7.117. $\begin{cases}x=t-\sin t;\\ y=1-\cos t;\end{cases}$ $t=\dfrac{\pi}{2}$.

7.118. $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos^3 t;\\ y=\sqrt{2}\sin^3 t;\end{cases}$ $t=\dfrac{\pi}{4}$.

7.119. $x^3+y^2+4x-17=0$, $y_0=1$.

7.120. $x^2+2xy^2+3y^4=6$, $M_0(1;\,-1)$.

7.121. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к графику функции, проведенная в указанной точке? Написать уравнение касательной:

а) $y=x^2-5x+8$, $x_0=3$; *б*) $y=\ln(1-x)$, $x_0=0$.

7.122. Составить уравнение касательной к кривой $y=5x-x^2$, параллельной прямой, проходящей через точки (1; 7) и (–2; –2).

7.123. Составить уравнения касательных к кривой $y=x^3+2x+1$, перпендикулярных прямой $5y+x-4=0$.

7.124. Составить уравнение касательной к кривой $y=\ln(x-1)$, перпендикулярной прямой, образующей с осью абсцисс угол 135°.

7.125. Составить уравнения касательных к кривой $y=\dfrac{2x-7}{x-3}$: *а*) параллельных прямой $4x-y-2=0$; *б*) перпендикулярных прямой $2x+2y-5=0$.

7.126. Составить уравнение касательной к кривой $y=e^{-x}$: *а*) проходящей параллельно биссектрисе второго и четвертого координатных углов; *б*) отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный –1.

7.127. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$, проходящей через точку $M(6;\,2)$.

7.128. Найти угол между кривыми:

а) $y=x^2+5x-1$ и $y=x^2+4$; *б*) $y=x^3$ и $y=\frac{1}{x^2}$; *в*) $x^2+4y^2=9$ и $y^2=2x$.

7.129. Тело движется прямолинейно по закону $s(t)$. Определить скорость и ускорение тела в указанный момент времени t_0:

а) $s(t)=t^3-2t^2-t$, $t_0=2$; *б*) $s(t)=\frac{2t+1}{t+3}$, $t_0=7$.

7.130. Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону: $h(t)=9t-2t^2$. Найти начальную скорость и ускорение тела ($t_0=0$) и максимальную высоту подъема (при которой скорость $v(t)=0$).

7.4. Предельный анализ экономических процессов

Справочный материал

1. Предельные величины. Применение производной в экономике позволяет получать так называемые *предельные характеристики* экономических объектов или процессов. Предельные величины (предельная выручка, полезность, производительность, предельный доход, продукт и др.) характеризуют *не состояние, а скорость* изменения экономического объекта или процесса по времени или относительно другого исследуемого фактора.

Издержки производства. Если издержки производства y рассматривать как функцию выпускаемой продукции x, т.е. $y=C(x)$, то $y'=C'(x)$ будет выражать *предельные издержки* производства и приближенно характеризовать прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции. *Средние издержки* являются издержками на единицу выпуска продукции: $y_1=\frac{C(x)}{x}$.

2. Производительность труда. Пусть функция $u(t)$ выражает объем произведенной продукции y за время t. Тогда производная объема произведенной продукции по времени $u'(t_0)$ есть *производительность труда* в момент t_0.

3. Функция потребления и сбережения. Если x — национальный доход, $C(x)$ — функция потребления (часть дохода, которая тратится), а $S(x)$ — функция сбережения, то

$$x=C(x)+S(x). \qquad (7.33)$$

Дифференцируя, получим, что

$$\frac{dC}{dx}+\frac{dS}{dx}=1, \tag{7.34}$$

где $\frac{dC}{dx}$ — предельная склонность к потреблению;

$\frac{dS}{dx}$ — предельная склонность к сбережению.

*4. **Эластичность.*** Эта мера реагирования одной переменной величины на изменение другой. *Эластичность* функции приближенно показывает, на сколько процентов изменится одна переменная в результате изменения другой переменной на 1%.

Эластичность функции определяется с помощью соотношения:

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'_x \text{ или } E_x(y)=x\cdot T_y, \tag{7.35}$$

где

$$T_y(x)=(\ln y)'=\frac{1}{y}y'_x \tag{7.36}$$

— *относительная скорость изменения* (*темп*) функции.

Эластичность функции применяется при анализе спроса и предложения от цены (*ценовая эластичность*). Она показывает реакцию спроса или предложения на изменение цены и определяет, на сколько процентов приближенно изменится спрос или предложение при изменении цены на 1%.

Если эластичность спроса $|E_x(y)|>1$, то спрос считается *эластичным*, если $|E_x(y)|=1$ — *нейтральным* (*с единичной эластичностью*), а если $|E_x(y)|<1$ — *неэластичным* относительно цены.

7.131. Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид: $y(x)=0{,}1x^3-1{,}2x^2+5x+250$ (ден. ед.). Найти средние и предельные издержки производства и вычислить их значение при $x = 10$.

Р е ш е н и е. Найдем производную $y'(x)$ и ее значение $y'(10)$ — предельные издержки производства:

$$y'(x)=0{,}3x^2-2{,}4x+5;\quad y'(10)=30-24+5=11.$$

Средние издержки:

$$y_1(x)=\frac{0{,}1x^3-1{,}2x^2+5x+250}{x}=0{,}1x^2-1{,}2x+5+\frac{250}{x};$$

$y_1(10) = 10 - 12 + 5 + 25 = 28.$

Это означает, что при данном уровне производства (количестве выпускаемой продукции) средние затраты на производство одной единицы продукции составляют 28 ден. ед., а увеличение объема на одну единицу продукции обойдется фирме приближенно в 11 ден. ед. ▶

7.132. Функция потребления некоторой страны имеет вид: $C(x) = 15 + 0{,}25x + 0{,}36x^{\frac{4}{3}}$, где x — совокупный национальный доход (ден. ед.). Найти: *а*) предельную склонность к потреблению; *б*) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 27 ден. ед.

Р е ш е н и е. Предельная склонность к потреблению: $C'(x) = 0{,}25 + 0{,}48x^{\frac{1}{3}}$; ее значение: $C'(27) = 0{,}25 + 0{,}48 \cdot \sqrt[3]{27} = 1{,}69$.

Предельная склонность к сбережению:

$S'(x) = 1 - C'(x) = 0{,}75 - 0{,}48x^{\frac{1}{3}}$; ее значение: $S'(27) = 1 - 1{,}69 = -0{,}69$. ▶

7.133. Объем производства зимней обуви u, выпускаемой некоторой фирмой, может быть описан уравнением $u = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t + 2100$ (ед.), где t — календарный месяц года. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения: *а*) в начале года ($t = 0$); *б*) в середине года ($t = 6$); *в*) в конце года ($t = 12$).

Р е ш е н и е. Производительность труда выражается производной

$$z(t) = u'(t) = t^2 - 7t + 6 \text{ (ед./мес.)},$$

а скорость и темп изменения производительности — соответственно производной $z'(t)$ и логарифмической производной $T_z(t) = [\ln z(t)]'$:

$$z'(t) = 2t - 7 \text{ (ед./мес.}^2\text{)},\quad T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{2t - 7}{t^2 - 7t + 6} \text{ (ед./мес.)}.$$

В заданные моменты времени соответственно имеем $z(0) = 6$ (ед./мес.), $z'(0) = -7$ (ед./мес.^{2}), $T_z(0) = -1{,}167$ (ед./мес.), $z(6) = 0$ (ед./мес.), $z'(6) = 5$ (ед./мес.^{2}), $T_z(6)$ не существует (так как $z(6) = 0$), $z'(12) = 66$ (ед./мес.^{2}), $z'(12) = 17$ (ед./мес.^{2}), $T_z(12) = 4{,}125$ (ед./мес.). ▶

7.134. Функция спроса $q = \frac{3p + 14}{p + 3}$ и предложения $s = p + 2$, где q и s — количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p — цена единицы товара. Найти: *а*) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; *б*) эластичность спроса и предложения; *в*) изменение дохода при увеличении цены на 10 % от равновесной.

Решение:

а) Равновесная цена определяется из условия $q = s$, т.е. $\frac{3p+14}{p+3} = p + 2$, откуда $p = 2$, т.е. равновесная цена рана 2 ден. ед.

б) Найдем эластичности по спросу и предложению по формуле **(7.35)**:

$$E_p(q) = -\frac{5p}{(p+3)(3p+14)};$$

$$E_p(s) = \frac{p}{p+2}.$$

Для равновесной цены $p = 2$ имеем $E_{p=2}(q) = -0{,}1$; $E_{p=2}(s) = 0{,}5$.

Так как полученные значения эластичности меньше 1 (по абсолютной величине), то спрос и предложение данного товара при равновесной (рыночной) цене неэластичны относительно цены. Это означает, что изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения.

в) При увеличении цены p на 10% от равновесной спрос уменьшается на $0{,}1 \cdot 10 = 1$ %, следовательно, доход pq возрастет приближенно на 9%. ▶

7.135. Зависимость между спросом q и ценой p за единицу продукции, выпускаемой некоторым предприятием, дается соотношением $q = 18 - \sqrt{p}$. Найти эластичность спроса. Выяснить, при каких значениях цены спрос является эластичным, нейтральным и неэластичным. Какие рекомендации о цене за единицу продукции можно дать руководителям предприятия при $p = 100$ и $p = 150$ ден. ед.?

Решение. Эластичность спроса по формуле **(7.35)** есть

$$E_p(q) = \frac{p}{18-\sqrt{p}}(18-\sqrt{p})' = -\frac{\sqrt{p}}{2(18-\sqrt{p})}.$$

Спрос нейтрален, если $|E_p(q)| = 1$. Решая это уравнение, имеем $p = 144$. Далее, принимая во внимание, что $p > 0$ и $q > 0$ (т.е. $p < 324$), получим, что если $0 < p < 144$ — спрос является неэластичным; при $144 < p < 324$ — спрос эластичен.

Рекомендации. Если цена единицы продукции составляет 100 ден. ед., то спрос является неэластичным и можно повысить цену продукции, выручка при этом будет расти. При стоимости продукции

150 ден. ед. спрос является эластичным. В данном случае целесообразно рассмотреть предложение о снижении цены, выручка от реализации будет расти в результате увеличения спроса на продукцию. ▶

7.136. Задана функция $y = f(x)$ полных затрат предприятия на производство x единиц продукции. Определить связь между коэффициентом эластичности полных и средних затрат.

Р е ш е н и е. Средние затраты на единицу продукции равны: $y_1 = \frac{y}{x}$. По формуле (7.35) коэффициенты эластичности полных и средних затрат равны: $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'$;

$$E_x(y_1) = \frac{x}{y_1} \cdot y_1' = x\frac{x}{y}\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{x^2}{y}\frac{xy' - y}{x^2} = \frac{x}{y}y' - 1 = E_x(y) - 1,$$

т.е. коэффициент эластичности средних затрат на единицу меньше коэффициента эластичности полных затрат. ▶

7.137. Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x на предприятии выражается функцией $y = 50x - 0{,}05x^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

7.138. Выручка от продажи конфет составляет $p = 100x - 0{,}5x^2$, где x — объем проданной продукции (тыс. ед.). Найти среднюю и предельную выручку, если продано: *а*) 10 тыс. ед.; *б*) 60 тыс. ед.

7.139. Функция издержек производства y от объема выпускаемой продукции x имеет вид $y = 100x - 0{,}2x^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

7.140. Себестоимость продукции y связана с объемом выпускаемой продукции x уравнением: $y = 6\ln(1 + 3x)$. Определить среднюю и предельную себестоимость выпускаемой продукции при объеме, равном 10 ед.

7.141. Производительность труда бригады может быть описана уравнением $y = -2{,}5t^2 + 15t + 100$, где $0 \le t \le 8$ — рабочее время в часах. Вычислить скорость и темп изменения производительности труда при $t = 2$ и $t = 7$.

7.142. Себестоимость производства телевизоров y (в тыс. руб.) описывается функцией $y = 0{,}01x^2 - 0{,}5x + 12$, $5 \le x \le 50$, где x — объем выпускаемой продукции в месяц (тыс. ед.). Определить скорость и темп изменения себестоимости при выпуске 20 и 40 тыс. ед. продукции.

7.143. Функция потребления некоторой страны имеет вид:

$C(x) = 13 + 0{,}25x + 0{,}37x^{\frac{4}{5}}$, где x — совокупный национальный доход.

Найти: *а*) предельную склонность к потреблению; *б*) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 32.

7.144. Функция сбережения некоторой страны имеет вид:

$S(x) = 25 - 0{,}53x - 0{,}41x^{\frac{2}{3}}$, где x — совокупный национальный доход.

Найти: *а*) предельную склонность к потреблению; *б*) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 27.

7.145. Зависимость между себестоимостью готовой продукции предприятия y (млн руб.) и объемом выпускаемых изделий x (тыс. шт.) выражается уравнением $y = \sqrt{x+4} - 2$. Найти эластичность себестоимости продукции предприятия, выпускающего 12 тыс. шт. изделий. Какие рекомендации можно дать руководителям предприятий об изменении величины объема выпускаемой продукции?

7.146. Функция полных затрат в зависимости от объема выпускаемой продукции задана соотношением: $y = x^3 - 2x^2 + 96$. При каком объеме производства предельные и средние затраты совпадают? Найти коэффициенты эластичности полных и средних затрат при данном объеме.

7.147. Зависимость между объемом выпуска готовой продукции y (млн руб.) и объемом производственных фондов x (млн руб.) выражается уравнением $y = 0{,}6x - 4$. Найти эластичность выпуска продукции для предприятия, имеющего фонды в размере 40 млн руб.

7.148. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (в руб.) и выпуском продукции x (в млн руб.) выражается уравнением $y = -0{,}5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции на 30 млн руб.

7.149. Зависимость между количеством выпускаемых деталей в партии x (тыс. ед.) и затратами на их изготовление y (тыс. руб.) для предприятий отрасли выражается уравнением $y=\frac{27}{x}+6$. Найти эластичность затрат для предприятий, выпускающих по 10 тыс. деталей в партии.

7.150. Найти эластичность функции спроса при заданной стоимости p:

а) $q+10p=50$, $p=3$; *б*) $5q+3p=70$, $p=10$; *в*) $p^2+p+4q=26$, $p=2$ и $p=4$.

7.151. Для следующих функций спроса найти значение p, при которых спрос является эластичным:

а) $2p+3q=12$; *б*) $q=50(15-\sqrt{p})$; *в*) $q=\sqrt[3]{3600-p^2}$.

7.152. Заданы функции спроса q и предложения s от цены x: $q=10-x$, $s=3x-6$. Найти: *а*) равновесную цену; *б*) эластичность спроса и предложения для равновесной цены; *в*) изменение дохода при изменении равновесной цены на 5%.

7.153. Функции спроса q и предложения s на некоторый товар от его цены x задаются уравнениями: $q=\frac{2x+15}{x+5}$, $s=\frac{3x+15}{x+10}$. Найти: *а*) равновесную цену; *б*) эластичность спроса и предложения для равновесной цены; *в*) изменение дохода при изменении равновесной цены на 5%.

7.154. Зависимость потребления y от дохода x задается функцией $y=\frac{ax}{x+b}$. Показать, что эластичность функции потребления от дохода не зависит от параметра a и стремится к нулю при неограниченном возрастании дохода.

Задачи для повторения

Найти производные функций:

7.155. $y=x\ln^2 x$.

7.156. $y=\sqrt[3]{1+2x^3}$.

7.157. $y=\sqrt{1+\cos 2x}$.

7.158. $y=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+4})$.

7.159. $y=\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$.

7.160. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}$.

7.161. $y=\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

7.162. $y=\arccos\frac{2x^2}{1+x^4}$.

7.163. $y = \cos e^{\sqrt{1-x}}$.

7.164. $y = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

7.165. $y = e^x \operatorname{arctg} e^x - \ln\sqrt{1+e^{2x}}$.

7.166. $y = \ln^3 \sin\dfrac{x}{3}$.

7.167. $y = x^{\sin x}$.

7.168. $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$.

Найти производные x'_y обратных функций:

7.169. $y = \sqrt{1+e^{4x}}$.

7.170. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$.

Найти производные y'_x от неявных функций:

7.171. $x^2 + y^2 = a^2$.

7.172. $e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{y}} = a$.

Найти производные функций, заданных параметрически:

7.173. $\begin{cases} x = t\sin t; \\ y = t\cos t. \end{cases}$

7.174. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}; \\ y = t\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

Найти производную второго порядка функции:

7.175. $y = \operatorname{tg} x$.

7.176. $\begin{cases} x = a\sin 2t; \\ y = a\cos 2t. \end{cases}$

Найти производную четвертого порядка функции:

7.177. $y = e^x \cos x$.

Найти производные n-го порядка функций:

7.178. $y = \cos x$.

7.179. $\begin{cases} x = t; \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

7.180. Показать, что функция $y = \cos\sqrt{1-x}$ удовлетворяет уравнению $4(1-x)y'' = 2y' - y$.

7.181. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{4-5x}$ в точке ее пересечения с прямой $2x + y - 1 = 0$.

7.182. Составить уравнение касательных к кривой $y = \dfrac{x+2}{x-2}$:

а) параллельных прямой, проходящей через точки $(1;-7)$ и $(-2;5)$;

б) перпендикулярных прямой $2x - 2y + 5 = 0$.

7.183. Составить уравнение касательных к кривой $y = x^2 + x + 2$, проходящих через точку пересечения прямых $x - 2y + 5 = 0$ и $3x - 4y + 9 = 0$.

7.184. Тело движется прямолинейно по закону $s=-2t^2+\frac{20}{3}\sqrt{(t+5)^3}+30t$. Определить скорость и ускорение тела в начальный момент времени $(t=0)$ и расстояние, пройденное телом до остановки.

7.185. Выручка от продажи кондитерских изделий составляет $p=\sqrt{x^2-2x+9}-3$ (тыс. руб.), где x — объем проданной продукции (т). Найти среднюю и предельную выручку, если продано 5 т продукции.

7.186. Функция спроса q и предложения s на выпускаемые предприятием изделия от цены x задаются уравнениями: $q=\frac{4+3\ln x}{1+\ln x}$, $s=\frac{3+4\ln x}{1+\ln x}$. Найти: *а*) равновесную цену; *б*) эластичность спроса и предложения для равновесной цены; *в*) изменение дохода при изменении равновесной цены на 10 %.

Контрольные задания по главе 7 «Производная»

№	*Вариант 7.1*	*Вариант 7.2*	*Вариант 7.3*
1	Найти производные функций:		
а)	$y=(3x-1)\times$ $\times\ln(\sqrt{1+4x^2}+2x)$	$y=(5x-4)\times$ $\times\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)$	$y=(2-x)\times$ $\times\ln(\sqrt{1+25x^2}+5x)$
б)	$y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$	$y=\arccos\sqrt{1-x^2}$ $(x>0)$	$y=\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}$
2	Показать, что функция $y=y(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x,y,y',y'')=0$:		
	$y=3e^{x^2}$, $xyy''-xy'^2-yy'=0$	$y=2xe^{-\frac{1}{x}}$, $x^2yy''-(y-xy')^2=0$	$y=\frac{1}{2}e^{2x+1}(x-\frac{1}{2})$, $xy''-y'\ln\frac{y'}{x}=0$
3	Найти производную от функции, заданной параметрически:		
	$\begin{cases}x=e^{-2t}\sin 2t;\\ y=e^{2t}\cos 2t\end{cases}$	$\begin{cases}x=e^{2t}\sin 2t;\\ y=e^{-2t}\cos 2t\end{cases}$	$\begin{cases}x=e^{3t}\sin 3t;\\ y=e^{-3t}\cos 3t\end{cases}$
4	Найти производную n-го порядка:		
	$y=\frac{1}{2x-3}$	$y=\frac{1}{1-3x}$	$y=\frac{1}{5x+2}$

5	Составить уравнения касательных к графику функции:		
	$y=\dfrac{2x+1}{x+1}$, перпендикулярных прямой $y+x+7=0$	$y=\dfrac{x+2}{x+4}$, параллельных прямой $y-2x+1=0$	$y=\dfrac{2-x}{2x-1}$, проходящих через точку $M(2;-2)$
6	Для следующих функций спроса $q=f(p)$ найти значение стоимости единицы продукции p, при которых спрос является эластичным:		
	$q=\dfrac{1}{3}(100-5p)$	$q=\dfrac{1}{5}(20-2p)$	$q=\dfrac{1}{7}(80-4p)$

Тест 7

1. Выяснить, какие функции являются непрерывными, но не дифференцируемыми в точке x_0:

1) $y = |x+2|$, $x_0 = 2$; 2) $y = |x-5|$, $x_0 = 5$; 3) $y = \sqrt[5]{x-8}$, $x_0 = 8$;

4) $y = \operatorname{tg}(x + \dfrac{\pi}{4})$, $x_0 = \pi$; 5) $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$, $x_0 = 0$.

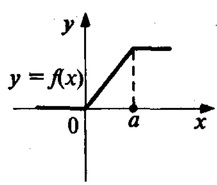
2. Выяснить, какие из функций являются дифференцируемыми в точке $x_0 = 1$:

1) $y = \operatorname{tg}(1 + \sqrt{x})$; 2) $y = x \arccos x$; 3) $y = \sqrt[5]{x^2 - 8x + 3}$;

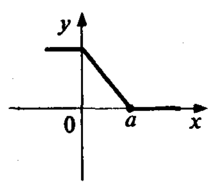
4) $y = x^2 \ln(1 - x^2)$; 5) $y = |3x - 2|$.

3. При каком значении параметра a функция $y = \ln(x + a\sqrt{x^2 - 1})$ является дифференцируемой в точке $x_0 = 1$?

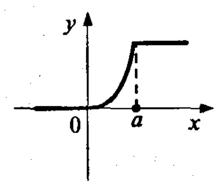
4. Установить соответствие между графиками функций $y = f(x)$ (*1, 2, 3*) и их производными $y' = f'(x)$ (*а, б, в*):



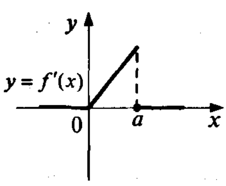
1)



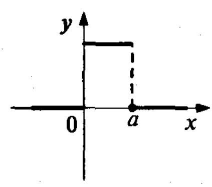
2)



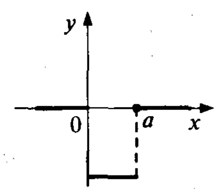
3)



а)



б)



в)

Вычислить значения производных функции в точке x_0:

5. $y = 12\ln(x + \sqrt{x^2 + 3})$, $x_0 = 1$.

6. $y = (x^2 + 5x - 4)\ln x$, $x_0 = 1$.

7. $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}+1}) - \sqrt{2}x,\ x_0 = 0.$

8. $y = \frac{5}{7}(\operatorname{arctg}(1+x^2) - \sqrt{3x^2+1}),\ x_0 = 1.$

9. $y = (\sin x)^x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$, полагая, что $2^{\frac{\pi}{6}} = 1{,}44,\ \ln 2 = 0{,}69,\ \pi\sqrt{3} = 5{,}44$ (с точностью до 0,01).

10. Вычислить значение производной функции $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$, заданной неявно, в точке $M(2; -1)$.

11. Вычислить значение производной функции $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \operatorname{arctg}\sqrt{t-1}$, заданной параметрически при $t = 2$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 4x - x^2$ в точке $x_0 = 3$.

Ответ: $y = kx+b$, где $k = \ldots$; $b = \ldots$.

13. При каком значении x_0 касательная к графику функции $y = 2\sqrt{2}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$ наклонена к оси абсцисс под углом 45°?

14. Зависимость между издержками производства сигарет y и процентным содержанием вредных веществ в них x выражается функцией $y = \frac{10\,000}{x} - 100$. Найти средние и предельные издержки производства, если количество вредных веществ составляет 10 %.

15. Спрос q на некоторые товары народного потребления зависит от их стоимости p следующим образом: $q = \frac{6000}{\sqrt{p}} - 40$. Найти, при каком значении p спрос будет нейтральным (с единичной эластичностью).

Глава 8
Приложение производной

8.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Справочный материал

*1. **Теорема Ролля.*** Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) дифференцируема на интервале (a, b);
3) на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная функции равна нулю: $f'(\xi) = 0$.

*2. **Теорема Лагранжа.*** Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой выполняется равенство:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \textbf{(8.1)}$$

8.1. Выяснить, может ли быть применена теорема Лагранжа для функции $y = \sqrt[3]{1 - x^2} + \frac{1}{x}$ на отрезке:

а) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; *б*) $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$; *в*) $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

Р е ш е н и е:

а) Функция не является непрерывной в точке $x = 0 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, поэтому на данном отрезке теорема Лагранжа неприменима.

б) $y' = -\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}} - \dfrac{1}{x^2}$. Производная не существует в точке $x = 1 \in \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$, поэтому на этом отрезке теорема Лагранжа также не может быть применима.

в) на отрезке $\left[\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$ оба условия теоремы Лагранжа выполнены, так что теорема применима.▶

З а м е ч а н и е. Если теорема Лагранжа не применима на отрезке $[a, b]$, то это не означает, что в нем не может быть точки ξ, удовлетворяющей равенству **(8.1)**.

8.2. Указать хотя бы одно значение a, при котором функция $y = e^{\sqrt{x}} + a\cos x$ имеет на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ точку, в которой производная обращается в нуль.

Р е ш е н и е. Очевидно, функция непрерывна на отрезке $(0; \dfrac{\pi}{2})$ и дифференцируема в интервале $(0; \dfrac{\pi}{2})$. Если при этом окажется, что $f(0) = f(\dfrac{\pi}{2})$, то требуемая точка будет существовать по теореме Ролля. Таким образом, если выполняется равенство $e^0 + a\cos 0 = e^{\sqrt{\pi/2}} + a\cos\dfrac{\pi}{2}$, то условие задачи будет выполнено. Рассматривая это равенство как уравнение относительно a, получаем $a = e^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} - 1$.

Отметим, что найденное значение a, безусловно, не единственное, при котором условие задачи выполняется.▶

8.3. Найти все значения a, при которых функция $y = \left(1 + a^2\right) 2^{\sin\frac{\pi x}{2}} + x$ удовлетворяет условию $y' \le 2$ при всех $x \in (0; 1)$.

Р е ш е н и е. Так как функция непрерывна на отрезке $[0; 1]$ и дифференцируема в интервале $(0; 1)$, то существует точка $\xi \in (0; 1)$ такая, что $f'(\xi) = f(1) - f(0) = 2(1 + a^2) + 2 - (1 + a^2) = 3 + a^2 \ge 3$, при любых значениях a. Таким образом, ни при каких значениях a условие задачи выполняться не может.▶

8.4. Функция $y=\sqrt[3]{x^2}$ равна 1 при $x=1$ и $x=-1$, но $y'\neq 0$ для всех $x\in(-1;\ 1)$. Выяснить, противоречит ли это условиям теоремы Ролля?

8.5. Выяснить, можно ли применить теорему Лагранжа для функции $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$ на промежутке: *а*) (0; 1); *б*) (1; 2).

8.6. Выяснить, применима ли для функции $y=\dfrac{1}{x}+|x|$ на промежутке $[-2;\ -1]$: *а*) теорема Ролля; *б*) теорема Лагранжа.

8.7. Дифференцируемая при всех значениях x функция $y=f(x)$ удовлетворяет условиям $f(2)=5$, $f(4)=3$. Для какого значения a уравнение $f'(x)=a$ заведомо имеет решение?

8.8. Функция $y=f(x)$ имеет производную, равную $y'=2+\sqrt{1+x^2}+\sin(2^x+3)$. Может ли выполняться равенство $f(1)-f(0)=\sin\alpha$?

8.2. Правило Лопиталя

Справочный материал

*1. **Теорема*** (***правило Лопиталя***). Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0(\infty)}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{8.2}$$

Таким образом, правило Лопиталя используется для раскрытия неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

2. Правило Лопиталя можно применять также и для раскрытия неопределенностей вида $[0\cdot\infty]$. Для этого произведение $f(x)g(x)$ следует записать в виде $\dfrac{f(x)}{\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]}$ (или $\dfrac{g(x)}{\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]}$) и получить неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

3. Если имеется неопределенность вида $[0^0]$ или $[\infty^0]$, при вычислении предела функции $f(x)^{g(x)}$, то логарифм этой функции представляет собой неопределенность вида $[0\cdot\infty]$. При этом используется соотношение (полученное на основе свойств логарифмов и непрерывности показательной функции):

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)\ln f(x)}. \tag{8.3}$$

8.9. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}+x}{\ln(2+x)}$.

Р е ш е н и е. Так как в данном случае имеется неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, можно применить правило Лопиталя **(8.2)**:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}+x}{\ln(2+x)} = \lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{2+x}+x\right)'}{\left(\ln(2+x)\right)'} = \lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}+1}{\dfrac{1}{2+x}} = \frac{3}{2}. \ ►$$

8.10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^x-3^x}{x^2}$.

Р е ш е н и е. Имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Применяя правило Лопиталя **(8.2)**, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x-3^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{4^x\ln 4-3^x\ln 3}{2x}.$$

Как видим, неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ остается. Применим правило Лопиталя еще раз.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x\ln 4-3^x\ln 3}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4^x\ln^2 4-3^x\ln^2 3}{2} = \infty. \ ►$$

8.11. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$.

Решение. Так как $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\sin y=0$. Таким образом, присутствует неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Применим правило Лопиталя **(8.2)**:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}{x^2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)}\cos\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{x^2}\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x^4}}+\sqrt{\frac{x(x-1)^2}{x^4}}\right)\lim_{y\to 0}\cos y=0\cdot 1=0.\ ▶$$

8.12. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[\infty^0]$. Найдем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

По формуле **(8.3)** $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)}=e^0=1.$ ▶

8.13. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}[(x-\sqrt{x})\ln\ln x]$.

Решение. Так как при $x\to 1$ $\ln x\to 0$, то $\ln\ln x=$ $=\ln(\ln x)\to-\infty$. Таким образом, имеем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$.

Сведем ее к неопределенности вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ и применим правило Лопиталя (8.2):

$$\lim_{x\to 0}\left(x-\sqrt{x}\right)\ln\ln x=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\ln x}{\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2 2\sqrt{x}}{(\ln x)(2\sqrt{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\ln x}\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left[\dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{2\sqrt{x}}\right]}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}\cdot 1=0.\ \blacktriangleright$$

8.14. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ln^2 x-\sqrt{1+x+x^2}\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Преобразуем искомый предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ln^2 x-\sqrt{1+x+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln^2 x\left(1-\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}}{x\ln^2 x}\right)$ и найдем отдельно предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}}{x\ln^2 x}$, используя правило Лопиталя (8.2):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x\ln^2 x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1+2x}{2\sqrt{1+x+x^2}}}{\ln^2 x+2\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+2}{2\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}\left(\ln^2 x+2\ln x\right)}=0.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\ln^2 x-\sqrt{1+x+x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}x\ln^2 x=\infty.\blacktriangleright$$

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

8.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)}{x}$.

8.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

8.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\ln(1+x)}{x}$.

8.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\ln(e^{x^2}+1)}$.

8.19. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln^3 x.$

8.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-x}{x^2}.$

8.21. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right).$

8.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ln x-\sqrt{1+x^2}\right).$

8.23. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{x+\dfrac{\pi}{4}}.$

8.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}.$

8.25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x)-\ln 2}{\sqrt{1+2x}-3^{x-\frac{1}{2}}}.$

8.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sqrt{1+x}-1}.$

8.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$

8.28. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^{\sqrt{2x}-2}.$

8.29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\ln(x^2-3)}{\ln(x-2)}.$

8.30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{e^x-e}\right).$

8.31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x+\sqrt{x}\right)^{x}.$

8.32. $\lim\limits_{x\to\sqrt{\pi}}\dfrac{\ln\dfrac{x^2}{\pi}}{\sin x^2}.$

8.33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin x}.$

8.34. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{\sin(x+1)}+\ln(1+x)\right).$

8.3. Интервалы монотонности и экстремумы функции

Справочный материал

1. Если производная функции $y=f(x)$ положительна (отрицательна) во всех точках промежутка, то функция $y=f(x)$ монотонно *возрастает (убывает)* на этом промежутке.

2. Точка x_0 называется точкой *максимума (минимума)* функции $y=f(x)$, если существует интервал, содержащий точку x_0, такой, что для всех x из этого интервала имеет место неравенство $f(x_0)\ge f(x)$, $(f(x_0)\le f(x))$. Точки максимума и минимума называются точками *экстремума.*

3. Необходимое условие экстремума: в точке экстремума функции ее производная либо равна нулю $\left(f'(x)=0\right)$, либо не существует.

4. Первое достаточное условие экстремума: если в точке x_0 функция $y=f(x)$ непрерывна, а производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка x_0 — точка экстремума: максимума, если знак меняется с «+» на «–», и минимума, если с «–» на «+».

Если при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, то в точке x_0 экстремума нет.

5. Второе достаточное условие экстремума: если в точке x_0 $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)>0$, то x_0 является точкой максимума функции. Если $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)<0$, то x_0 является точкой минимума функции.

6. Схема исследования функции $y=f(x)$ на экстремум:

1) найти производную $y'=f'(x)$;

2) найти критические точки функции, в которых производная равна нулю или не существует;

3) исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции;

4) найти экстремальные значения функции.

При исследовании функции на экстремум с помощью 2-го достаточного условия п. *1*), *2*), *4*) сохраняются, а в п. *3*) необходимо найти вторую производную $f''(x)$ и определить ее знак в каждой критической точке.

7. Чтобы найти *наибольшее и наименьшее значение* (*глобальный максимум и минимум* функции $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следует выбрать наибольшее (наименьшее) из значений функции в критических точках, находящихся в интервале (a, b) и на концах отрезка (в точках a и b).

8. Если дифференцируемая на интервале (a, b) функция $y=f(x)$ имеет *единственную* точку экстремума, то в этой точке достигается наибольшее или наименьшее значение (глобальный максимум или минимум) функции на интервале (a, b).

8.35. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

$$y=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x.$$

Р е ш е н и е. В соответствии со схемой исследования (п. 6) найдем $y'=2x^2-5x+2$. Очевидно, производная существует при всех значениях x. Приравнивая y' к нулю, получаем уравнение $2x^2-5x+2=0$, откуда $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=2$ — критические точки. Знаки производной имеют вид (рис. **8.1**):

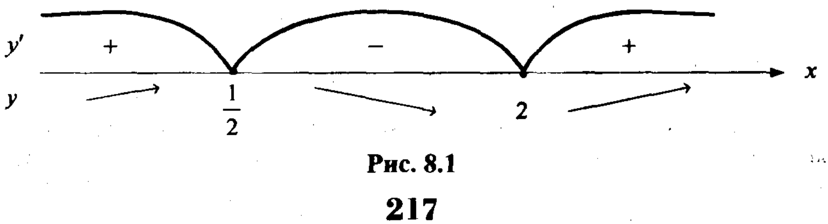


Рис. 8.1

На интервалах $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ и $(2; +\infty)$ производная $f'(x) > 0$ и функция возрастает, на интервале $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ $f'(x) < 0$ и функция убывает; $x = \frac{1}{2}$ — точка максимума и $f_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{24}$, $x = 2$ — точка минимума и $f_{\min}(2) = -\frac{2}{3}$, так как при переходе через эти точки производная меняет свой знак соответственно с «+» на «–» и с «–» на «+».

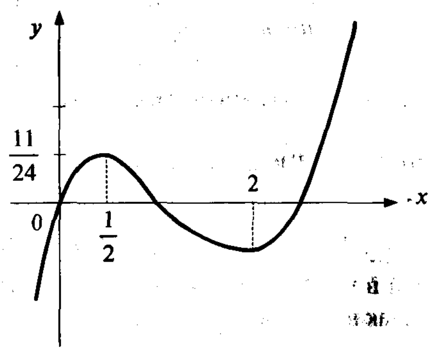


Рис. 8.2

Замечание. Установить существование экстремума в критических точках $x = \frac{1}{2}$ и $x = 2$, в которых $f'(x) = 0$ можно было и с помощью второй производной $f''(x) = 4x - 5$ (см. п. 5). Так как $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0$, а $f''(2) = 3 > 0$, то $x = \frac{1}{2}$ — точка максимума, а $x = 2$ — точка минимума.

График данной функции схематично показан на рис. **8.2**. ▶

8.36. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции $y = (x \ln x - x)^2$.

Решение. $y' = 2(x\ln x - x)\left[\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1\right] = 2x\ln x(\ln x - 1)$.

Производная существует во всех точках, в которых существует и сама функция, т.е. при $x > 0$. Точки, в которых производная обращается в нуль, задаются равенствами $\ln x = 0$, $\ln x - 1 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = e$ — критические точки. Знаки производной указаны на рис. **8.3**.

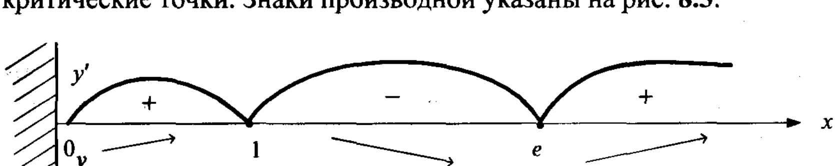


Рис. 8.3

Таким образом, функция монотонно возрастает на промежутках $(0; 1)$ и $(e; +\infty)$ и монотонно убывает на промежутке $(1; e)$. Точка $x = 1$ — точка максимума и $f_{\max}(1) = 1$, точка $x = e$ — точка минимума и $f_{\min}(e) = 0$.▶

8.37. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции $y=\sqrt{1-\cos x}$.

Решение. $y'=\dfrac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}$. Производная не существует при $\cos x=1$, т.е. при $x=2\pi n$ и равна нулю при $x=\pi+2\pi n$. Знак производной совпадает со знаком $\sin x$; таким образом $y'>0$ при $2\pi k<x<\pi+2\pi k$ и $y'<0$ при $-\pi+2\pi k<x<2\pi k$. Это, соответственно, интервалы возрастания и убывания функции. $x=\pi+2\pi k$ — точки максимума $f_{\max}(\pi+2\pi k)=\sqrt{2}$, $x=2\pi k$ — точки минимума $f_{\min}(2\pi k)=0$.▶

8.38. Найти наибольшее и наименьшее значение (глобальный максимум и минимум) функции $y = 3x - x^3$ на отрезке $[-2; 4]$.

Решение. Производная функции $y'=3-3x^2$ обращается в нуль в двух точках $x = \pm 1$. Найдем значения функции в этих точках и на концах отрезка: $f(-2) = 2, f(-1) = -2, f(1) = 2, f(4) = -52$.

Таким образом, $f_{\text{наиб}} = f(-2) = f(1) = 2, f_{\text{наим}} = f(4) = -52$.▶

8.39. Найти наибольшее значение (глобальный максимум) функции $y=\dfrac{x\sqrt{x}}{8-3\sqrt{x}}$ на интервале $(10; 18)$.

Решение. Найдем $y'=\dfrac{3\sqrt{x}\left(4-\sqrt{x}\right)}{\left(8-3\sqrt{x}\right)^2}$. На интервале $(10; 18)$ имеется всего одна критическая точка $x = 16$. Производная при переходе через эту точку меняет знак с «+» на «–», т.е. $x = 16$ — точка максимума. Следовательно, функция достигает наибольшего значения при $x = 16$, т.е. $f_{\text{наиб}} = f_{\max}(16) = -16$. (Заметим, что наименьшего значения (глобального минимума) данной функции на указанном интервале не существует.) ▶

8.40. Забором длиной 24 м требуется огородить с трех сторон прямоугольный палисадник наибольшей площади. Найти размеры палисадника.

Решение. Пусть длины сторон палисадника x, y. Тогда $2x + y = 24$, т.е. $y = 24 - 2x$. Площадь палисадника $S = xy = x(24 - 2x) = 24x -$

$-2x^2$, где $0 < x < 12$ (ибо $24 - 2x > 0$). Таким образом, задача свелась к отысканию значения x, при котором $S(x)$ принимает наибольшее значение на интервале (0; 12). Найдем $S'(x) = 24 - 4x = 0$ при $x = 6$. Легко видеть, что $x = 6$ — единственная точка экстремума — максимума функции $S(x)$. Это означает, что на интервале (0; 12) $S(x)$ принимает наибольшее значение при $x = 6$, т.е. искомые размеры палисадника 6 м и $24 - 2 - 6 = 12$ м.▶

Найти интервалы монотонности и экстремумы функции:

8.41. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

8.42. $y = \frac{x}{\ln x}$.

8.43. $y = (2x+1)e^{-\frac{x}{2}}$.

8.44. $y = \frac{x^3}{1+x}$.

8.45. $y = x^3(x-1)$.

8.46. $y = \frac{x^3}{1+x^2}$.

8.47. $y = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

8.48. $y = (1+x^2)e^{-\frac{4x}{5}}$.

8.49. $y = x^3 e^{-\frac{3x^2}{2}}$.

8.50 $y = \sqrt{xe^{3x} + 1}$.

8.51. $y = \sqrt[4]{x^4 - 4x^3}$.

8.52. $y = x\ln x - 3x$.

8.53. $y = \ln(1 + 2\cos x)$.

8.54. $y = \operatorname{arctg}\frac{\ln x}{x}$.

8.55. $y = 2x^2 \ln x$.

8.56. $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

8.57. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{3+x}$.

8.58. $y = \cos(\ln x)$.

8.59. $y = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x}$.

8.60. $y = \sqrt{1 - 2\sin x} + \sqrt{1 + 2\sin x}$.

Найти наибольшее и наименьшее значение (глобальный максимум и минимум) функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

8.61. $f(x) = x^3 - 3x^2$; $[-1; 4]$.

8.62. $f(x) = x\ln x$; $[0,1; 1]$.

8.63. $f(x) = \frac{x}{2 + x^3}$; $[0; 3]$.

8.64. $f(x)=3\sin x+4\cos^3 x;\quad \left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right].$

8.65. $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x};\quad [-1;\ 1].$

8.66. $f(x)=\dfrac{2x-1}{2+x^2};\quad [-2;\ 0].$

8.67. $f(x)=2\sin 2x+3\cos 2x;\quad \left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right].$

8.68. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^4};\quad [-2;\ 0{,}5].$

Найти наибольшее или наименьшее значение (глобальный максимум или минимум) функции $y=f(x)$ на интервале $(a,\ b)$:

8.69. $y=-3x^4+6x^2;\ (-\sqrt{2};\ \sqrt{2}).$ **8.70.** $y=\dfrac{1+x}{3+x^2};\ (0;\ 2).$

8.71. $y=\dfrac{2+x^2}{1-x^2};\ \left(-\dfrac{1}{2};\ 1\right).$ **8.72.** $y=\operatorname{tg}^2 x;\ \left(-1;\ \dfrac{\pi}{2}\right).$

8.73. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2};\ \left(0;\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$ **8.74.** $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x};\ (-1;\ 1).$

8.75. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых сторон имеет периметр, равный 6 см. Найти среди них параллелепипед с наибольшим объемом и найти этот объем.

8.76. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном, при которых на облицовку стен и дна пойдет наименьшее количество материала. Объем бассейна V фиксирован.

8.77. Требуется огородить два участка: один — в форме правильного треугольника, другой — в форме полукруга. Длина изгороди фиксирована и равна P. Определить размеры участков (сторону треугольника и радиус полукруга) так, чтобы сумма площадей этих участков была бы наибольшей.

8.78. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник, основание которого лежит на основании треугольника, а две вершины — на боковых сторонах. Найти наибольшую площадь вписанного прямоугольника.

8.4. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба

Справочный материал

1. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх (вниз)* на промежутке, если для любых двух значений x_1, x_2 из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right).$$

Точки, разделяющие интервалы выпуклости, называются *точками перегиба.*

2. Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) на промежутке, то функция является *выпуклой вниз (вверх)* на этом промежутке.

3. Если x_0 – точка перегиба функции $y = f(x)$ и $f''(x_0)$ существует, то $f''(x_0) = 0$.

4. Если вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$.

5. Схема исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

1) найти вторую производную функции $f''(x)$;

2) найти точки, в которых вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует;

3) исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и наличии точек перегиба;

4) найти значения функции в точках перегиба.

8.79. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции $y = 4x^3 - 2x^4$.

Р е ш е н и е. В соответствии со схемой исследования (п. *5*), найдем $y' = 12x^2 - 8x^3$, $y'' = 24x - 24x^2 = 24x(1-x)$. Очевидно, $y'' = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Знаки второй производной y'' указаны на рис. **8.4**.

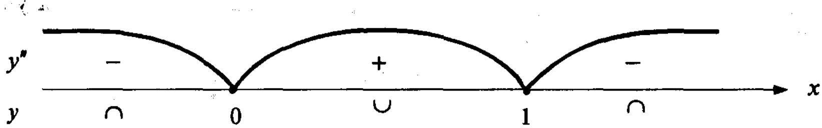


Рис. 8.4

Функция является выпуклой вверх на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$ (так как $f''(x) < 0$) и выпуклой вниз на интервале (0; 1), $(f''(x) > 0)$. $x = 0$ и $x = 1$ — точки перегиба, так как при переходе через них $f''(x)$ меняет свой знак.▶

8.80. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции $y = 5x^4 - 3x^5$.

Р е ш е н и е. $y' = 20x^3 - 15x^4$, $y'' = 60x^2 - 60x^3 = 60x^2(1 - x)$. Вторая производная обращается в нуль в тех же точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, что и в предыдущем примере. Однако, на этот раз знаки второй производной следующие (рис. **8.5**).

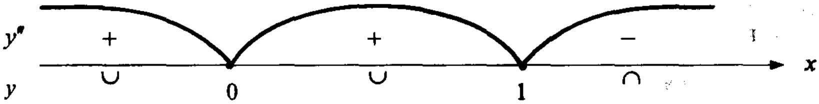


Рис. 8.5

Таким образом, функция выпукла вниз на всем интервале $(-\infty; 1)$, и точка $x = 0$ не является точкой перегиба. Нетрудно увидеть, что это точка экстремума (максимума) функции. Точка $x = 1$ является точкой перегиба. На интервале $(1; +\infty)$ функция является выпуклой вниз. ▶

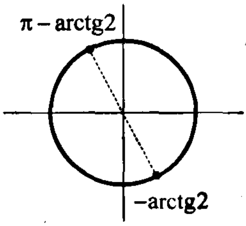


Рис. 8.6

8.81. Найти точки перегиба $y = \sin x + 2\cos x$.

Р е ш е н и е. Имеем $y' = \cos x - 2\sin x$, $y'' = -\sin x - 2\cos x$. Вторая производная обращается в нуль при выполнении равенства $\sin x = -2\cos x$, или $\operatorname{tg} x = -2$, т.е. в точках $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$. Рис. **8.6** показывает, что при $-\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n < x < \pi - \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$ $f''(x) < 0$ и функция является выпуклой вниз, а при $\pi - \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n < x < 2\pi - \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$ $f''(x) > 0$ и функция является выпуклой вверх. Точки $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$ — точки перегиба. ▶

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции:

8.82. $y = \dfrac{1}{6}x^3(x^2 - 5)$.

8.83. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

8.84. $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$.

8.85. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

8.86. $y = (x + 1)\operatorname{arctg} x$.

8.87. $y = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$.

8.88. $y=\frac{\ln x}{x^2}$.

8.89. $y=x^2e^{\frac{2}{x}}$.

8.90. $y=x^3\ln x+1$.

8.91. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

8.92. $y=\left(\frac{x^3}{6}-x^2\right)\ln x-\frac{5x^3}{36}+\frac{3x^2}{2}$.

8.93. $y=\frac{x^3}{3\sqrt[3]{x^3+2}}$.

8.5. Асимптоты. Исследование функций и построение их графиков

Справочный материал

1. Прямая l называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Асимптоты бывают вертикальными, горизонтальными и наклонными.

2. Прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)$ (правосторонний или левосторонний) равен $\pm\infty$.

Прямая $x = x_0$ может быть вертикальной асимптотой функции $y = f(x)$ в том случае, если x_0 — точка разрыва или граничная точка области определения.

3. Прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой*, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, то $y = b$ — *правосторонняя горизонтальная асимптота*, если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, то $y = b$ — *левосторонняя горизонтальная асимптота*.

4. Если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$, то прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$.

5. Общая схема исследования функций и построения графиков:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность — нечетность;
3) найти вертикальные асимптоты;
4) исследовать поведение функции в бесконечности; найти горизонтальные и наклонные асимптоты;

5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;

6) найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Исследование функции проводится одновременно с построением графиков.

8.94. Исследовать функцию $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение:

1. Область определения: $(-\infty;\, 1)\cup(-1;\, 1)\cup(1;\, +\infty)$. Точки $x=-1$ и $x=1$ — точки разрыва функции.

2. $f(-x)=-f(x)$, т.е. функция нечетная; ее график симметричен относительно начала координат и достаточно провести исследование функции на интервале $[0;\, +\infty)$.

3. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{2x}{1-x^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{2x}{1-x^2}=-\infty$.

Прямые $x=1$ и (в силу симметрии графика) $x=-1$ — вертикальные асимптоты.

4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{1-x^2}=0$. Прямая $y=0$ (ось абсцисс) — двусторонняя горизонтальная асимптота.

5. $y'=\dfrac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}>0$ при всех допустимых значениях x. Экстремумов нет, функция возрастает на интервалах $(-\infty;\, -1)$, $(-1;\, 1)$, $(1;\, +\infty)$.

6. $y''=\dfrac{4x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$, $y''=0$ при $x=0$. Знаки второй производной показаны на рис. 8.7.

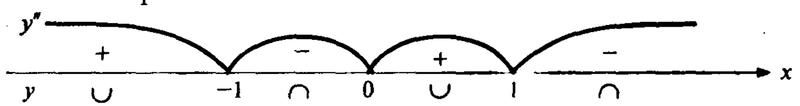


Рис. 8.7

Функция выпукла вниз на интервалах $(-\infty;\, -1)$ и $(0;\, 1)$ и выпукла вверх на интервалах $(-1;\, 0)$, $(1;\, +\infty)$. Хотя $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через три точки $x=-1$, $x=0$, $x=1$, но график функции имеет только одну точку перегиба $x=1$, ибо в двух других точках $x=-1$, $x=1$ функция не определена.

7. Точка пересечения графика с осями единственная — начало координат (0; 0).

График функции показан на рис. **8.8**.

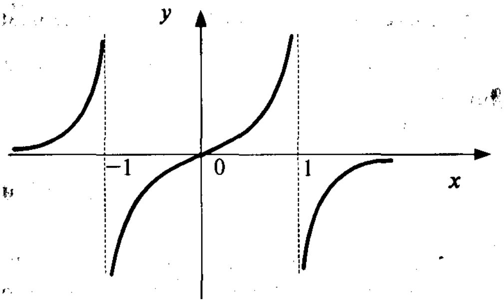


Рис. 8.8

8.95. Исследовать функцию $y=(x-1)e^x$ и построить ее график.

Р е ш е н и е:

1. Область определения $\left(-\infty;+\infty\right)$.

2. Функция общего вида, так как

$f(-x)=(-x-1)e^x \neq \pm f(x)$.

3. Так как функция определена и непрерывна на всей числовой оси, то вертикальных асимптот нет.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x=\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)}{e^{-x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$. Следовательно, прямая $y=0$ (ось абсцисс) является левосторонней горизонтальной асимптотой.

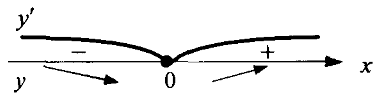


Рис. 8.9

5. $y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$. Производная обращается в нуль в точке $x=0$. Знаки производной показаны на рис. **8.9**.

Таким образом, функция убывает на интервале $(-\infty;0)$, возрастает на интервале $(0;+\infty)$; $x=0$ — точка минимума и $f_{\min}(0)=-1$.

6. $y''=e^x+xe^x=e^x(x+1)$; $y''=0$ при $x=-1$. Производная $y''<0$, если $x+1<0$, т.е. на интервале $\left(-\infty;-1\right)$. На интервале $\left(-1;+\infty\right)$ $y''>0$. Таким образом, функция выпукла вверх на интервале $\left(-\infty;-1\right)$ и выпукла вниз на интервале $\left(-1;+\infty\right)$; $x=-1$ — точка перегиба.

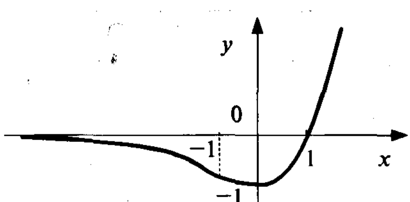


Рис. 8.10

7. Точка пересечения с осью ординат (0; –1), с осью абсцисс — (1; 0).

График функции изображен на рис. **8.10**. ▶

8.96. Исследовать функцию $y = x \ln x$ и построить ее график.

Р е ш е н и е:

1. Область определения функции — $(0; +\infty)$.

2. Так как при $x < 0$ функция не определена, рассмотрение вопроса о четности (нечетности) не имеет смысла.

3. $x = 0$ — единственная граничная точка области определения (точек разрыва нет). Имеем

$$\lim_{x\to 0+}(x\ln x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0.$$

Таким образом, вертикальных асимптот функция не имеет.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty$, горизонтальных асимптот нет. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x}=+\infty$, то нет и наклонных асимптот.

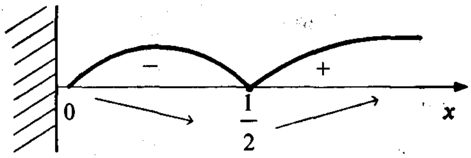


Рис. 8.11

5. $y' = \ln x + 1$; $y' = 0$ при $\ln x = -1$, т.е. в точке $x = \frac{1}{e}$. Знаки производной показаны на рис. **8.11**:

Функция убывает на интервале $\left(0; \frac{1}{e}\right)$, возрастает на интервале $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$. Точка $x = \frac{1}{e}$ — точка минимума и $f_{\min}\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

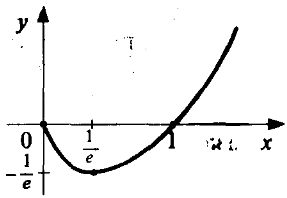


Рис. 8.12

6. $y'' = \frac{1}{x} > 0$ при всех $x > 0$. Таким образом, функция выпукла вниз на всей области определения.

7. Так как $x \neq 0$, то график не пересекает ось ординат. С осью абсцисс график пересекается в точке, задаваемой условием $x \ln x = 0$, т.е. $x = 1$.

График функции показан на рис. **8.12**.

8.97. Исследовать функцию $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е:

1. Область определения $(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$.

2. $f(-x)=-\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\neq\pm f(x)$, т.е. функция общего вида.

3. Единственная точка разрыва $x=0$;

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{y\to+\infty}ye^{y}=+\infty \text{ (ибо при } x\to0+\quad y=\frac{1}{x}\to+\infty\text{)};$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{y\to-\infty}ye^{y}=0 \text{ (см. пример } \mathbf{8.95}\text{)}.$$

Таким образом, прямая $x=0$ (ось ординат) является вертикальной асимптотой графика функции, но асимптотическое поведение функции наблюдается только справа от оси ординат.

4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=0$, т.е. ось абсцисс $y=0$ является двусторонней горизонтальной асимптотой.

5. $y'=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; $y'=0$ при $1+\dfrac{1}{x}=0$, т.е. при $x=-1$, причем знак производной противоположен знаку $1+\dfrac{1}{x}$. Таким образом, имеем знаки производной на интервалах числовой оси, показанные на рис. **8.13**.

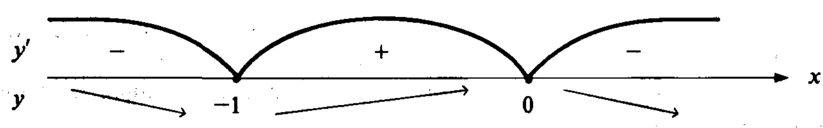


Рис. 8.13

Функция возрастает на интервале $(-1;\,0)$ и убывает на интервале $(-\infty;\,-1)$ и $(0;\,+\infty)$. Точка $x=-1$ — точка минимума: $f(-1)=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}$.

6. $y'' = -\dfrac{x^3 - 3x^2(x+1)}{x^6} e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{x+1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \dfrac{2x^2+4x+1}{x^5}$; $y''=0$

при $2x^2 + 4x + 1 = 0$, т.е. при $x = -1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Знаки второй производной показаны на рис. **8.14**.

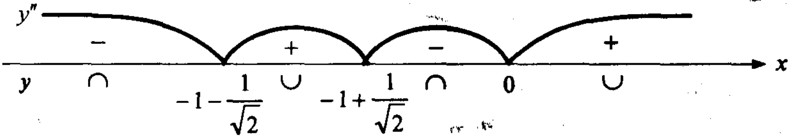


Рис. 8.14

Следовательно, функция является выпуклой вверх на интервалах $\left(-\infty;\, -1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}};\, 0\right)$, выпуклой вниз на интервалах $\left(-1-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\, -1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $(0;+\infty)$.

Точки $x = -1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ являются точками перегиба.

2. Точек пересечения с осями координат график функции не имеет.

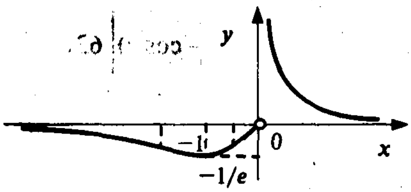


Рис. 8.15

График представлен на рис. **8.15**.

8.98. Исследовать функцию $y = \sqrt{1-\cos^3 x}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е :

1. Область определения $(-\infty;\, +\infty)$, так как неравенство $1 - \cos^3 x \geq 0$ выполняется при всех действительных значениях x.

2. Так как $\cos x$ — функция четная, то четной является и рассматриваемая функция.

3. Так как функция непрерывна при всех действительных значениях x, то вертикальных асимптот нет.

4. Пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{1-\cos^3 x}$ не существуют (ни конечные, ни бесконечные). Функция не имеет ни горизонтальных, ни наклонных асимптот.

5. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1-\cos^3 x}}(-3\cos^2 x)(-\sin x) = \dfrac{3\cos^2 x \sin x}{\sqrt{1-\cos^3 x}}$ (*)

Производная обращается в нуль при $\cos x = 0$, т.е. в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, а также в точках, в которых $\sin x = 0$, но $\cos x \neq 1$, т.е. $x = \pi + 2\pi n$. В точках $x = 2\pi n$ величина (*) не существует. Знаки производной совпадают со знаками $\sin x$ (рис. 8.16)

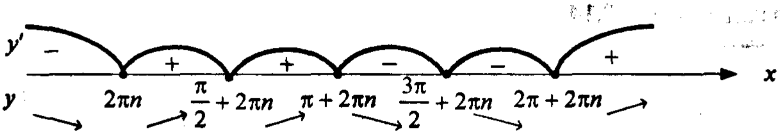


Рис. 8.16

Таким образом, в точках $x = 2\pi n$ функция имеет минимум, в точках $x = \pi + 2\pi n$ — максимум. Точки вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$ не являются точками экстремума.

6. $$y'' = \frac{\cos x(1-\cos x)\left[63\cos^2 x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}\cos^2 x + 48\right]}{4(1-\cos^3 x)^{\frac{3}{2}}}$$

(предлагаем читателю проделать соответствующие выкладки самостоятельно); $y'' = 0$ при $\cos x = 0$, т.е. в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и не существует в точках, в которых $\cos x = 1$, т.е. в точках $x = 2\pi n$. Знак y'' совпадает со знаком $\cos x$. Точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ являются точками перегиба.

7. Пересечение графика с осью ординат происходит в начале координат. С осью абсцисс график пересекается в точках $x = 2\pi n$. Заметим, что функция является периодической с периодом $T = 2\pi$.

График функции показан на рис. 8.17. ▶

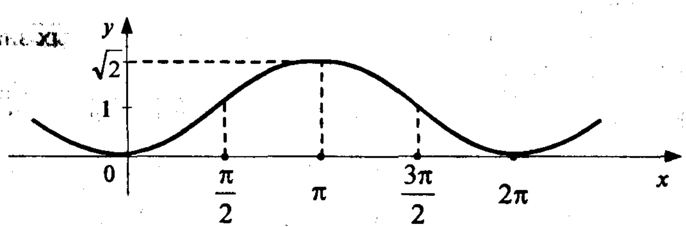


Рис. 8.17

8.99. Исследовать функцию $y=\dfrac{x}{2}-\operatorname{arctg} x$ и построить ее график.

Р е ш е н и е:

1. Область определения $(-\infty;+\infty)$.

2. $f(-x)=-\dfrac{x}{2}-\operatorname{arctg}(-x)=-\dfrac{x}{2}+\operatorname{arctg} x=-f(x)$; функция нечетная. В силу симметрии графика относительно начала координат достаточно провести исследование на интервале $[0;+\infty)$.

3. Функция непрерывна при всех действительных значениях x; вертикальных асимптот нет.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2}-\operatorname{arctg} x\right)=+\infty$. Горизонтальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}-\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\operatorname{arctg} x\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, правосторонняя наклонная асимптота имеет вид: $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{2}$, в силу симметрии графика левосторонняя — $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{2}$.

5. Производная существует при всех значениях x и обращается в нуль при $x^2-1=0$, т.е. при $x=\pm 1$. Знаки производной указаны на рис. **8.18**.

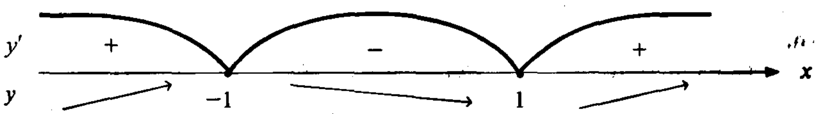


Рис. 8.18

Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$, убывает на интервале $(-1;1)$; $x=-1$ точка максимума и $f_{\max}(-1)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$; $x=1$ — точка минимума и $f_{\min}(1)=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$.

6. $y'' = \dfrac{2x}{1+x^2}$; $y''=0$ при $x = 0$, $y''>0$ при $x>0$ и $y''<0$. Функция выпукла вверх на интервале $(-\infty;\ 0)$ и выпукла вниз на интервале $(0;\ +\infty)$, $x=0$ — точка перегиба.

7. $f(0) = 0$, следовательно, график пересекает ось ординат в начале координат (это следует и из нечетности функции). Точки пересечения графика с осью абсцисс задаются равенствами: $\dfrac{x}{2} = \operatorname{arctg} x$. Решить точно эти уравнения нельзя, но для схематического построения графика это не существенно.

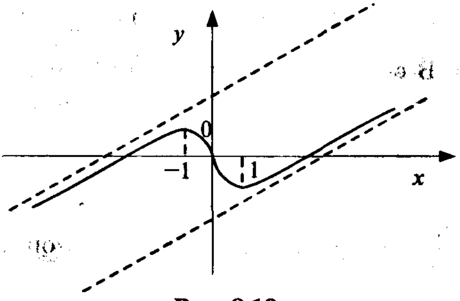


Рис. 8.19

Схематически график функции показан на рис. **8.19**. ▶

Найти асимптоты графика функции:

8.100. $y = \dfrac{1-x^3}{(2-x)(1+3x^2)}$.

8.101. $y = \dfrac{2+xe^x}{3+e^x}$.

8.102. $y = \dfrac{(2x^2-1)}{x}e^{-x}$.

8.103. $y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

8.104. $y = \dfrac{\arccos x}{x^2 - \dfrac{\pi}{4}}$.

8.105. $y = \sqrt{3x^3 - x^2}$.

8.106. $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$.

8.107. $y = \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$.

Исследовать функции и построить их графики:

8.108. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

8.109. $y = x^2(x-4)^2$.

8.110. $y = \dfrac{2x}{2+x^3}$.

8.111. $y = (x+1)e^{-x}$.

8.112. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

8.113. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

8.114. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$

8.115. $y=\sqrt[3]{1-\ln x}.$

8.116. $y=e^{\frac{1}{x}}.$

8.117. $y=xe^{\frac{1}{x}}.$

8.118. $y=\dfrac{1}{1-e^x}.$

8.119. $y=\sin x+\cos^2 x.$

8.120. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x^2+1)}}.$

8.121. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$

8.122. $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}.$

8.123. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}.$

8.124. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}.$

8.6. Применение производной в задачах с экономическим содержанием

Справочный материал

1. Функция издержек $C(x)$ определяет затраты, необходимые для производства x единиц данного продукта. Прибыль $P(x) = D(x) - C(x)$, где $D(x)$ — доход от производства x единиц продукта.

Средние издержки $A(x)$ при производстве x единиц продукта есть $\dfrac{C(x)}{x}$. Предельные издержки $M(x) = C'(x)$.

2. Оптимальным значением выпуска для производителя является то значение x единиц продукта, при котором прибыль $P(x)$ оказывается наибольшей.

8.125. Функция издержек имеет вид $C(x)=100+\dfrac{1}{2}x^2$, а доход при производстве x единиц товара определяется следующим образом:

$$D(x)=\begin{cases}4000x, & \text{если } x\le 100,\\ 4000(100+\sqrt{x-100}), & \text{если } x>100.\end{cases}$$

Определить оптимальное для производителя значение выпуска x_0.

Р е ш е н и е. Функция прибыли имеет вид:

$$P(x)=\begin{cases}-100+4000x-\dfrac{1}{2}x^2, & \text{если } x\le 100,\\ 399900+400\sqrt{x-100}-\dfrac{1}{2}x^2, & \text{если } x>100.\end{cases}$$

Найдем производную функции прибыли:

$$P'(x)=\begin{cases}4000-2x, & \text{если } x\le 100,\\ \dfrac{2000}{\sqrt{x-100}}-x, & \text{если } x>100.\end{cases}$$

Очевидно, $P'(x)>0$ при $x<100$, так что наибольшее значение прибыли на отрезке [0; 100] есть P (100) = 399 900. Найдем теперь наибольшее значение прибыли на интервале $(100;+\infty)$. Имеется одна критическая точка x = 200. При этом $P'(x)>0$ при $100<x<200$ и $P'(x)<0$ при $x>200$, т.е. x = 200 — максимальное значение $P(x)$ на интервале $(100;+\infty)$.

$P(200)=419\,900>P(100)$, таким образом, $x_{\text{опт}}=200$ (ед.). ▶

8.126. Функция издержек имеет вид $C(x)=10+\dfrac{x^2}{10}$. На начальном этапе фирма организует производство так, чтобы минимизировать средние издержки $A(x)$. В дальнейшем на товар устанавливается цена, равная 4 усл. ед. за единицу. На сколько единиц товара фирме следует увеличить выпуск?

Р е ш е н и е. Средние издержки $A(x)=\dfrac{10}{x}+\dfrac{x}{10}$ принимают минимальное значение при $x=10$. Предельные издержки $M(x)=\dfrac{x}{5}$. При установившейся цене $p=4$ оптимальное значение $P(x)$ выпуска задается условием максимизации прибыли:

$P(x)=4x-C(x)\to\max$, т.е. $4=M(x)$, откуда $x_{\text{опт}}=20$. Таким образом, производство следует увеличить на 10 единиц. ▶

8.127. Фирма минимизирует средние издержки, которые получаются в результате равными 30 руб./ед. Чему равны при этом предельные издержки?

Определить оптимальное для производителя значение выпуска x_0, при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене за единицу p и известен вид функции издержек $C(x)$:

8.128. $C(x)=13+2x+x^3$; $\quad p=14$.

8.129. $C(x)=10+x+\dfrac{1}{3}x\sqrt{x}$; $\quad p=8$.

8.130. $C(x)=8+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{10}2x$; $\quad p=1{,}85$.

Найти максимальную прибыль, которую может получить фирма-производитель, при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене за единицу p и известен вид функции издержек $C(x)$:

8.131. $C(x)=10+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}$; $\quad p=10{,}5.$

8.132. $C(x)=8+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^3}{8}$; $\quad p=6{,}5.$

8.133. $C(x)=2x+\dfrac{1}{20}e^{\frac{x}{2}}$; $\quad p=40.$

При производстве монополией x единиц товара цена за единицу $p(x)$. Определить оптимальное для монополии значение выпуска x_0 (предполагается, что весь производственный товар реализуется), если издержки $C(x)$ имеют вид:

8.134. $C(x)=10+x+\dfrac{x^2}{2}$; $\quad p(x)=8-\sqrt{x}.$

8.135. $C(x)=10+(x-1)^3$; $\quad p(x)=10-\dfrac{4}{3}\sqrt{x}.$

8.136. $C(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^3}{8}$; $\quad p(x)=8-\dfrac{x}{2}.$

8.137. Монополия устанавливает фиксированную цену $p = 380$ за единицу товара. Издержки при производстве x единиц товара равны $C(x) = 292x + x^2$. При этом количество реализуемого товара $K(x)$ зависит от x следующим образом: $K(x)=x+(\sqrt{x_0}-\sqrt{x})$. Определить значение x, при котором монополия получит максимальную прибыль.

8.138. Монополия производит фиксированное количество x единиц товара и устанавливает на единицу товара цену $p > p_0$. Количество реализованного товара K зависит от p следующим образом (p_0 — цена, при которой будет реализован весь товар):

$$K(p)=xe^{p_0-p} \qquad (p_0<1).$$

Определить значение p, при котором монополия получит максимальную прибыль.

8.139. Решить задачу **8.138** при условии, что

$$K(p)=\frac{x}{(1+p-p_0)^2} \qquad \left(p_0<\frac{1}{2}\right).$$

8.140. На начальном этапе производства фирма минимизирует средние издержки, причем функция издержек имеет вид

$C(x) = 10 + 2x + \frac{5}{2}x^2$. В дальнейшем цена на единицу товара устанавливается равной $p = 37$. На сколько единиц товара фирме следует увеличить выпуск? На сколько при этом изменятся средние издержки?

8.141. Функция издержек имеет вид $C(x) = 40x + 0{,}08x^3$. Доход от реализации единицы продукции равен 200. Найти оптимальное для производителя значение выпуска продукции.

8.142. Зависимость объема выпуска (в денежных единицах) продукции V от капитальных затрат x определяется функцией $V(x) = \frac{3}{4}\ln(1 + x^3)$. Найти интервал значений x, на котором увеличение капитальных затрат неэффективно.

8.143. Считается, что увеличение реализации y от затрат на рекламу x (млн руб.) определяется соотношением: $y = 0{,}1\sqrt{x}$. Доход от реализации единицы продукции равен 20 тыс. руб. Найти уровень рекламных затрат, при котором фирма получит максимальную прибыль.

8.144. Количество реализуемой монополией продукции x в зависимости от цены p за единицу определяется соотношением $x = x_0\left(\sqrt{\frac{p_0}{p}} - 1\right)$ $(p < p_0)$. Найти значение цены p, при котором монополия получит наибольшую прибыль.

8.145. Доход от производства продукции с использованием x единиц ресурсов составляет величину $400\sqrt{x}$. Стоимость единицы ресурсов составляет 10 усл. ед. Какое количество ресурсов следует приобрести, чтобы прибыль была наибольшей?

8.146. Функция издержек имеет вид $C(x) = x + 0{,}1x^2$. Доход от реализации единицы продукции равен 50. Найти максимальное значение прибыли, которое может получить производитель.

8.147. Зависимость дохода монополии от количества выпускаемой продукции x определяется как $D(x) = 100x - 1000\sqrt{x}$ $(400 \le x \le 900)$. Функция издержек на этом промежутке имеет вид: $C(x) = 50x + \frac{4}{5}x\sqrt{x}$. Найти оптимальное для монополии-производителя значение выпуска продукции.

8.148. Цена на продукцию монополии-производителя устанавливается в соответствии с соотношением, идентифицируемом как

$p = p_0(1-0{,}2\sqrt{x})$. При каком значении выпуска продукции доход от ее реализации будет наибольшим?

8.149. Функция издержек $C(x)$ имеет вид: $C(x) = 2x,\ x \le 100$;

$C(x) = 200 + p(x-100)^2,\ x > 100$. В настоящий момент уровень выпуска продукции $x = 200$. При каком условии на параметр p фирме выгодно уменьшить выпуск продукции, если доход от реализации единицы продукции равен 50?

Задачи для повторения

8.150. Может ли к функции $y = \sqrt[3]{e^{\sqrt{x}} - 1}$ на промежутке $[1;\ 2]$ быть применена:

а) теорема Ролля; б) теорема Лагранжа?

8.151. Функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой и удовлетворяет условию $|f'(x)| \le 1$ при всех x. Решить уравнение

$f(x) - f(-x) = 2x + 2x^3$.

Найти пределы:

8.152. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x} + e^{3x} - 8x}{x^2}$. **8.153.** $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{2-x}\right)}{x-2}$.

8.154. $\lim\limits_{x\to 0} (\ln x)\left(\sqrt{\cos x} - 1\right)$. **8.155.** $\lim\limits_{x\to 0+} (1-\ln x)^{\sin x}$.

8.156. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} - \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}\right]$.

Найти экстремумы и интервалы возрастания функций:

8.157. $y = (2x+3)e^{-2x}$. **8.158.** $y = \dfrac{7+x^2}{3+x}$.

8.159. $y = \sqrt{1+\ln x} + \sqrt{1-\ln x}$. **8.160.** $y = x^{x^3}$.

8.161. $y = \ln\left(\operatorname{arcctg}(1+x^2)\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке $[-1/4;\ 2]$:

8.162. $y = 5x^3 - \dfrac{15}{2}x^2$. **8.163.** $y = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{при } x \ne 0; \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на интервале $(0;\ 2)$:

8.164. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$. **8.165.** $y=\dfrac{\ln x}{2x-1}$.

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

8.166. $y=\sqrt[3]{x-x^2}$. **8.167.** $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

Найти асимптоты графиков функций:

8.168. $y=\dfrac{2-\ln x}{2+\ln x}$. **8.169.** $y=\dfrac{3+x^2}{1-x}$. **8.170.** $y=\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$.

Исследовать функции и построить их графики:

8.171. $y=(x-1)^2(x+1)^2$. **8.172.** $y=\sin\sqrt{1-x^2}$.

8.173. $y=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}$. **8.174.** $y=\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}$.

Контрольные задания по главе 8 «Приложение производной»

№	*Вариант 8.1*	*Вариант 8.2*	*Вариант 8.3*
	Найти пределы:		
1	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}+1)\ln x}{\sqrt{3+x(3^x-2^x)-2}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2-6)\sin x}{(1+\sqrt{x})\ln(1+x)}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})(\sqrt{1+x}-1)}{e^x-e^{-x}}$
2	$\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{x}}$
	Исследовать функции $y=f(x)$ и построить их графики:		
3	$y=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x^2}}$	$y=\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x^2}}$	$y=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$
4	$y=\sqrt[3]{2x^3-6x^2}$	$y=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$	$y=\sqrt[3]{8x^3-12x^2}$
	При производстве первых двадцати единиц продукции издержки имеют вид $C(x)=px$. Далее при производстве каждой следующей единицы продукции издержки возрастают на 2 усл. ед. Цена единицы продукции равна a усл. ед. Найти оптимальное значение выпуска продукции.		
5	$p=5$; $a=40$	$p=6$; $a=23$	$p=8$; $a=281$

Тест 8

1. Правило Лопиталя не может быть применено для нахождения предела:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x - x}{x^2-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{1+x}}{x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

2. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. Выяснить, к какой из приведенных ниже функций не может быть применена теорема Лагранжа на отрезке $[0; 2]$:

1) $y=\dfrac{2x}{x-2}$; 2) $y=\dfrac{2x}{x-3}$; 3) $y=\dfrac{x-2}{x+2}$; 4) $y=\ln(1+\sqrt{x})$.

4. Среди перечисленных функций убывает на всей области определения функция:

1) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$; 2) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$; 3) $y=\dfrac{1-x^2}{x}$; 4) $y=x^3-x^2$;

5) $y=x^3+x^2$.

5. Найти длину интервала возрастания функции $y = 3x - x^3$.

6. Выяснить, какое из приведенных утверждений является неверным:

1) в точке экстремума производная функции равна нулю или не существует;
2) в точке экстремума функция меняет знак;
3) в точке экстремума производная меняет знак;
4) в точке, в которой производная равна нулю или не существует,

может не быть экстремума.

7. Найти точку x_0 максимума функции $y = x^2(x-4)^2$.

8. Среди перечисленных функций горизонтальную асимптоту имеет функция:

1) $y=3^x-2^x$; 2) $y=3^x-x^2 2^x$;

3) $y=xe^{-x}$; 4) $y=\dfrac{2+x^2}{1+x\sqrt{x}}$.

9. Следующее утверждение из перечисленных является всегда верным:
1) в точке перегиба всегда существует конечная 1-я производная;
2) в точке перегиба существует конечная 2-я производная;
3) точка перегиба является точкой экстремума 1-й производной дважды дифференцируемой функции;
4) точка перегиба является точкой экстремума 2-й производной функции.

10. Выяснить, график какой функции изображен на рис. **8.18**:

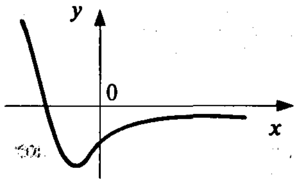


Рис. 8.18

1) $y=(x+1)e^{x}$;
2) $y=-(x+1)e^{-x}$;
3) $y=(x+1)e^{-x}$;
4) $y=-(x+1)e^{x}$.

11. Выяснить, какой из графиков, приведенных на рис. **8.19**, есть график функции $y=\dfrac{\ln x}{x}$:

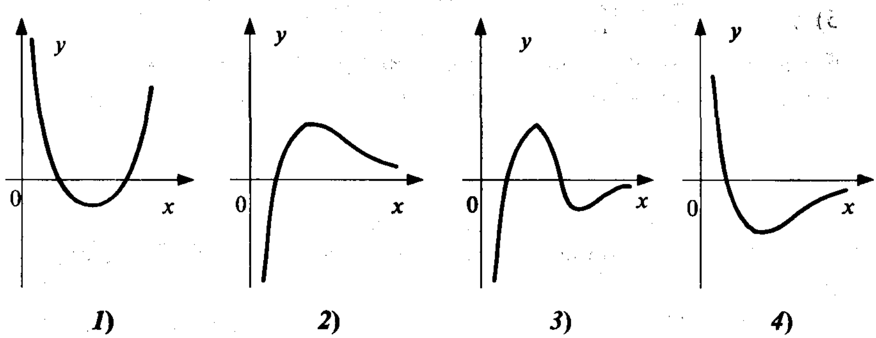


Рис. 8.19

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + x^2$ на отрезке $[-1; 2]$.

13. Требуется огородить прямоугольную площадку площадью 600 кв. м и перегородить ее таким же забором пополам. При каких размерах a, b площадки расход материала на забор будет наименьшим?

14. Если изобразить на одном рисунке графики предельных и средних издержек, то:

1) они будут пересекаться в точке минимума средних издержек;

2) они будут пересекаться в точке минимума предельных издержек;

3) они будут пересекаться в точке, в которой предельные издерж-
ки равны нулю;

4) график средних издержек будет в любом случае выше графика
предельных издержек.

15. Функция издержек имеет вид

$$C(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{5} & \text{при } x \le 20; \\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{8}(x-20)^2 & \text{при } x > 20. \end{cases}$$

При какой цене p за единицу товара оптимальное значение выпуска $x_{опт} = 30$?

Глава 9
Дифференциал функции

Справочный материал

1. Приращение Δy дифференцируемой функции $y = f(x)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \qquad \textbf{(9.1)}$$

где $f'(x)$ — производная функции $f(x)$; Δx — приращение независимой переменной; $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая величина.

2. Дифференциалом (первого порядка) *функции* $y = f(x)$ называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной:

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad \textbf{(9.2)}$$

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной:

$$dx = \Delta x. \qquad \textbf{(9.3)}$$

Поэтому дифференциал функции

$$dy = f'(x)dx. \qquad \textbf{(9.4)}$$

***3. Свойства дифференциала*:**

1) $dc = 0$, где $c = \text{const}$. 2) $d(cu) = c\,du$.

3) $d(u \pm v) = du \pm dv$. 4) $d(uv) = v\,du + u\,dv$. **(9.5)**

5) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$. 6) $dy = f'(u)\,du$.

4. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

При достаточно малых значениях Δx приращение функции $\Delta y \approx dy$, т.е.

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad \textbf{(9.6)}$$

Чем меньше значение Δx, тем точнее формула **(9.6)**.

Если аргумент x вычислен с относительной погрешностью $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, то функция $f(x)$ — с относительной погрешностью $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, определяемой по формуле

$$\delta_y = |E_x(y)|\delta_x, \qquad (9.7)$$

где $|E_x(y)| = \frac{x f'(x)}{f(x)}$ — эластичность функции (по абсолютной величине).

*5. **Дифференциалы высших порядков.***

Дифференциалом второго порядка (или *вторым дифференциалом*) d^2y функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, т.е.

$$d^2y=d(dy). \qquad (9.8)$$

Дифференциалом n-го порядка d^ny называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции, т.е.

$$d^ny = d\,(d^{n-1}y). \qquad (9.9)$$

9.1. Найти дифференциал функции $y = x^2 + x + 1$ в точке $x = 2$ двумя способами: *а*) выделяя линейную относительно Δx часть приращения функции Δy; *б*) по формуле $dy = f'(x)\Delta x$.

Решение:

а) Приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(2 + \Delta x) - f(2) = ((2 + \Delta x)^2 + (2 + \Delta x) + 1) - (2^2 + 2 + 1) = 5\Delta x + \Delta x^2$. Выделяя линейную относительно Δx часть приращения функции, получаем, что $dy = 5\Delta x = 5dx$.

б) Дифференциал функции $dy = (x^2 + x + 1)'dx = (2x + 1)dx = (2\cdot 2 + 1)dx = 5dx$. ▶

9.2. Найти $1{,}005^{0,5}$; $1{,}03^5$.

Решение. Получим вначале приближенную формулу для вычисления любой n-й степени. Полагая $f(x) = x^n$, найдем $f'(x) = nx^{n-1}$ и в соответствии с **(9.6)**: $(x + \Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x$. В данном примере для $x = 1$:

$$1{,}005^{0,5} \approx 1 + 0{,}5\cdot 0{,}005 = 1{,}0025;\ 1{,}03^5 \approx 1 + 5\cdot 0{,}03 = 1{,}15. ▶$$

9.3. Используя понятие дифференциала, вычислить приближенно arcsin 0,51.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Полагая $x = 0{,}5$, $\Delta x = 0{,}01$ и применяя формулу **(9.6)**, имеем:

$$\arcsin(x+\Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)'\Delta x = \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x.$$

Следовательно,

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \pi/6 + 0{,}011 = 0{,}535. \blacktriangleright$$

9.4. С какой точностью может быть вычислен объем шара, если его радиус измерен с точностью до 1%?

Р е ш е н и е. Объем шара радиуса x равен $f(x) = (4/3)\pi x^3$. Найдем $f'(x) = 4\pi x^2$, $|E_x(f)| = \left|\dfrac{f'(x)x}{f(x)}\right| = \dfrac{x \cdot 4\pi x^2}{(4/3)\pi x^3} = 3$ и по формуле **(9.7)** $\delta_y \approx 3\delta_x = 3 \cdot 1 = 3$ %.$\blacktriangleright$

9.5. Найти количество лет, в течение которых первоначальная сумма вклада в банк увеличится в 2 раза, если ставка банковского процента (за год) равна r.

Р е ш е н и е. Найдем количество лет T, в течение которых первоначальная сумма вклада увеличится в 2 раза. Так как за год вклад увеличится в $(1 + r/100)$ раз, то за T лет вклад увеличится в $(1 + r/100)^T$ раз. Таким образом, необходимо решить уравнение $(1 + r/100)^T = 2$. Логарифмируя, получаем $T \ln(1 + r/100) = \ln 2$, откуда $T = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1+\dfrac{r}{100}\right)}$.

Для приближенного вычисления значения $\ln(1 + r/100)$ используем понятие дифференциала. Получим вначале приближенную формулу для вычисления $\ln x$. Полагая $f(x) = \ln x$, найдем $f'(x) = 1/x$ и в соответствии с **(9.6)** $\ln(x+\Delta x) \approx \ln x + \dfrac{\Delta x}{x}$. В данном примере для $x = 1$, $\Delta x = r/100$ получим $\ln(1 + r/100) = \ln 1 + r/100 = r/100$. Таким образом, $T \approx 100 \ln 2/r$. Так как $\ln 2 \approx 0{,}7$, получаем, что время удвоения вклада $T \approx 70/r$ (лет). $\blacktriangleright$

9.6. Найти dy и d^2y, если $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Р е ш е н и е:

$$dy = f'(x)\,dx = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' dx = \frac{1-\ln x}{x^2}dx; \quad d^2y = d(dy) = d\left(\frac{1-\ln x}{x^2}dx\right) =$$

$$= \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' dx^2 = \left(\frac{-x-(1-\ln x)2x}{x^4}\right)dx^2 = \frac{2\ln x - 3}{x^3}dx^2. \blacktriangleright$$

Найти приращения функций и их дифференциалы и вычислить их значения при заданных x и Δx:

9.7. $y = 2x^3 + 5x^2$, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$. **9.8.** $y = x^2 + 5x$, $x = 2$, $\Delta x = 0{,}001$.

9.9. $y = 1 - x^3$, $x = 1$, $\Delta x = -1/3$.

Найти дифференциалы первого порядка функций и вычислить их значения при заданных x и Δx:

9.10. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $x = 9$, $\Delta x = -0{,}01$. **9.11.** $y = \operatorname{tg} x$, $x = \dfrac{\pi}{3}$, $\Delta x = \dfrac{\pi}{180}$.

9.12. $y = x \ln x$, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}01$.

Найти дифференциалы первого порядка функций:

9.13. $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{49 - x^2} + \dfrac{49}{2}\arcsin\dfrac{x}{7}$. **9.14.** $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}$.

9.15. $y = \arcsin x^2$.

9.16. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

9.17. $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

9.18. $y = \sin^3 2x$.

9.19. $y = \ln(\sin\sqrt{x})$.

9.20. $y = e^{-\frac{1}{\cos x}}$.

9.21. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

9.22. $y = \dfrac{a}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

9.23. $y = x \ln x$.

9.24. $y = \arcsin\sqrt{x}$.

9.25. $y = x^3 + x\sqrt{x}$.

9.26. $y = \operatorname{arctg}(x^2 + 1)$.

9.27. $y = x^2 \sin\sqrt{x}$.

9.28. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$.

9.29. $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$.

9.30. $y = \dfrac{x}{1-x}$.

9.31. $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

9.32. $y = x\ln x - x$.

Найти дифференциалы второго порядка функций:

9.33. $y = 4x^5 - 7x^2 + 3$.

9.34. $y = \cos 2x$.

9.35. $y = 4^{-x^2}$.

9.36. $y = \sin 2x$.

9.37. $y = \operatorname{tg} 2x$.

9.38. $y = (x-1)^{0,5}$.

9.39. $y = x^2 \ln x$.

9.40. $y = x \sin x$.

Используя понятие дифференциала, приближенно вычислить:

9.41. $e^{0,2}$. **9.42.** $\ln 1,02$. **9.43.** $17^{0,25}$.

9.44. $\arcsin 0,54$. **9.45.** $1,02^{1/3}$. **9.46.** $\cos 151°$.

9.47. $\sin 29°$. **9.48.** $\operatorname{arctg} 1,05$. **9.49.** $\lg 11$.

9.50. Показать, что относительная погрешность в 1% при определении длины радиуса влечет за собой относительную погрешность приблизительно в 2% при вычислении площади круга и поверхности шара.

9.51. Найти время удвоения вклада в банк, если ставка банковского процента за год составляет 5% годовых.

Задачи для повторения

9.52. Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ — дифференцируемые функции. Найти дифференциал функции y, если $y = uvw$.

9.53. Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ — дважды дифференцируемые функции. Найти d^2y, если $y = uvw$.

9.54. Уравнение движения задано формулой $y = 4r^2 + 3t + 2$, где t измеряется в секундах и y в метрах. Для момента времени $t = 2(c)$ определить Δy — приращение пути и dy — дифференциал пути и сравнить их при $\Delta t = 0,01(c)$.

9.55. Найти:

а) $d(1/x^7)$; б) $d(\operatorname{tg}x + x^2\cos x)$; в) $d\ln(5-\sqrt{x})$; г) $d(\cos(\ln x) - \sin(\ln x))$.

9.56. Найти d^2y, если:

а) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg}x$; б) $y = \operatorname{ctg}x$; в) $y = 1/\left(\sqrt{1-x^2}\right)$; г) $y = e^{-x^4}$.

9.57. Найти d^ny, если:

а) $y = e^{3x}$; б) $y = \sin^2 x$; в) $y = \ln x$.

9.58. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно $\sqrt[5]{1,03}$.

9.59. Используя понятие дифференциала, вычислить приближенно величину вклада в банке через 4 года, если ежегодно вклад увеличивается на 2%, а первоначальная сумма вклада равна 1000 р.

9.60. Считая комнату правильной кубической формы с длиной стороны $2,3 \pm 0,02$ м, найти с помощью дифференциала абсолютную и относительную погрешность при вычислении объема этой комнаты.

Контрольные задания
по главе 9 «Дифференциал функции»

№	*Вариант 9.1*	*Вариант 9.2*	*Вариант 9.3*
1	Найти Δy и dy функции $y = 3x + x^2$ при:		
	$x = 2$, $\Delta x = 0{,}001$	$x = 3$, $\Delta x = 0{,}002$	$x = 1$, $\Delta x = 0{,}003$
2	Найти dy и d^2y функций:		
	$y = e^{-x} \cdot x^2$	$y = (1 - x^2)^{0{,}5}$	$y = \sin x \cdot \ln x$
3	Вычислить приближенно с помощью дифференциала:		
	а) $\sqrt{4{,}08}$; *б*) $e^{0{,}015}$	*а*) $\sqrt{8{,}94}$; *б*) $\sin(\pi + 0{,}01)$	*а*) $\sqrt[3]{8{,}012}$; *б*) $\ln 0{,}99$
4	Известно, что $x \approx x_0$ и $x^3 - x \approx 0$. С какой точностью выполняется приближенное равенство $x \approx x_0$, если $x^3 - x \approx 0$ выполняется с точностью 0,001 и дополнительно известно, что:		
	$x_0 = 0{,}5$	$x_0 = 0$	$x_0 = 1$
5	На сколько процентов увеличится $y = x^{0{,}75}$, если x увеличится на:		
	2 %	3 %	1 %
6	Найти время удвоения вклада в банк, если ежегодно вклад увеличивается на:		
	3,5 %	5 %	10 %

Тест[1] 9

1. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = 3x^2 - 4x$ при $x = 5$ и $\Delta x = 0{,}1$.

2. Дано уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0: $y = 3x + 5$. Найти df в точке x_0, если $dx = 1$.

3. Найти dy функции $y = x \ln x$ и вычислить его значение при $x = e$, $\Delta x = 1$.

4. Найти dy функции $y = \dfrac{\ln x}{x}$ и вычислить его значение при $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

5. Вычислить приближенно $\ln 1{,}05$.

6. Вычислить приближенно $10^{1/3}$.

7. На сколько процентов увеличится площадь круга, если его радиус увеличится на 1 %?

8. На сколько метров изменится сторона квадрата, если его площадь увеличилась от 25,0 м^2 до 25,5 м^2?

9. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара, чтобы его объем можно было определить с точностью до 6 %?

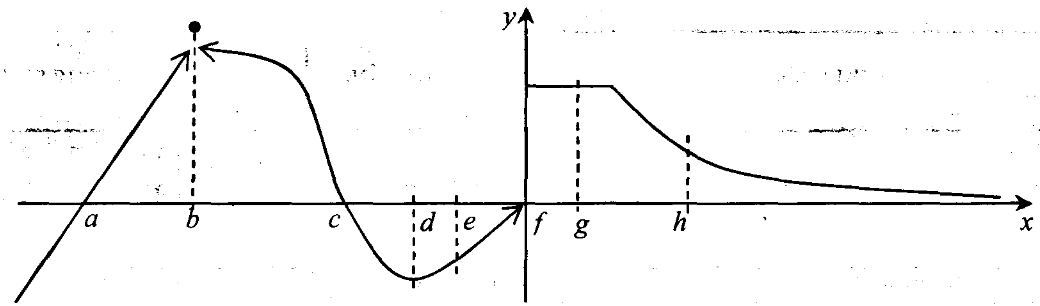
10. Найти d^2y функции $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и вычислить его значение при $x = 0{,}6$; $\Delta x = 0{,}32$.

---

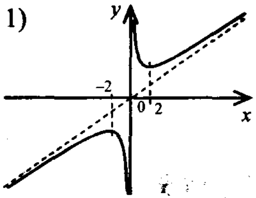
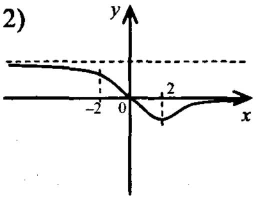
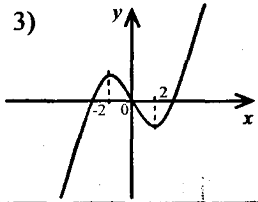
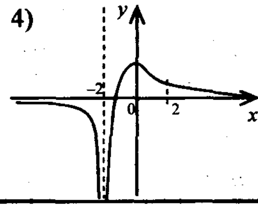
[1] В заданиях 5—9 использовать понятие дифференциала.

Учебно-тренировочные тесты по дисциплине «Математический анализ», часть 1 (разделы II и III)

№	*Тест МА – 1.1*	*Тест МА – 1.2*	*Тест МА – 1.3*
1	Найти область определения функции:		
	$y=2^x+\dfrac{5}{\sqrt{x^2-9}}$	$y=\log_2(x+3)+\dfrac{\sqrt{x-3}}{5}$	$y=\log_2(5-x)+\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{2}$
	Ответы: 1) $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$; 2) $[-3;3]$; 3) $(-\infty;-3)$; 4) $(-\infty;-3]$; 5) $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$; 6) $(-3;3)$; 7) $(3;+\infty)$; 8) $[3;+\infty)$		
2	Найти значение параметра a, при котором на всей числовой прямой непрерывна функция:		
	$f(x)=\begin{cases}\log_2(4-x) & \text{при} \quad x\le 3,\\ x^2+ax & \text{при} \quad x>3\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}x^2+2 & \text{при} \quad x\le a,\\ 4x-2 & \text{при} \quad x>a\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}3^x-a & \text{при} \quad x\le 0,\\ \sin x & \text{при} \quad x>0\end{cases}$
3	Указать функции, которые в точке $x=0$ имеют:		
	разрыв второго рода	**неустранимый разрыв первого рода**	**устранимый разрыв первого рода**
	Ответы: 1) $y=\begin{cases}x+1 & \text{при} \quad x>0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0,\\ 1-x & \text{при} \quad x<0;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}\ln x & \text{при} \quad x>0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0,\\ \ln(-x) & \text{при} \quad x<0;\end{cases}$ 3) $y=\begin{cases}1 & \text{при} \quad x>0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0,\\ -1 & \text{при} \quad x<0;\end{cases}$ 4) $y=\begin{cases}2^x-1 & \text{при} \quad x>0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0,\\ 1-2^{-x} & \text{при} \quad x<0\end{cases}$		

<table>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>Указать четные функции</td><td>Указать функции, у которых графики симметричны относительно начала координат</td><td>Указать функции общего вида (ни четные, ни нечетные)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ответы: 1) $y=\ln x^2$; 2) $y=x^2-x^3$; 3) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 4) $y=\frac{x}{x^2+1}$; 5) $y=\ln(x+5)$; 6) $y=x^3-x$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">5</td><td colspan="3">График функции $y=f(x)$ изображен на рисунке:


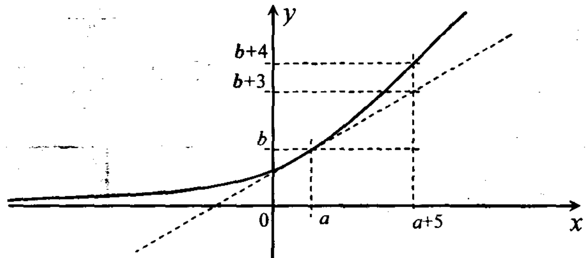
Указать точки, в которых функция:</td></tr>
<tr><td>терпит устранимый разрыв первого рода</td><td>не имеет ни конечного, ни бесконечного предела</td><td>имеет неустранимый разрыв первого рода</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td>Указать функции, которые являются ограниченными на всей числовой прямой</td><td>Указать функции, которые определены на всей числовой прямой</td><td>Указать функции, которые являются непрерывными на всей области определения</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ответы: 1) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; 2) $y=\frac{x}{x^2-1}$; 3) $y=\sqrt{x+1}$; 4) $y=x+\sin x$; 5) $y=\mathrm{tg}(x+5)$; 6) $y=5-\mathrm{arctg}\,x$</td></tr>
</table>

7	Указать функции, которые являются ограниченными:		
	на отрезке $[-2;\ 2]$	на полуинтервале $(0;\ 2]$	на интервале $(2;\ +\infty)$
	Ответы: 1)  2)  3)  4) 		
8	Указать функции, которые являются бесконечно:		
	большими при $x \to 1$	малыми при $x \to +\infty$	большими при $x \to +\infty$
	Ответы: 1) $y = \frac{x}{x^2-1}$; 2) $y = 5^{x+2}$; 3) $y = \frac{x^2+1}{x^2-5}$; 4) $y = \ln(x-1)$		
9	Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{3x-1}\right)^{x+1}$	Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$	Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{2}\right)^{\frac{4}{x}}$
	Ответы: 1) 0; 2) 1; 3) e; 4) $\sqrt{e}$; 5) e^2; 6) e^4		
10	Указать функции, для которых прямая:		
	$y = 1$ является горизонтальной асимптотой	$x = 0$ является вертикальной асимптотой	$y = x$ является наклонной асимптотой
	Ответы: 1) $y = \frac{x^2+1}{x}$; 2) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; 3) $y = \frac{e^x+1}{e^x-1}$; 4) $y = x + e^{-x^2}$		

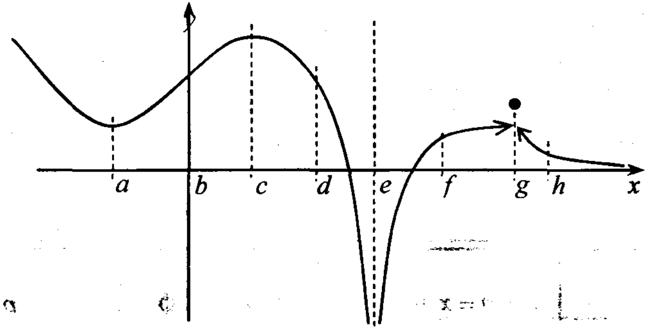
№			
11	**Найти значение производной функции:**		
	$y=\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}\left(x^2-5\right)$ в точке $x=2$	$e^{2-x}+xy=\frac{5}{2}$ в точке $(2;-3)$	$\begin{cases} x=\sqrt{t+1}, \\ y=\ln 2\cdot\log_2(t+1) \end{cases}$ при $t=3$
12	Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=e^{-x}$ в точке $x=\ln 5$	Найти угол (в градусах), под которым наклонена к оси абсцисс касательная, проведенная к кривой $y=2\sqrt{x-4}$ в точке $x=5$	Найти тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y=\ln\left(x^3+1\right)$ в точке $x=1$
13	Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{\ln x}$	Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x}$	Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+5}{5e^{2x}-1}$
14	**Найти значение x, при котором функция:**		
	$y=x\left(3-x^2\right)$ достигает максимума	$y=\frac{x}{(x-3)^2}$ имеет экстремум	$y=\frac{e^x}{x+1}$ достигает минимума
15	В соответствующих клетках таблицы указать наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-1;4]$ функции:		
	$y=\frac{1}{4}x^2(x-3)$	$y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$	$y=x(x-3)^2$

Ответы:

Значения:	– 1	0	1	2	3	4	не существует
$x_{\text{наим}}=$							
$y_{\text{наим}}=$							
$x_{\text{наиб}}=$							
$y_{\text{наиб}}=$							

<table>
<tr><td rowspan="3">16</td><td colspan="3">Указать интервалы, на которых функция:</td></tr>
<tr><td>$y=(x+2)^2(1-x)$ возрастает</td><td>$y=0{,}25x^4-2x^2+3$ убывает</td><td>$y=x^3-3x^2$ убывает</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ответы: 1) $(-\infty;-2)$; 2) $(-2;0)$; 3) $(0;2)$; 4) $(2;+\infty)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">17</td><td colspan="3">График функции $y=f(x)$ изображен на рисунке:

</td></tr>
<tr><td>Найти значение производной $y=f'(x)$ в точке $x=a$</td><td>Найти значение дифференциала функции $y=f(x)$ при $x=a$ и $\Delta x=5$</td><td>Найти погрешность приближенного вычисления $f(a+5)\approx f(a)+df$</td></tr>
</table>

18 График функции $y = f(x)$ изображен на рисунке:



Указать точки, для которых выполнены условия:

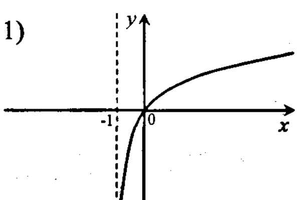
$y' = 0,\ y'' > 0$	$y' > 0,\ y'' < 0$	$y' < 0,\ y'' > 0$

19 Указать рисунок, на котором изображен график функции:

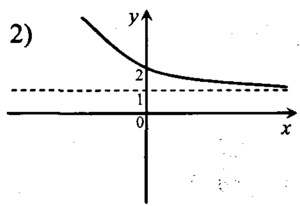
$y = \log_{0,5}(x-1)$	$y = 2^x - 1$	$y = \log_2(x+1)$

Ответы:

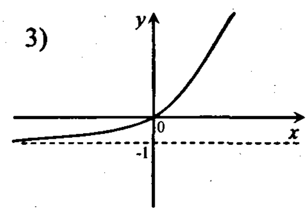
1)



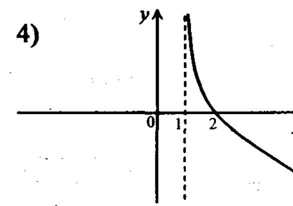
2)



3)



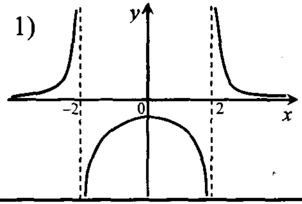
4)

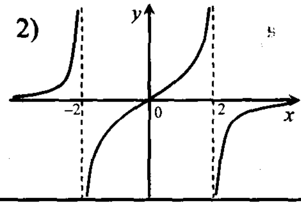


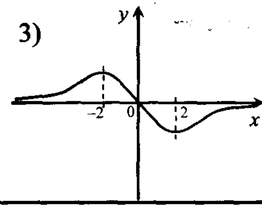
20	Указать рисунок, на котором изображен график функции $y = f(x)$, если при исследовании получена следующая таблица знаков производной:

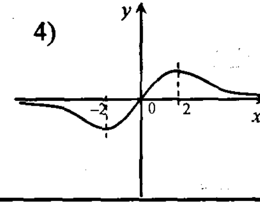
x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2; +\infty)$	x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2; +\infty)$	x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$2; +\infty$
y'	+	0	–	0	+	y'	+	н/с	+	н/с	+	y'	–	0	+	0	–

Ответы:

1)


2)


3)


4)


Итоговые контрольные задания по дисциплине «Математический анализ», часть 1 (разделы II, III)

№	*Вариант МА-1.1*	*Вариант МА-1.2*	*Вариант МА-1.3*	*Вариант МА-1.4*	*Вариант МА-1.5*
	Вычислить пределы:				
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}+4x}{\sqrt[4]{16x^4+2}-\sqrt[3]{x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{2x^3+x^2}-\sqrt[4]{3x^2+2}}{\sqrt{x-1}+4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+\sqrt{16x^4-x^3}}{5x^2+4x-\sqrt[3]{1-8x^6}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-9}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+5x-7}\right)$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+2}\right)^{4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x\left(\ln(x+3)-\ln x\right)\right]$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-1}{2x^2-3x+2}\right)^{-3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x+3}{\ln x-1}\right)^{4x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 6x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}4x}{5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 6x}$
	Найти производную функции:				
4	$y=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$	$y=\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}$	$y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$	$y=\log_2\left(x+4\sqrt{x^2+8x-5}\right)$	$y=\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1-\sqrt{1+x^2}}$
	Составить уравнение касательной (ных) к графику функции:				
5	$y=\sqrt{2x-5}$, проходящей через точку $(-1;\ -3)$. Сделать чертеж	$y=\frac{3x+5}{x+4}$ в точке $x_0=-3$. Сделать чертеж	$y=\frac{x-3}{x+5}$ в точках его пересечения с прямой $y+2x+3=0$. Сделать чертеж	$y=e^{2x-4}$, параллельной прямой $y-2x+1=0$. Сделать чертеж	$y=4+\ln(3-x)$, перпендикулярной прямой $2y-2x+3=0$. Сделать чертеж

№	*Вариант МА-1.1*	*Вариант МА-1.2*	*Вариант МА-1.3*	*Вариант МА-1.4*	*Вариант МА-1.5*
	Исследовать функции и построить их графики:				
6	$y = e^x - x$	$y = x^2 \ln x$	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$	$y = \dfrac{1}{x} e^{-x^3/3}$	$y = \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}$
7	$y = \dfrac{x^2+2x}{3x+8}$	$y = \left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right) e^{-x}$	$y = e^x + e^{-x} - 2x$	$y = \sqrt[3]{x} + 4\sqrt[3]{x^2}$	$y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$
8	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \ln(x+y)$ на полуокружности с центром в начале координат и радиусом 1, лежащей в верхней полуплоскости	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = (x+y)^2$ на границе треугольника с вер-шинами в точках (–1; 1), (2; 3), (4; 0)	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 - 15y^2$ на отрезке, заключенном между точ-ками пересечения параболы $y = x^2 - 2x$ и прямой $y = 2x - 3$	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ на отрезке ветви гиперболы $xy = 1$, лежащей в верхней полуплоскости, ограниченной точками пересечения гиперболы с прямыми $y = \dfrac{x}{16}$ и $y = 16x$	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy$ на отрезке графика экспоненты $y = e^{2x}$, ограниченной прямыми $x = -4$ и $x = 2$

Итоговый тест МА—1

1. По виду графика функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ (рис. 1) определить знаки постоянных a, b, c:

1) $a<0$, $b>0$, $c>0$; 2) $a>0$, $b>0$, $c<0$; 3) $a<0$, $b<0$, $c>0$; 4) $a>0$, $b<0$, $c>0$; 5) $a<0$, $b>0$, $c<0$.

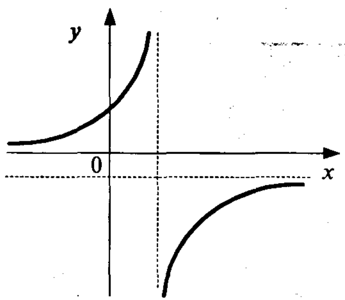


Рис. 1

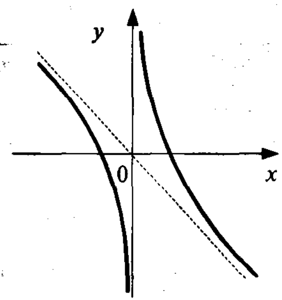


Рис. 2

2. Выбрать функцию, график которой наиболее точно соответствует рис. 2:

1) $y=-x+\dfrac{1}{x}$; 2) $y=-x-\dfrac{1}{x}$; 3) $y=-x-\dfrac{1}{x^2}$;

4) $y=-x+\dfrac{1}{x^2}$; 5) $y=x-\dfrac{1}{x^2}$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

4. Найти $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}+\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

5. При каком значении a

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+7x-14}{4x-x^2+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=2\,?$$

6. При каком значении a

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}\right)^{ax}=e^3\,?$$

7. В точке $x=0$ функция $y=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ не определена. Каким должно быть значение $y(0)$, чтобы доопределенная этим значением функция стала непрерывной?

8. Дана функция

$$y=\begin{cases}-x+5 & \text{при} \quad x<-5,\\ 2x+20 & \text{при} \quad -5\le x<-2,\\ \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{при} \quad -2\le x<0,\\ x+0{,}5 & \text{при} \quad 0\le x\le 5,\\ \dfrac{1}{x-5} & \text{при} \quad x>5.\end{cases}$$

Сколько эта функция имеет точек разрыва 1-го рода? 2-го рода?

9. Установить соответствие между точками кривой $y=f(x)$ (A, B, C; D, E, F) и величинами производных в этих точках (рис. 3):

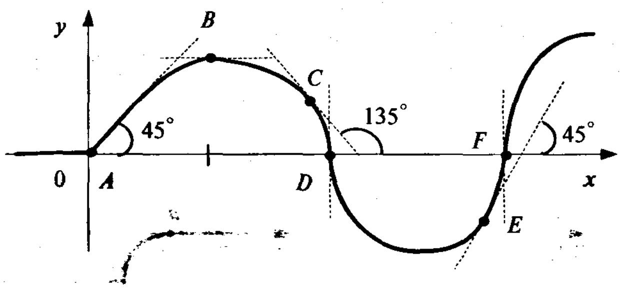


Рис. 3

1) 0; 2) –1; 3) 1; 4) $-\infty$; 5) $+\infty$; 6) $f'(x)$ не существует (ни конечная, ни бесконечная).

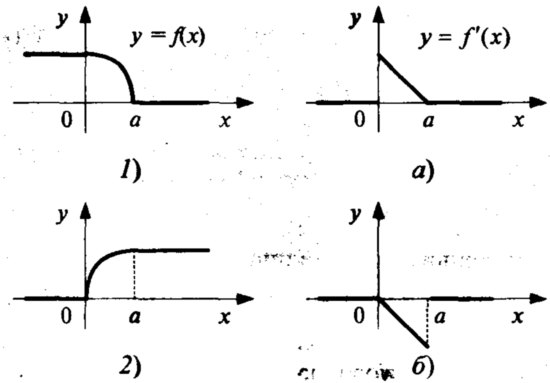
10. Какие из функций являются непрерывными в указанной точке x_0:

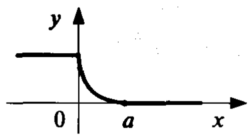
1) $y=|x-3|$, $x_0=3$; 2) $y=|x^2-3x+2|$, $x_0=1$;

3) $y=\operatorname{tg}(x-\dfrac{\pi}{4})$, $x_0=\dfrac{3\pi}{4}$; 4) $y=\sqrt[3]{x+2}$, $x_0=-2$;

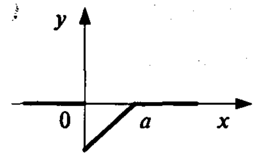
5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$, $x_0=-2$.

11. Установить соответствие между графиками функций $y=f(x)$ (*1*, *2*, *3*) и их производных $y'=f'(x)$ (*а*, *б*, *в*) (рис. 4):





з)



в)

Рис. 4

12. Дано: $y = \sqrt{1 + \arcsin x} + \cos(\ln(x+1))$. Найти $y'(0)$.

13. Дано: $y = (\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{3})^{\cos x}$. Найти $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

14. Дано: $y = \sqrt{8}\,\ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right)$. Найти $y''(0)$.

15. Составить уравнение нижней касательной к окружности $x^2 + y^2 = 20$, перпендикулярной к прямой $x + 2y - 2 = 0$.

Ответ: $y = kx + b$, где $k = \dots$, $b = \dots$.

16. Зависимость между спросом q и ценой p за единицу продукции дается соотношением $q = 4 - \sqrt[3]{p}$. Найти значение цены, при которой спрос будет нейтральным (с единичной эластичностью).

17. Выяснить, для каких функций на отрезке $[0; 2]$ применима теорема Лагранжа:

1) $y = \dfrac{1}{x}$; 2) $y = 4 - x^2$; 3) $y = x^{4/3}$; 4) $y = \ln|x|$;

5) $y = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{\pi}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ 6) $y = \begin{cases} x & \text{при } x < 1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$

18. Найти, применяя правило Лопиталя,

$$\lim_{x \to 1+0} (\ln x \cdot \ln(x-1)).$$

19. Найти, применяя правило Лопиталя,

$$\lim_{x \to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

20. Найти (с точностью до 0,1) экстремальное значение (максимум) функции $y = x^4 e^{-x^2}$.

21. Найти наименьшее значение функции $y = \sqrt{x - \ln x}$ на полуинтервале $(0; e]$.

22. Найти расстояние между точками перегиба функции $y = x^2 - \dfrac{16}{3x^2}$.

23. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\dfrac{t}{t+1}$-ю часть курса, а забывает $\dfrac{t}{36}$-ю часть. Сколько дней надо затратить студенту на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

24. Используя понятие дифференциала, вычислить приближенно $\sqrt[4]{24}$.

Раздел IV
Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения

Глава 10
Неопределенный интеграл

Справочный материал

1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке x этого промежутка справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\,dx$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

В записи $\int f(x)\,dx$ $f(x)$ называется *подынтегральной функцией,* а $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением.*

Нахождение неопределенного интеграла от некоторой функции называется *интегрированием* этой функции. Операции интегрирования и дифференцирования взаимно обратны.

2. Основные свойства неопределенного интеграла:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \qquad \textbf{(10.1)}$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \qquad \textbf{(10.2)}$$

$$\int dF(x) = F(x) + C, \qquad \textbf{(10.3)}$$

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx, \qquad \textbf{(10.4)}$$

где α — некоторое число;

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx. \qquad \textbf{(10.5)}$$

3. *Табличные интегралы:*

$$\int 0dx = C, \qquad \textbf{(10.6)}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \textbf{(10.7)}$$

где $n \neq -1$;

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad \textbf{(10.8)}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad \textbf{(10.9)}$$

где $a > 0,\ a \neq 1$;

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \textbf{(10.9')}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \qquad \textbf{(10.10)}$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \qquad \textbf{(10.11)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad \textbf{(10.12)}$$

где $-a < x < a,\ a > 0$;

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0; \qquad \textbf{(10.13)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0; \qquad \textbf{(10.14)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C,\ a \neq 0; \qquad \textbf{(10.15)}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \qquad \textbf{(10.16)}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \qquad \textbf{(10.17)}$$

10.1. Непосредственное интегрирование

Основное содержание различных методов нахождения интегралов состоит в сведении искомого интеграла к табличному или сумме табличных. В простейших случаях это удается сделать, используя лишь эквивалентные преобразования подынтегральной функции и, если необходимо, свойства **(10.4)**, **(10.5)**.

10.1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{9-4x^2}$; *б*) $\int\left(2\sin x - 3^{x+2} + 5\right)dx$; *в*) $\int \frac{(2\sqrt[3]{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x^4}}dx$;

г) $\int \frac{2x^4+3x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx$; *д*) $\int \cos^2 x/2\,dx$.

Р е ш е н и е:

а) Вынося постоянный множитель $\left(-\frac{1}{4}\right)$ за знак интеграла, приходим к табличному интегралу **(10.14)** при $a = 3/2$:

$$\int \frac{dx}{9-4x^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-3/2}{x+3/2}\right| + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x+3}{2x-3}\right| + C.$$

б) Используя свойства интеграла **(10.4)** и **(10.5)**, приходим к сумме табличных интегралов **(10.10)**, **(10.9)** при $a = 3$ и **(10.7)** при $n = 0$:

$$\int(2\sin x - 3^{x+2}+5)dx = 2\int \sin x\,dx - 9\int 3^x\,dx + 5\int dx =$$

$$= -2\cos x - 9\frac{3^x}{\ln 3} + 5x + C.$$

в) $$\int \frac{\left(2\sqrt[3]{x}+1\right)^2}{\sqrt[3]{x^4}}dx = \int \frac{4x^{2/3}+4x^{1/3}+1}{x^{4/3}}dx = \int\left(4x^{-2/3}+\frac{4}{x}+x^{-4/3}\right)dx =$$

$$= 4\int x^{-2/3}dx + 4\int \frac{dx}{x} + \int x^{-4/3}dx = 12x^{1/3} + 4\ln|x| - 3x^{-1/3} + C.$$

г) $$\int \frac{2x^4+3x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{2x^2(x^2+1)+(x^2+1)+x}{x(x^2+1)}dx =$$

$$= \int\left(2x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = 2\int x\,dx + \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= x^2 + \ln|x| + \operatorname{arctg} x + C.$$

д) $$\int \cos^2 x/2\,dx = \int \frac{1+\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C. ▶$$

Интегрирование, основанное на применении свойств интеграла **(10.4)**, **(10.5)** называется *непосредственным* или интегрированием *методом разложения*.

Используя метод разложения, найти интегралы:

10.2. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$.

10.3. $\int \left(2x^8 + e^x 2^x\right) dx$.

10.4. $\int \frac{dx}{9x^2+1}$.

10.5. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

10.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

10.7. $\int \left(2x^3 - 3x^2 + 4^{2x+1}\right) dx$.

10.8. $\int \left(2x^2+1\right)\left(2+3x^3\right) dx$.

10.9. $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}+8}{\sqrt[4]{x}+2} dx$.

10.10. $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x^3}} dx$.

10.11. $\int \sin x/2 \cos x/2\, dx$.

10.12. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$.

10.13. $\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+1} dx$.

10.14. $\int \frac{x^3-x+2}{x^2-1} dx$.

10.15. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$.

10.16. $\int \frac{\operatorname{tg} x/2}{1-\operatorname{tg}^2 x/2} dx$.

10.17. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$.

10.18. $\int \frac{3x^4-x^2-1}{x^2(x^2-1)} dx$.

10.2. Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(t)$ — функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда

$$\int f(x)\,dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt\,. \tag{10.18}$$

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

10.19. Найти интегралы:

а) $\int \sqrt{\frac{x+5}{3}} dx$; *б*) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$; *в*) $\int \frac{dx}{9x^2+6x+5}$;

г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-4x^2-4x}}$; *д*) $\int \frac{8x^3 dx}{2x+1}$; *е*) $\int \frac{3x+2}{x^2-4x+3} dx$.

Р е ш е н и е:

а) Положим $t=(x+5)/3$. Тогда $dt=d\left((x+5)/3\right)$.

По определению дифференциала получаем:

$$dt=\left((x+5)/3\right)'dx=\frac{1}{3}(x+5)'dx=\frac{1}{3}dx,$$

откуда $dx=3dt$. Учитывая выражение для t, исключим x из записи подынтегрального выражения искомого интеграла:

$$\int\sqrt{\frac{x+5}{3}}dx=\int\sqrt{t}\,3dt.$$

Используя **(10.4)**, приходим к табличному интегралу **(10.7)** при $n=1/2$:

$$\int\sqrt{t}\,3dt=3\int t^{1/2}dt=3\left(\frac{2t^{3/2}}{3}+C_1\right)=2\left(\frac{x+5}{3}\right)^{3/2}+C,$$

где $C=3C_1$.

В простых примерах новую переменную часто не выписывают явно. В этих случаях говорят *о преобразовании функции под знаком дифференциала* или *о введении постоянных и переменных под знак дифференциала.* При этом следует учитывать, что, например,

$$dx=\frac{1}{k}d(kx+b),$$

где k и b — некоторые числа ($k\neq0$).

б) Заметим, что $4x^2+1=(2x)^2+1$, а $dx=\frac{1}{2}d(2x)$.

Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2+1}}=\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+1}\right|+C$$

(см. **(10.15)** при $a=1$).

в) В знаменателе подынтегрального выражения выделим полный квадрат:

$$9x^2+6x+5=(3x+1)^2+4.$$

Учитывая, что $dx=\frac{1}{3}d(3x+1)$, получаем

$$\int\frac{dx}{9x^2+6x+5}=\int\frac{1}{3}\frac{d(3x+1)}{(3x+1)^2+4}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x+1)}{(3x+1)^2+4}=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{2}+C$$

(см. **(10.13)** при $a=2$).

г) Выделим полный квадрат в подкоренном выражении:

$$3-4x^2-4x=4-(2x+1)^2.$$

Положим $2x+1=t$.

Тогда $x=\frac{1}{2}(t-1)$ и $dx=\frac{1}{2}dt$. Следовательно,

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{3-4x^2-4x}}=\int\frac{1}{4}\frac{(t-1)dt}{\sqrt{4-t^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}.$$

Второй из двух полученных интегралов — табличный (см. **(10.12)** при $a=2$).

Для нахождения первого заметим, что $t\,dt=-\frac{1}{2}d(4-t^2)$.

Тогда

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{3-4x^2-4x}}=-\frac{1}{8}\int(4-t^2)^{-1/2}d(4-t^2)-\frac{1}{4}\arcsin t/2=$$

$$=-\frac{1}{4}(4-t^2)^{1/2}-\frac{1}{4}\arcsin t/2+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{3-4x^2-4x}-\frac{1}{4}\arcsin(x+1/2)+C.$$

д) Положим $t=2x+1$. Тогда $dt=2dx$ и, следовательно, $dx=\frac{1}{2}dt$.

Так как $x=(t-1)/2$, то

$$\int\frac{8x^3}{2x+1}dx=\int\frac{8((t-1)/2)^3}{t}\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{t^3-3t^2+3t-1}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int(t^2-3t+3-\frac{1}{t})dt=\frac{1}{6}t^3-\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\ln|t|+C_1.$$

Возвращаясь к исходной переменной $(t=2x+1)$, получаем

$$\int\frac{8x^3}{2x+1}dx=\frac{4}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C,$$

где $C=C_1+\frac{11}{12}$.

е) Выделяя полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции, получаем

$$\int\frac{3x+2}{x^2-4x+3}dx=\int\frac{3x+2}{(x-2)^2-1}dx.$$

Положим $t=x-2$. Тогда $dt=d(x-2)=(x-2)'dx=dx$, $x=t+2$ и

$$\int\frac{3x+2}{(x-2)^2-1}dx=\int\frac{3t+8}{t^2-1}dt=3\int\frac{tdt}{t^2-1}+8\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2-1)}{t^2-1}+4\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=\frac{3}{2}\ln\left|t^2-1\right|+4\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C.$$

Возвращаясь к исходной переменной, окончательно имеем

$$\int\frac{3x+2}{x^2-4x+3}dx=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+3\right|+4\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C. ▶$$

10.20. Найти интегралы:

а) $\int xe^{-3x^2+4}dx$; *б)* $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^6}}$; *в)* $\int\frac{dx}{2x+3x\ln x}$;

г) $\int\frac{dx}{\cos x}$; *д)* $\int\sqrt{1-x^2}dx$; *е)* $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Р е ш е н и е:

а) $\int xe^{-3x^2+4}dx=\int e^{-3x^2+4}\left(-\frac{1}{6}\right)d(-3x^2+4)=-\frac{1}{6}\int e^{-3x^2+4}d(-3x^2+4)=$

$$=-\frac{1}{6}e^{-3x^2+4}+C$$

(см. (10.9′)).

б) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^6}}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{\sqrt{4-(x^3)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x^3}{2}+C$

(см. (10.12) при $a=2$).

в) $\int\frac{dx}{2x+3x\ln x}=\frac{1}{3}\int\frac{d(2+3\ln x)}{2+3\ln x}=\frac{1}{3}\ln\left|2+3\ln x\right|+C$

(см. (10.8)).

г) Преобразуем сначала знаменатель подынтегральной функции:

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

Положим $t=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. Тогда $dt=-\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}dx$.

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=$$

$$=-\ln\left|\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$$

д) Положим $x=\sin t$, где $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Тогда $dx=\cos t\,dt$, $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$, так как при сделанных предположениях $\cos t>0$.

Тогда $\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\cos^2 t\,dt.$

Воспользуемся формулой понижения степени и свойствами интеграла **(10.4)**, **(10.5)**:

$$\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\int\cos 2t\,d(2t).$$

Учитывая (10.11), имеем

$$\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C. \qquad \textbf{(10.19)}$$

Применяя формулу для синуса двойного угла и осуществляя возврат к исходной переменной, окончательно получаем:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\cdot 2\sin t\cos t+C=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

е) Положим $x=\mathrm{tg}\,t$. Тогда $dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$ и

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int\frac{\cos^4 t\,dt}{\cos^2 t}=\int\cos^2 t\,dt.$$

Применяя **(10.19)**, получаем

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\frac{2\mathrm{tg}\,t}{1+\mathrm{tg}^2 t}+C.$$

Возвращаясь к исходной переменной, окончательно имеем:

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+C. \blacktriangleright$$

Используя указанные замены переменной, найти интегралы:

10.21. $\int\frac{dx}{e^{1/x}x^2}$, $t=-\frac{1}{x}$. **10.22.** $\int\frac{(1+x)dx}{1+\sqrt{x}}$, $t=1+\sqrt{x}$.

10.23. $\int \operatorname{tg}\frac{x}{3}dx,\ t=\cos\frac{x}{3}$. 10.24. $\int \frac{dx}{e^x+1},\ t=1+e^{-x}$.

10.25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}},\ x=\frac{1}{t}$. 10.26. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}},\ x=\sin t$.

10.27. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx,\ x=\operatorname{tg}t$.

Найти интегралы:

10.28. $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$. 10.29. $\int \sqrt[5]{3x+2}\,dx$.

10.30. $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$. 10.31. $\int \frac{dx}{3x+1}$.

10.32. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$. 10.33. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}$.

10.34. $\int \frac{x^2dx}{2x^3+5}$. 10.35. $\int (x+1/4)\sin(2x^2+x)dx$.

10.36. $\int \sqrt[3]{2+\cos 3x}\,\sin 3x\,dx$. 10.37. $\int e^{-\sqrt{2x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

10.38. $\int e^x\sqrt{2+5e^x}\,dx$. 10.39. $\int \cos\frac{2x+1}{5}dx$.

10.40. $\int \frac{\sin\ln x}{x}dx$. 10.41. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x/3}}{9+x^2}dx$.

10.42. $\int \frac{dx}{2x^2+1}$. 10.43. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}}$.

10.44. $\int \frac{e^{-x}dx}{1-e^{-2x}}$. 10.45. $\int \frac{x^2+1}{x+1}dx$.

10.46. $\int \frac{x^3dx}{1-x}$. 10.47. $\int \frac{2x-1}{2x+1}dx$.

10.48. $\int \frac{dx}{3x^2-5}$. 10.49. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^4}}$.

10.50. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+1}}$. 10.51. $\int \frac{2x+1}{3x^2+2}dx$.

10.52. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

10.53. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln^2 x}{x}\,dx.$

10.54. $\int \frac{x^2dx}{x^2+3}.$

10.55. $\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\,dx.$

10.56. $\int \frac{3^{5x}-1}{\sqrt{3^x}}\,dx.$

10.57. $\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

10.58. $\int \frac{x+2x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx.$

10.59. $\int \frac{x\,dx}{x^2-2}.$

10.60. $\int \frac{dx}{x^2+2x}.$

10.61. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}.$

10.62. $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$

10.63. $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}.$

10.64. $\int \frac{dx}{4x^2+12x+13}.$

10.65. $\int \frac{xdx}{\sqrt{-x^2-4x}}.$

10.66. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}.$

10.67. $\int \sin^4 \frac{x}{2}dx.$

10.68. $\int \frac{dx}{\sin 2x}.$

10.69. $\int \operatorname{ctg}\frac{x+3}{2}\,dx.$

10.70. $\int \sin^2 2x\cos x\,dx.$

10.71. $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\sin 2x\,dx.$

10.72. $\int \frac{(\cos x)^{1/2}}{(\sin x)^{5/2}}\,dx.$

10.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad \textbf{(10.20)}$$

Формула **(10.20)** называется *формулой интегрирования по частям.*

10.73. Найти интегралы:

а) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; *б*) $\int x^2e^{-x+1}dx$; *в*) $\int x\ln^2 x\,dx.$

Р е ш е н и е:

а) Положим $u = \ln x$ и $dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$. Тогда $du = d(\ln x) = \dfrac{1}{x}dx$ и $v = \int dv = \int x^{-1/2}dx = 2x^{1/2}$.

Вообще говоря, по формуле **(10.3)** полученное выражение для v должно содержать постоянную интегрирования C. Однако при применении формулы **(10.20)** эта постоянная из окончательного выражения выпадает. Поэтому в выражении для v удобно полагать $C = 0$.

Согласно **(10.20)**, имеем:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2x^{1/2}\ln x - \int 2x^{1/2}\frac{1}{x}dx = 2x^{1/2}\ln x -$$

$$-2\int x^{-1/2}dx = 2x^{1/2}\ln x - 4x^{1/2} + C.$$

б) Положим $u = x^2$, $dv = e^{-x+1}dx$. Тогда $du = 2x\,dx$, $v = \int dv = \int e^{-x+1}dx = -\int e^{-x+1}d(-x+1) = -e^{-x+1}$.

Применяя **(10.20)**, получаем:

$$\int x^2 e^{-x+1}dx = -x^2 e^{-x+1} + 2\int e^{-x+1}x\,dx.$$

К полученному интегралу вновь применяем формулу **(10.20)**, полагая $u = x$, $dv = e^{-x+1}dx$. Тогда $du = dx$, $v = -e^{-x+1}$ и

$$\int x^2 e^{-x+1}dx = -x^2 e^{-x+1} - 2xe^{-x+1} + 2\int e^{-x+1}dx =$$

$$= -x^2 e^{-x+1} - 2xe^{-x+1} - 2e^{-x+1} + C = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x+1} + C.$$

в) Пусть $u = \ln^2 x$, $dv = xdx$. Тогда $du = 2\ln x\dfrac{dx}{x}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$.

Применяя **(10.20)**, получаем

$$\int x\ln^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \ln x\,x\,dx.$$

Для нахождения последнего интеграла вновь применим формулу **(10.20)**: $u = \ln x$, $dv = x\,dx$, $du = \dfrac{1}{x}dx$, $v = \dfrac{x^2}{2}$ и

$$\int x\ln^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}) + C. \blacktriangleright$$

Последовательное применение формулы **(10.20)** интегрирования по частям позволяет найти интегралы вида:

$$\int x^n e^{ax}dx,\quad \int x^n \sin bx\,dx,\quad \int x^n \cos bx\,dx,\quad \int x^c \ln^n x\,dx,$$

где a, b, c — действительные числа ($c \neq -1$) и n — целое положительное число.

10.74. Найти интегралы:

а) $\int x \arcsin x\, dx$, *б*) $\int e^{2x} \cos 3x\, dx$.

Р е ш е н и е.

а) Положим $u = \arcsin x$, $dv = x dx$. Тогда $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \frac{x^2}{2}$.

Применяя **(10.20),** получаем

$$\int x \arcsin x\, dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Второй из полученных интегралов — табличный (см. **(10.12)**), первый был найден ранее (см. пример **10.20**, *д*). Окончательно получаем

$$\int x \arcsin x\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C.$$

б) Пусть $u = \cos 3x$, $dv = e^{2x} dx$. Тогда $du = -3\sin 3x\, dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Обозначая искомый интеграл через J, применяя формулу **(10.20),** получаем

$$J = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\, dx.$$

К полученному интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям **(10.20)**, где $u = \sin 3x$, $dv = e^{2x} dx$:

$$J = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\, dx\right),$$

или

$$J = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}J + C_1.$$

Выражая из последнего равенства искомый интеграл J, окончательно имеем

$$J = \frac{1}{13}(2\cos 3x + 3\sin 3x)e^{2x} + C,$$

где $C = \frac{4}{13}C_1$.▶

Формула интегрирования по частям применяется для нахождения интегралов вида:

$$\int x^c \arcsin x\,dx,\quad \int x^c \arccos x\,dx,\quad \int x^c \operatorname{arctg} x\,dx,\quad \int x^c \operatorname{arcctg} x\,dx,$$

где c — действительное число, $c \neq -1$.

Прием, использованный в примере **10.74**, *б*, используется для нахождения интегралов вида:

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx,\quad \int e^{ax} \cos bx\,dx,$$

где a и b — действительные числа ($a \neq 0$).

Найти интегралы:

10.75. $\int xe^{5x}dx.$

10.76. $\int x^2e^{-x/2}dx.$

10.77. $\int x^3e^{2x}dx.$

10.78. $\int \ln(1-x)\,dx.$

10.79. $\int (x^2-3x)\ln x\,dx.$

10.80. $\int x^2\ln^2 x\,dx.$

10.81. $\int \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x}}dx.$

10.82. $\int x\sin 3x\,dx.$

10.83. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx.$

10.84. $\int \sqrt{x^2-4}\,dx.$

10.85. $\int \sqrt{2-x^2}\,dx.$

10.86. $\int x\cos^2 x\,dx.$

10.87. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{7x-1}\,dx.$

10.88. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

10.89. $\int x^2\cos x\,dx.$

10.90. $\int e^x\sin\frac{x}{2}dx.$

10.91. $\int \cos(\ln x)\,dx.$

10.92. $\int e^{\sqrt{x}}dx.$

10.93. $\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx.$

10.94. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx.$

10.95. $\int x\operatorname{tg}^2 2x\,dx.$

10.96. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx.$

10.97. $\int \cos^2(\ln x)\,dx.$

10.98. $\int x^2\operatorname{arctg}3x\,dx.$

10.99. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx.$

10.100. $\int (\arcsin x)^2dx.$

10.101. $\int 3^x \cos x\,dx.$ **10.102.** $\int e^{3x}\sin 2x\,dx.$

10.103. $\int \ln(1+x^2)\,dx.$ **10.104.** $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx.$

10.4. Интегрирование рациональных выражений

Рассмотрим способы нахождения интегралов вида $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые многочлены от переменной x.

Простейшие интегралы такого вида отнесены к табличным (см. **(10.7)**, **(10.8)**, **(10.13)**, **(10.14)**). Более сложные случаи рассмотрены в примерах **10.1**, *а*, *г*, **10.19**, *в*, *д*, *е*, **10.20**, *е*.

Рассмотрим подход к интегрированию рациональных функций в общем случае. Будем предполагать, что дробь $P(x)/Q(x)$ — правильная, т.е. степень числителя $P(x)$ меньше степени знаменателя $Q(x)$.

Пусть знаменатель $Q(x)$ допускает разложение на линейные множители:

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_l)^{k_l}, \qquad \textbf{(10.21)}$$

где $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$ и $k_1, \dots, k_l$ — положительные целые числа. В этом случае дробь $P(x)/Q(x)$ допускает представление в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} +$$

$$+ \dots + \frac{A_{l1}}{x-\alpha_l} + \dots + \frac{A_{lk_l}}{(x-\alpha_l)^{k_l}}, \qquad \textbf{(10.22)}$$

где $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{lk_l}$ — некоторые неизвестные числа. Поэтому рассматриваемый метод интегрирования называется *методом неопределенных коэффициентов.*

10.105. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Р е ш е н и е. Записывая подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей, имеем:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)},$$

или после приведения выражения правой части к общему знаменателю:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A_1(x^2-1)+A_2(x+1)+A_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Полученное равенство выполняется тождественно (т.е. при любых значениях переменной x), только если

$$x^2=A_1(x^2-1)+A_2(x+1)+A_3(x-1)^2. \qquad \textbf{(10.23)}$$

Полагая в **(10.23)** $x=1$, получаем $1 = 2A_2$ и, следовательно, $A_2=1/2$.

При $x=-1$ из **(10.23)** имеем $1=4A_3$ и поэтому $A_3=1/4$.

Положим $x=0$. Тогда из **(10.23)** следует $0=-A_1+A_2+A_3$.

Подставляя в последнее равенство найденные значения A_2 и A_3, получаем $A_1=3/4$.

Используя найденное представление для подынтегральной функции, имеем:

$$\int\frac{x^2dx}{(x-1)^2(x+1)}=\int\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln|x+1|+C. \ ▶$$

В случае, когда многочлен $Q(x)$ не допускает разложения на линейные множители ($Q(x)$ имеет комплексные корни), в выражении **(10.21)** дополнительно содержатся сомножители вида $(x^2+px+q)^m$, где $m>0$. Тогда разложение **(10.22)** дроби $P(x)/Q(x)$ дополнительно содержит слагаемые вида

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

10.106. Найти интеграл

$$\int\frac{dx}{(x-1)(x^2-x+1)}.$$

Р е ш е н и е. Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{M_1x+N_1}{x^2-x+1}.$$

Выполняя приведение к общему знаменателю и приравнивая между собой числители левой и правой частей получаемого равенства, имеем:

$$1 = A_1(x^2 - x + 1) + (M_1 x + N_1)(x - 1). \qquad \textbf{(10.24)}$$

Если $x = 1$, то $A_1 = 1$; если $x = 0$, то приходим к равенству $1 = A_1 - N_1$ и, следовательно, $N_1 = 0$.

Полагая в **(10.24)** $x = -1$, получаем:

$$1 = 3A_1 + (-M_1 + N_1)(-2),$$

откуда $M_1 = -1$. Тогда

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2 - x + 1)} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x\,dx}{x^2 - x + 1}.$$

Для первого интеграла преобразуем функцию под знаком дифференциала: $dx = d(x-1)$; для второго — выделим полный квадрат в знаменателе $(x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4)$ и воспользуемся заменой переменной $t = x - 1/2$.

Тогда $dt = dx$, $x = t + 1/2$ и

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2 - x + 1)} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} - \int \frac{t + 1/2}{t^2 + 3/4} dt =$$

$$= \ln|x-1| - \int \frac{t\,dt}{t^2 + 3/4} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + 3/4} =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2 + 3/4)}{t^2 + 3/4} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2 + 3/4\right| - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - x + 1\right| - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \ \blacktriangleright$$

Найти интегралы:

10.107. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$. **10.108.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^3} dx$.

10.109. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$. **10.110.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + x}$.

10.111. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + 1}$. **10.112.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3 - 1}$.

10.113. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$. **10.114.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 1)(x + 2)}$.

10.115. $\int \frac{(x^2+2)dx}{(x+1)^2(x-1)}$.

10.116. $\int \frac{xdx}{x^2+3x-4}$.

10.117. $\int \frac{x^2-x}{x^2-6x+10}dx$.

10.118. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

10.119. $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$.

10.120. $\int \frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}dx$.

10.121. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$.

10.122. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

10.123. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx$.

10.124. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

10.125. $\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}$.

10.126. $\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}dx$.

10.127. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

10.128. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$.

10.129. $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}dx$.

10.130. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$.

10.5. Интегрирование некоторых видов иррациональностей

Простейшие интегралы от функций, содержащие иррациональности, являются табличными (см. (**10.7**), (**10.12**), (**10.15**)) либо сводятся к табличным с использованием свойств интеграла и (или) замены переменной (см. примеры **10.1**, *в*, **10.19**, *а*, *б*, *г*, **10.20**, *б*, *д*). В более сложных случаях основной подход состоит в сведении искомого интеграла к интегралу от рациональной функции (см. § **10.4**) с помощью подходящей замены переменной (так называемая *рационализация интеграла*).

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx,$$

где R — рациональная функция, находятся с помощью подстановок $x = a\sin t$, $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $x = \frac{a}{\cos t}$ соответственно, см. пример **10.20**, *д*, *е*.

10.131. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx.$$

Р е ш е н и е. Положим $x = \dfrac{1}{\cos t}$, где $t \in [0,\ \pi]$ и $t \neq \dfrac{\pi}{2}$.

Тогда $dx = \dfrac{\sin t\ dt}{\cos^2 t}$ и

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} \frac{\cos t \sin t}{\cos^2 t}dt = \int \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \frac{\sin t}{\cos t}dt = \int |\operatorname{tg} t| \operatorname{tg} t\, dt.$$

При сделанных предположениях $\sin t > 0$.

Если $x > 0$, т.е. $\cos t > 0$, то $|\operatorname{tg} t| = \operatorname{tg} t$ и

$$\int \operatorname{tg}^2 t\, dt = \int \left((1+\operatorname{tg}^2 t) - 1\right)dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} - \int dt = \operatorname{tg} t - t + C.$$

Так как $\cos t = \dfrac{1}{x}$, то $t = \arccos\dfrac{1}{x}$ и

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\sqrt{\cos^2 t}} = \sqrt{x^2-1}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{x} + C.$$

Если $x < 0$, т.е. $\cos t < 0$, то $|\operatorname{tg} t| = -\operatorname{tg} t$, и аналогично получим, что

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \sqrt{x^2-1} + \arccos\frac{1}{x} + C. \ \blacktriangleright$$

Интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx \tag{10.25}$$

рационализируется с помощью замены $t = \sqrt[n]{x}$.

Нетрудно видеть, что интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}},\ \ldots,\ \sqrt[n_l]{x^{m_l}}\right)dx$$

Являются частичными случаями **(10.25)**, где n — наименьшее общее кратное чисел $n_1, \ldots, n_l$.

Обобщением интеграла **(10.25)** является

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx, \qquad \textbf{(10.26)}$$

где $ad \neq bc$. Для рационализации **(10.26)** используется подстановка

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

10.132. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}}$; *б*) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$

Решение:

а) Наименьшее общее кратное степеней 4 и 6 радикалов, через которые записана подынтегральная функция, равно 12. Поэтому полагаем $t = x^{1/12}$. Тогда $x = t^{12}$, $dx = 12t^{11}dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}} = \int \frac{12t^{11}dt}{t^{10} - t^9} = 12\int \frac{t^2 dt}{t-1}.$$

Используя эквивалентные преобразования, сводим полученный интеграл к сумме табличных:

$$12\int \frac{t^2 dt}{t-1} = 12\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt = 12\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^2}{2} + t + \int \frac{d(t-1)}{t-1}\right) = 6t^2 + 12t + 12\ln|t-1| + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной, окончательно получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}} = 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} + 12\ln\left|\sqrt[12]{x} - 1\right| + C.$$

б) Данный интеграл имеет вид **(10.26)**, поэтому полагаем $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$. Тогда $\frac{1+x}{x} = t^2$, $x = \frac{1}{t^2-1}$, $dx = -\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2}$ и

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = \int (t^2-1)^2 t \frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2} = -2\int t^2 dt =$$

$$= -\frac{2}{3}t^3 + C = -\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3} + C. \ ▶$$

Найти интегралы:

10.133. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$.

10.134. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{x}+3}$.

10.135. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+1}$.

10.136. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+1}}$.

10.137. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

10.138. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

10.139. $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

10.140. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

10.141. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}\,dx$.

10.142. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$.

10.6. Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ (где R — рациональная функция) допускают рационализацию с помощью универсальной подстановки $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, где $-\pi<x<\pi$. Тогда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

10.143. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$$

Р е ш е н и е. Полагая $t=\operatorname{tg}x/2$, получаем

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x}=\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{5(1-t^2)}{1+t^2}\right)}=2\int \frac{dt}{8-2t^2}=\int \frac{dt}{4-t^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x/2+2}{\operatorname{tg}x/2-2}\right|+C. ▶$$

Использование универсальной подстановки $t=\operatorname{tg}x/2$ при интегрировании функции вида $R(\sin x,\ \cos x)$ часто приводит к громоздким подынтегральным функциям. В частных случаях можно использовать другие подстановки. Так, если функция $R(u,v)$ обладает свойством нечетности по переменной u, т.е. $R(-u,v)=-R(u,v)$, то используется подстановка $t=\cos t$; если, напротив, $R(u,-v)=-R(u,v)$, то $t=\sin x$. Если же функция обладает свойством четности сразу по двум переменным, т.е. $R(-u,-v)=R(u,v)$, то применяется подстановка $t=\operatorname{tg} x$, где $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

10.144. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^3 x}$, *б*) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

Решение:

а) Положим $t=\sin x$. Тогда $dt=\cos x\,dx$ и

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{\cos x\,dx}{\cos^4 x}=\int\frac{dt}{(1-t^2)^2}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов (см. § **10.4**), найдем разложение подынтегральной функции на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}\right).$$

Тогда

$$\int\frac{dt}{(1-t^2)^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{d(t-1)}{t-1}+\frac{1}{4}\int(t-1)^{-2}d(t-1)+\frac{1}{4}\int\frac{d(t+1)}{t+1}+$$

$$+\frac{1}{4}\int(t+1)^{-2}d(t+1)=-\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4(t-1)}+\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{4(t+1)}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|-\frac{\sin x}{2(\sin^2 x-1)}+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}+C.$$

б) Положим $t=\operatorname{tg} x$, где $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. Так как $1+t^2=\frac{1}{\cos^2 x}$, то $\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$, и, поскольку $x=\operatorname{arctg} t$, то $dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}=\int\frac{dt}{(1+t^2)(1+3/(1+t^2))}=\int\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2}+C. \blacktriangleright$$

Для нахождения интегралов вида

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx, \quad \int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx, \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx$$

используются формулы тригонометрии, позволяющие преобразовывать произведение в сумму:

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x),$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x),$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x).$$

10.145. Найти интеграл

$$\int \sin x \cos^2 2x \, dx.$$

Р е ш е н и е. Используя тригонометрическую формулу понижения степени, получаем

$$\int \sin x \cos^2 2x \, dx = \int \sin x \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2} \int \sin x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin x \cos 4x \, dx.$$

Для нахождения второго интеграла воспользуемся формулой, преобразующей произведение в сумму:

$$\frac{1}{2} \int \sin x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin x \cos 4x \, dx = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \int (\sin 5x - \sin 3x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{20} \int \sin 5x \, d(5x) - \frac{1}{12} \int \sin 3x \, d(3x) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{20} \cos 5x + \frac{1}{12} \cos 3x + C. ▶$$

Найти интегралы:

10.146. $\int \sin^3 x \, dx.$ **10.147.** $\int \cos^7 x \, dx.$

10.148. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx.$ **10.149.** $\int \frac{dx}{1 + \sin x}.$

10.150. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}.$ **10.151.** $\int \frac{dx}{2 \sin x + \sin 2x}.$

10.152. $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}.$ **10.153.** $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx.$

10.154. $\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx.$ **10.155.** $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}.$

10.156. $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx.$ **10.157.** $\int \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}.$

10.158. $\int \operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx.$ **10.159.** $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx.$

10.160. $\int \sin 9x \sin x\,dx.$ **10.161.** $\int \sin x \sin 2x \sin 3s\,dx.$

10.162. $\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos x}\,dx.$ **10.163.** $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}\,dx.$

Задачи для повторения

10.164. $\int \frac{x^3+1}{2x+1}\,dx.$ **10.165.** $\int \frac{\cos x\,dx}{6-\cos 2x}.$

10.166. $\int xe^{\sqrt{x}}dx.$ **10.167.** $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}.$

10.168. $\int \frac{3\cos x\,dx}{13+12\sin x-9\cos^2 x}.$ **10.169.** $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$

10.170. $\int \frac{x^2+4x-5}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}.$ **10.171.** $\int x\ln(x^2+1)dx.$

10.172. $\int \frac{x+3}{x^2-4}dx.$ **10.173.** $\int \frac{dx}{2+\cos x}.$

10.174. $\int \frac{\ln^2(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}+x}\,dx.$ **10.175.** $\int \sin^4 x\,dx.$

10.176. $\int \frac{2x+1}{x(x^2+1)}\,dx.$ **10.177.** $\int \left(\frac{3}{x+3}\right)^2\sqrt{\frac{x}{x+3}}\,dx.$

10.178. $\int \frac{dx}{1+e^{5x}}.$ **10.179.** $\int (5x+7)e^x dx.$

10.180. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}.$ **10.181.** $\int \frac{x\,dx}{x^3+6x^2+11x+6}.$

10.182. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x}\,dx.$ **10.183.** $\int (x^3+2x)e^{x^2}dx.$

10.184. $\int \frac{6x^3+13x^2-9x-7}{2x+1}dx.$ **10.185.** $\int \operatorname{tg} x\cos^3 x\,dx.$

10.186. $\int \frac{dx}{x(x+1)^3}.$ **10.187.** $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}.$

10.188. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

10.189. $\int \frac{dx}{x^{4/3}+2x}.$

10.190. $\int \frac{3dx}{x+\sqrt{x}-2}.$

10.191. $\int \sin x\cos^2 2x\sin 3x\,dx.$

10.192. $\int \frac{(3x+2)dx}{x^2-2x}.$

10.193. $\int x^2 \arcsin x\ dx.$

10.194. $\int \frac{\sin 3x}{\sin 2x}dx.$

10.195. $\int \frac{x^3dx}{x^2+5x-6}.$

10.196. $\int \frac{\mathrm{ctg} x\,dx}{\ln^3 \sin x}.$

10.197. $\int e^x \cos(5x+6)dx.$

10.198. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}\left(e^{2\sqrt{x}}+1\right)}.$

Контрольные задания по главе 10 «Неопределенный интеграл»

№	*Вариант 10.1*	*Вариант 10.2*	*Вариант 10.3*
	Найти интегралы:		
1	$\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}\,dx$	$\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$	$\int \frac{\sqrt{1+x^2}-x^2-x^4}{1+x^2}\,dx$
2	$\int \frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+x}}\,dx$	$\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}}dx$	$\int \frac{(2+x)\sqrt{2\ln x+x}}{x}\,dx$
3	$\int (2x+3)e^{2x}dx$	$\int (x^2+3x+2)\ln x\,dx$	$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$
4	$\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$	$\int \sqrt{e^x+1}\,dx$	$\int \frac{x+1}{x^2-2x-15}dx$
5	$\int \frac{5x+11}{\sqrt{6x-x^2-5}}\,dx$	$\int \frac{x^2dx}{x^2-6x+10}$	$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}\,dx$	$\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x}\,dx$	$\int \frac{e^{3x}+2e^x}{e^{2x}+e^x+1}\,dx$
7	$\int x^3 \arcsin\frac{1}{x}\,dx$	$\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$	$\int (x^2-3x)\sin 5x\,dx$

Тест 10

1. При каких a и b функция $F(x)=\frac{a}{3}x^b+2x^2+x+1$ является первообразной для $f(x)=(2x+1)^2$?

2. При каких целых a, b, c функция $F(x)=2e^{3x+1}$ является первообразной для функции $f(x)=ae^{bx+c}$?

3. При каких целых a, b, c функции $F_1(x)=\frac{1}{a}(1+bx)^c$ и $F_2(x)=1+x-1{,}5x^2$ являются первообразными для одной и той же функции $f(x)$?

4. Найти $\int\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x}dx.$

Ответ: $ax+b\sqrt{x}+d\ln|x|+C$, где a, b, d — целые числа: $a=\ldots$, $b=\ldots$, $d=\ldots$.

5. Найти $\int\left(\frac{17-2x}{3}\right)^3dx.$

Ответ: $\frac{3}{a}\left(\frac{17+bx}{3}\right)^d+C$, где a, b, d — целые числа: $a=\ldots$, $b=\ldots$, $d=\ldots$.

6. Найти $\int\frac{2x+3}{4x-7}dx.$

Ответ: $\frac{1}{a}x+\frac{b}{d}\ln|4x-7|+C$, где a, b, d — целые числа, дробь $\frac{b}{d}$ — несократима, $b>0$: $a=\ldots$, $b=\ldots$, $d=\ldots$.

7. Найти $\int xe^{x^2-3}dx.$

Ответ: $\frac{a}{b}e^{x^2+d}$ где a, b, d — целые числа, дробь a/b — несократима, $a>0$: $a=\ldots$, $b=\ldots$, $d=\ldots$.

8. Найти $\int x^3\ln x\,dx.$

Ответ: $\frac{1}{a}x^b+\frac{1}{d}x^4\ln x+C$, где a, b, d — целые числа: $a=\ldots$, $b=\ldots$, $d=\ldots$.

9. Найти $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$.

Ответ: $\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x+b}{x+d}\right|+C$, где a, b, d — целые числа, $a>0$: $a=\ldots$, $b=\ldots$, $d=\ldots$.

10. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{ax+b}{d}+C$, где a, b, d — целые числа, $a>0$: $a=\ldots$, $b=\ldots$, $d=\ldots$.

Глава 11
Определенный интеграл

Справочный материал

1. Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n элементарных отрезков точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольно точку ξ_i и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда сумма вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad \textbf{(11.1)}$$

называется *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пусть существует и конечен предел S интегральной суммы **(11.1)** при стремлении к нулю длины максимального элементарного отрезка Δx_i, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части и способа выбора точек ξ_i на отрезках разбиения. Тогда функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$, а число S — *определенным интегралом* от $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad \textbf{(11.2)}$$

Достаточным условием интегрируемости функции является ее непрерывность на рассматриваемом отрезке.

2. Свойства определенного интеграла:

1) $$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx, \qquad \textbf{(11.3)}$$

где α — некоторое число.

2) $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \qquad \textbf{(11.4)}$$

3) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad \textbf{(11.5)}$$

4) $$\int_a^a f(x)dx = 0. \quad (11.6)$$

5) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (11.7)$$

6) *Теорема о среднем.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется такое значение $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \quad (11.8)$$

7) Если функция $y = f(x)$ — четная, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx. \quad (11.9)$$

Если функция $y = f(x)$ — нечетная, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0. \quad (1.10)$$

8) *Формула Ньютона—Лейбница.* Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ равен приращению любой ее первообразной $F(x)$ на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (11.11)$$

или (в иной записи)

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

9) *Замена переменной в определенном интеграле.* Если функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha; \beta]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ и функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x = \varphi(t)$, где $t \in [\alpha; \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (11.12)$$

10) *Интегрирование по частям определенного интеграла.* Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \quad (11.13)$$

11.1. Методы вычисления определенного интеграла

11.1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \frac{3x^4-5x^2+7}{x}dx$; *б*) $\int\limits_0^{\pi}|\cos x|\,dx$; *в*) $\int\limits_0^{\ln 2} e^x\sqrt{e^x-1}\,dx$;

г) $\int\limits_{0,5}^{0}\ln(1-x^2)dx$; *д*) $\int\limits_0^{\pi/2}x^2\cos x\,dx$; *е*) $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение:

а) Используя эквивалентное преобразование подынтегральной функции (почленное деление числителя на знаменатель) и свойства **(11.3)**, **(11.4)** определенного интеграла, получаем

$$\int\limits_1^2 \frac{3x^4-5x^2+7}{x}dx=\int\limits_1^2\left(3x^3-5x+\frac{7}{x}\right)dx=3\int\limits_1^2 x^3dx-5\int\limits_1^2 x\,dx+7\int\limits_1^2\frac{dx}{x}.$$

Все три интеграла — табличные; согласно **(11.11)**, окончательно имеем:

$$\int\limits_1^2 \frac{3x^4-5x^2+7}{x}dx=3\frac{x^4}{4}\bigg|_1^2-5\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2+7\ln|x|\Big|_1^2=\frac{3}{4}(16-1)-\frac{5}{2}(4-1)+$$

$$+7(\ln 2-\ln 1)=3{,}75+7\ln 2.$$

б) Так как

$$|\cos x|=\begin{cases}\cos x & \text{при } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ -\cos x & \text{при } x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right],\end{cases}$$

то (см. **(11.7)**)

$$\int\limits_0^{\pi}|\cos x|\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\,dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(-\cos x)\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$=(1-0)-(0-1)=2.$$

в) Воспользуемся заменой переменной: пусть $t=\sqrt{e^x-1}$. Тогда $t^2=e^x-1$, $e^x=t^2+1$, $2t\,dt=e^x dx$ и $dx=\frac{2t\,dt}{t^2+1}$. Найдем пределы интегрирования по переменной t: если $x=0$, то $t=\sqrt{e^0-1}=0$; если $x=\ln 2$, то $t=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=1$. Искомый интеграл теперь принимает вид:

$$\int\limits_0^{\ln 2}e^x\sqrt{e^x-1}\,dx=\int\limits_0^1(t^2+1)t\frac{2t}{t^2+1}dt=2\int\limits_0^1 t^2dt=2\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{2}{3}(1^3-0^3)=\frac{2}{3}.$$

г) Воспользуемся формулой **(11.13)** интегрирования по частям: пусть $u = \ln(1-x^2)$, $dv = dx$. Тогда $du = (\ln(1-x^2))'\,dx = -\dfrac{2x}{1-x^2}dx$, $v = \int dv = \int dx = x$ и (см. **(11.13)**)

$$\int_{0,5}^{0} \ln(1-x^2)dx = x\ln(1-x^2)\Big|_{0,5}^{0} + \int_{0,5}^{0} \frac{2x^2}{1-x^2}dx =$$

$$= 0,5\ln(4/3) - 2\int_{0,5}^{0} \frac{(x^2-1)+1}{x^2-1}dx = 0,5\ln(4/3) - 2\int_{0,5}^{0} dx - 2\int_{0,5}^{0} \frac{dx}{x^2-1} =$$

$$= 0,5\ln(4/3) - 2x\Big|_{0,5}^{0} - 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{0,5}^{0} = 1 + 0,5\ln(4/27).$$

д) Как было отмечено выше (см. § **10.3**), данный интеграл находится с помощью последовательного применения формулы интегрирования по частям. Пусть $u = x^2$, $dv = \cos x\,dx$. Тогда $du = (x^2)'dx = 2x\,dx$, $v = \int \cos x\,dx = \sin x$ и (см. **(11.13)**)

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx = x^2\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\sin x\,dx = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx.$$

Для нахождения последнего интеграла вновь применяем формулу **(11.13)**: $u = x$, $dv = \sin x\,dx$. Тогда $du = dx$, $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$ и

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx = \frac{\pi^2}{4} - 2x(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = \frac{\pi^2}{4} - 2\sin x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

е) Воспользуемся тригонометрической подстановкой $x = \sin t$. Будем полагать, что $t \in [0; \pi/2]$. Если $t = 0$, то $x = 0$; если $t = \pi/2$, то $x = 1$. Тогда $dx = \cos t\,dt$ и

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} |\cos t|\cos t\,dt.$$

Так как $\cos t > 0$ при $t \in [0;\ \pi/2]$, то $|\cos t| = \cos t$. Применяя тригонометрическую формулу понижения степени, получаем:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos 2t\,d2t =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left(\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$ ▶

Вычислить определенные интегралы:

11.2. $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx.$ **11.3.** $\int_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}.$ **11.4.** $\int_1^2 \frac{4x+2}{2x-1}dx.$

11.5. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}.$ **11.6.** $\int_e^{e^2} \frac{2\ln x+1}{x}dx.$ **11.7.** $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}.$

11.8. $\int_{-2}^1 x^2\sqrt{1-x^3}\,dx.$ **11.9.** $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}.$ **11.10.** $\int_0^{\ln 2} xe^x dx.$

11.11. $\int_1^e x\ln x\,dx.$ **11.12.** $\int_1^e \ln^2 x\,dx.$ **11.13.** $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx.$

11.14. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx.$ **11.15.** $\int_0^\pi e^x \sin x\,dx.$ **11.16.** $\int_0^{\pi/2} (x+3)\sin x\,dx.$

11.17. $\int_{-\pi}^\pi x\sin x\cos x\,dx.$ **11.18.** $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\sin x\,dx.$ **11.19.** $\int_{-7}^7 \frac{x^4\sin x}{x^6+2}dx.$

11.20. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx.$ **11.21.** $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx.$ **11.22.** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

11.23. $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}.$ **11.24.** $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$ **11.25.** $\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$

11.26. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}.$ **11.27.** $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$ **11.28.** $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x\,dx.$

11.29. $\int_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$

11.2. Геометрические приложения определенного интеграла

Справочный материал

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ (площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$) (см. рис. **11.1**) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке:

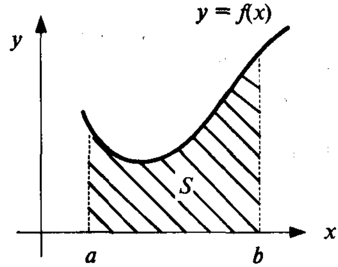


Рис. 11.1

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (11.14)$$

(*геометрический смысл определенного интеграла*).

2. Если функция $y = f(x)$ — неположительна на отрезке $[a, b]$, то площадь S над кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ (см. рис. **11.2**) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a, b]$, взятому со знаком «минус»:

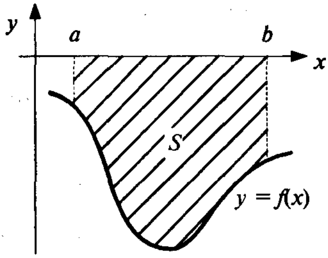


Рис. 11.2

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (11.15)$$

3. Если $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a, b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на этом отрезке (см. рис. **11.3**) определяется формулой

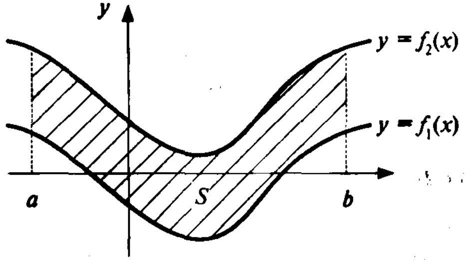


Рис. 11.3

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx \qquad (11.16)$$

4. Если верхняя ограничивающая линия фигуры (см. рис. **11.1**) задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $t \in [\alpha;\beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то площадь S этой фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt. \qquad (11.17)$$

Длина дуги кривой

5. Длина s дуги кривой $y = f(x)$, заключенной между точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}\, dx. \qquad \textbf{(11.18)}$$

Площадь поверхности вращения

6. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $y = f(x)$, заключенной между точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + (f')^2}\, dx. \qquad \textbf{(11.19)}$$

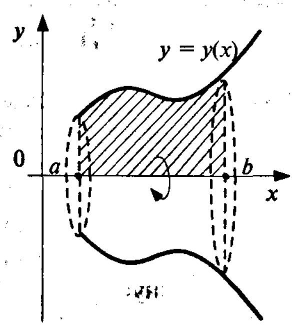


Рис. 11.4

Объемы тел вращения

7. Если функция $y = y(x)$ знакопостоянна на отрезке $[a, b]$, то объем V_x тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = y(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (см. рис. **11.4**), вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx. \qquad \textbf{(11.20)}$$

Аналогично, объем V_y тела, образованного при вращении вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = c$, $y = d$, $x = x(y)$, $x = 0$ (см. рис. **11.5**), вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)\, dy. \qquad \textbf{(11.21)}$$

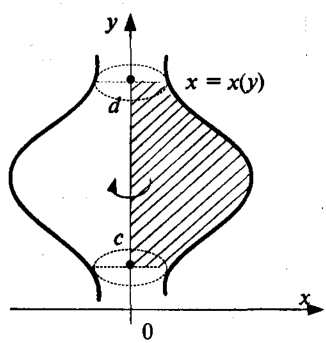


Рис. 11.5

11.30. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 3$, $y = 0$; *б*) $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 3$; *в*) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{4}{x}$, $y = 4x$, $y = \dfrac{1}{4}x$ (фигура расположена в первой четверти); *г*) $y = \ln x$, $y = \ln(x + 1)$, $y = 1$, $y = -1$.

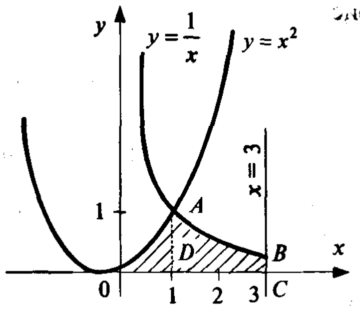


Рис. 11.6

Р е ш е н и е:

а) Искомая площадь $S = S_{OABC}$ — это площадь под «кривой» OAB (см. рис. **11.6**) на отрезке [0; 3].

Линия OAB состоит из части OA параболы $y = x^2$ и части AB гиперболы $y = 1/x$. Соответственно, площадь S найдем как сумму двух площадей: $S = S_{OAD} + S_{ABCD}$, каждую из которых вычислим, опираясь на геометрический смысл определенного интеграла (см. формулу **(11.14)**). Решая систему

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 1/x, \end{cases}$$

находим координаты точки A: (1, 1).

Тогда $$S_{OAD} = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$S_{ABCD} = \int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^3 = \ln 3$$

и $S = S_{OAD} + S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} + \ln 3 \approx 1{,}43$ (ед^2).

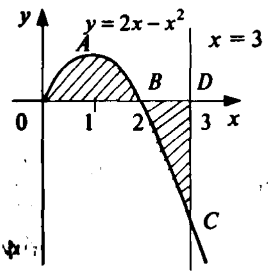


Рис. 11.7

б) Фигура искомой площади S состоит из двух криволинейных треугольников: OAB и BCD, расположенных (соответственно) выше и ниже оси Ox (см. рис. **11.7**). Площади этих треугольников найдем по формулам **(11.14)** и **(11.15)**:

$$S_{OAB} = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left.\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2 = \frac{4}{3},$$

$$S_{BCD} = -\int_2^3 (2x - x^2)dx = \left.\left(-x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\right|_2^3 = \frac{4}{3}.$$

Тогда $S = S_{OAB} + S_{BCD} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ (ед.^{2}).

в) Найдем координаты точек пересечения заданных линий (см. рис. **11.8**).

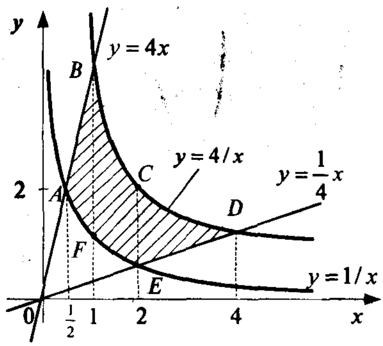


Рис. 11.8

Решая систему $\begin{cases} y = 4x, \\ y = \dfrac{1}{x}, \end{cases}$ получаем $A(1/2;\ 2)$. Аналогично $B(1;\ 4)$, $D(4;\ 1)$, $E(2;\ 1/2)$. Искомой в данном случае является площадь S криволинейной трапеции $ABDE$. Выполняя проецирование «угловых» точек этой трапеции на ось Ox, разобьем ее на части, площадь каждой из которых найдем по формуле **(11.16)**:

$$S = S_{ABF} + S_{BCEF} + S_{CDE};$$

$$S_{ABF} = \int_{1/2}^{1}\left(4x - \frac{1}{x}\right)dx = \left(4\frac{x^2}{2} - \ln|x|\right)\Bigg|_{1/2}^{1} = 1{,}5 - \ln 2;$$

$$S_{BCEF} = \int_{1}^{2}\left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x}\right)dx = 3\ln|x|\Big|_{1}^{2} = 3\ln 2;$$

$$S_{CDE} = \int_{2}^{4}\left(\frac{4}{x} - \frac{x}{4}\right)dx = \left(4\ln|x| - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{2}^{4} = 4\ln 2 - 1{,}5.$$

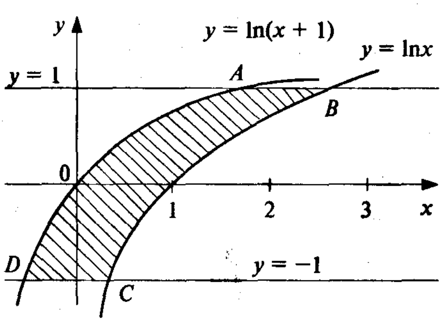


Рис. 11.9

Окончательно получаем:

$$S = (1{,}5 - \ln 2) + 3\ln 2 + (4\ln 2 - 1{,}5) = 6\ln 2 \approx 4{,}2 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

г) Искомой здесь (см. рис. **11.9**) является площадь S криволинейной трапеции $ABCD$. В данном случае будет удобно использовать проецирование фигуры на ось Oy, т.е. поменять местами функцию y и аргумент x.

Используя формулу **(11.16)** (с учетом последнего замечания), получаем:

$$S=\int_{-1}^{1}\left(e^y-(e^y-1)\right)dy=\int_{-1}^{1}dy=y\Big|_{-1}^{1}=2\ \text{(ед.}^2\text{)}.$$

Заметим, что использование традиционного проецирования фигуры на ось Ox приведет к существенно более трудоемкому решению (предлагаем читателю в качестве упражнения убедиться в этом самостоятельно).▶

11.31. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и циклоидой $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ на отрезке $[0;2\pi]$ (см. рис. **11.10**).

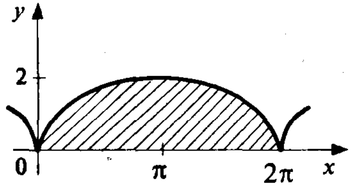


Рис. 11.10

Решение. Используя формулу **(11.17)**, получаем:

$$S=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2t)dt=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=$$

$$=\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi\approx 9{,}4\ \text{(ед.}^2\text{)}.\ ▶$$

11.32. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$ от начала координат до точки с координатами $(4/3,\ 8\sqrt{3}/9)$.

Решение. Указанный участок кривой расположен в первой четверти и задается уравнением $y=x^{3/2}$.

Так как в этом случае $f'(x)=1{,}5x^{1/2}$, то, применяя формулу **(11.18)**, получаем

$$s=\int_0^{4/3}\sqrt{1+(f')^2}\,dx=\int_0^{4/3}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=$$

$$=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^{4/3}=\frac{8}{27}\left(4^{3/2}-1\right)=\frac{56}{27}\ \text{(ед.)}.\ ▶$$

11.33. Найти площадь поверхности, образованной вращением циклоиды $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ при $t\in[0;2\pi]$ (см. рис. **11.10**) вокруг оси Ox.

Решение. Для получения формулы площади поверхности вращения в случае параметрического задания кривой достаточно произвести соответствующую замену переменной в исходной формуле **(11.19)**.

Более точно, если для кривой $y = f(x)$, где $x \in [a, b]$, имеем $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$S_x = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

Полагая теперь $\varphi(t) = t - \sin t$, $\psi(t) = 1 - \cos t$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, получаем выражение для искомой площади поверхности:

$$S_x = 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)2\sin t/2\,dt =$$

$$= -16\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos^2 t/2)d\cos t/2 = -16\pi\left(\cos t/2\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{3}\cos^3 t/2\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= 64\pi/3 \approx 67 \text{ (ед.}^2\text{)}. \blacktriangleright$$

11.34. Найти объемы тел, образованных вращением вокруг координатных осей и прямой $y = 2$ плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{2}{x+1}$, $x = 0, x = 1, y = 0$.

Р е ш е н и е. Объем V_x находим непосредственно по формуле **(11.20)** (рис. **11.11**):

$$V_x = \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1}\right)^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x+1)^{-2} d(x+1) = -4\pi(x+1)^{-1}\Big|_0^1 = 2\pi.$$

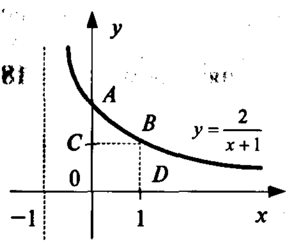


Рис. 11.11

Объем V_y равен сумме двух объемов:

$$V_y = V_{ABC} + V_{BDOC},$$

где V_{ABC}, V_{BDOC} — объемы тел, полученных при вращении вокруг оси Oy соответственно криволинейного треугольника ABC и квадрата $BDOC$ (см. рис. **11.11**).

Применяя **(11.21)**, получаем:

$$V_{ABC} = \pi \int_1^2 \left(\frac{2-y}{y}\right)^2 dy = \pi \int_1^2 \left(4y^{-2} - \frac{4}{y} + 1\right) dy =$$

$$= \pi\left(-4y^{-1} - 4\ln|y| + y\right)\Big|_1^2 = \pi(3 - 4\ln 2);$$

$$V_{BDOC} = \pi \int_0^1 1^2 dy = \pi y\Big|_0^1 = \pi$$

(последний объем не что иное, как объем цилиндра с радиусом основания $R = 1$ и высотой $H = 1$).

Окончательно имеем:

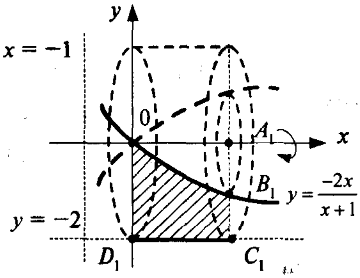


Рис. 11.12

$$V_y = \pi(3 - 4\ln 2) + \pi = 4\pi(1 - \ln 2) \approx$$
$$\approx 3{,}86 \text{ (ед.}^3\text{)}.$$

Выполняя параллельный перенос оси Ox на 2 единицы вверх, получаем новые уравнения линий, ограничивающих плоскую фигуру:

$$y = \frac{2}{x+1} - 2 = \frac{-2x}{x+1},\ x = 0,\ x = 1,$$

$y = -2$. Тогда искомый объем — это объем тела, полученного при вращении фигуры $B_1C_1D_1O$ (рис. **11.12**) вокруг оси Ox. Этот объем равен разности двух объемов:

$$V_x = V_{A_1C_1D_1O} - V_{A_1B_1O}.$$

Применяя **(11.20)**, получаем:

$$V_x = \pi\int_0^1 2^2\,dx - \pi\int_0^1\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2 dx = 4\pi - 4\pi\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx.$$

Воспользуемся заменой переменной $t = x + 1$. Тогда $x = t - 1$, $dx = dt$ и, если $x = 0$, то $t = 1$, и, если $x = 1$, то $t = 2$. Тогда имеем

$$V_x = 4\pi - 4\pi\int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t^2}dt = 4\pi - 4\pi\int_1^2 \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2}dt = 4\pi - 4\pi\int_1^2\left(1 - \frac{2}{t} + t^{-2}\right)dt =$$

$$= 4\pi - 4\pi(t - 2\ln|t| - 1/t)\Big|_1^2 = 2\pi(4\ln 2 - 1) \approx 11{,}1 \text{ (ед.}^3\text{)}. \blacktriangleright$$

11.35. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox круга единичного радиуса с центром в точке (0; 2)

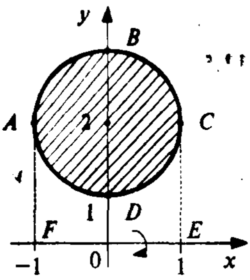


Рис. 11.13

Р е ш е н и е. Отметим, что тело указанного вида в геометрии называется *тором*. Искомый объем $V_x = V_{ABCEF} - V_{ADCEF}$, где V_{ABCEF}, V_{ADCEF} — объемы, полученные при вращении вокруг оси Ox фигур, ограниченных соответственно линиями $ABCEF$ и $ADCEF$ (рис. **11.13**).

Уравнения полуокружностей ABC и ADC имеют вид:

$$y = 2 \pm \sqrt{1 - x^2}$$

(соответственно). Используя **(11.20)**, **(11.4)**, получаем:

$$V_x = \pi\int_{-1}^{1}\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx - \pi\int_{-1}^{1}\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi\int_{-1}^{1} 8\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Применяя **(11.9)** и результат примера 11.1, *е*, окончательно имеем
$V_x = 16\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = 16\pi\cdot\frac{\pi}{4} = 4\pi^2 \approx 39{,}5$ (ед.^{3}). ▶

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

11.36. $y=e^x, y=e^{x/2}, y=e^2$. **11.37.** $y=x^4-2x^2, y=0$.
11.38. $y=3+2x-x^2, y=x+1$. **11.39.** $y=x^2+3, xy=4, y=2, x=0$.
11.40. $y=x^3, y=-2x^2+3x$ (фигура расположена в первой четверти).
11.41. $y=\sqrt{1-x}, y=x+1, y=0$. **11.42.** $y=\cos 2x, y=0, x=0, x=\pi/4$.
11.43. $y=2-x^4, y=x^2$. **11.44.** $xy=1, y=x^2, x=3, y=0$.
11.45. $x=0, x=2, y=2^x, y=2x-x^2$.
11.46. $y=\arcsin 2x, x=0, y=-\pi/2$.
11.47. $y=x^2+1, x=y^2, 3x+2y-16=0, x=0$.
11.48. $y=(x+1)^2, y^2=x+1$.
11.49. $y=4-x^2, y=x^2-2x, y=0$ (фигура расположена во второй четверти).
11.50. $y=-\frac{1}{2}x^2+2, x+2y-4=0, y=0$ (фигура расположена в первой четверти).
11.51. $x=0, y=4x-x^2$ и касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x=3$.
11.52. $x=\cos t, y=2\sin t, t\in[0;\ 2\pi]$. **11.53.** $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, t\in[0;\ 2\pi]$.

Найти длины дуг следующих кривых:

11.54. $y=2\sqrt{x}$ от $x=0$ до $x=1$.
11.55. $y=\ln x$ от $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{8}$.
11.56. $y=\arcsin e^{-x}$ от $x=0$ до $x=1$.
11.57. $x=t-\sin t, y=1-\cos t$ от $t=0$ до $t=2\pi$.

Найти площади поверхностей вращения, полученных при вращении вокруг оси Ox следующих кривых:

11.58. $y=x^3$ при $x\in[0;\ \sqrt[4]{1/3}]$. **11.59.** $9y^2=x(3-x)^2$ при $x\in[0;\ 3]$.
11.60. $x^2+y^2=9$ при $x\in[-2;\ 1]$. **11.61.** $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$ при $t\in[0;\ \pi/2]$.

Найти объемы тел, образованных при вращении вокруг осей Ox и Oy плоских фигур, ограниченных линиями:

11.62. $y=x^3,\quad y=4x.$ **11.63.** $y=\sin x, y=0$ при $0\le x\le\pi.$

11.64. $y=4/x, x=1, x=4, y=0.$ **11.65.** $y=\frac{1}{2}x^2-2x, y=0.$

11.66. $y=x^2, xy=8, y=0, x=4.$ **11.67.** $x=\sqrt{y-1},\quad x=0,\quad y=5.$

11.68. $y=\ln x, y=0, x=e.$ **11.69.** $y=-x^2+4,\quad y=x^2,\quad x=0.$

11.70. $y=\sqrt{6x},\ y=\sqrt{16-x^2},\ x=0.$ **11.71.** $y=x^2+1, x=y^2+1, y=0, x=0, x=2.$

11.72. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2,\quad y=0$ вокруг прямых: *а*) $x=-1$; *б*) $y=1$.

11.3. Несобственные интегралы

А. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Справочный материал

Пусть функция $y=f(x)$ интегрируема на произвольном отрезке $[a, t]$. *Несобственным интегралом* (*первого рода*) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется предел функции $\int\limits_a^{t} f(x)\,dx$ при $t\to\infty$, т.е.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int\limits_a^{t} f(x)\,dx. \qquad \textbf{(11.22)}$$

Если предел, стоящий в правой части равенства **(11.22)**, существует и конечен, то соответствующий несобственный интеграл называется *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся.*

Аналогично, по определению,

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{t\to-\infty}\int\limits_t^{b} f(x)\,dx, \qquad \textbf{(11.23)}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad \textbf{(11.24)}$$

где a — некоторое число. При этом несобственный интеграл, стоящий в левой части равенства **(11.24)**, называется *сходящимся*, если сходятся оба несобственных интеграла из правой части этого равенства; в противном случае — *расходящимся.*

11.73. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$; *б*) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$; *в*) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; *г*) $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x+1}dx$,

если они сходятся.

Р е ш е н и е:

а) По определению **(11.22)**, получаем

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{t\to+\infty}\int\limits_2^{t}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^t=\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\ln\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\lim_{t\to+\infty}\frac{t-1}{t+1}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}(\ln 1+\ln 3)=0{,}5\ln 3.$$

б) По определению,

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{t\to+\infty}\int\limits_2^{t}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{t\to+\infty}\int\limits_2^{t}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{t\to+\infty}\ln|\ln x|\Big|_2^t=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(\ln\ln t-\ln\ln 2)=+\infty,$$

т.е. данный интеграл расходится.

в) Полагая в определении **(11.24)**, что $a=0$, учитывая четность подынтегральной функции, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{0}^{t}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=2\lim_{t\to+\infty}(\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}0)=2(\pi/2-0)=\pi.$$

г) $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x+1}dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_0^{t}xe^{-x+1}dx.$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям **(11.13)**: пусть $u=x$, $e^{-x+1}dx=dv$. Тогда $du=dx$, $v=\int e^{-x+1}dx=-e^{-x+1}$ и

$$\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x+1}dx=\lim_{t\to+\infty}\left(-xe^{-x+1}\Big|_0^t+\int\limits_0^{t}e^{-x+1}dx\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t+1}-e^{-t+1}+e\right)=e.\ ▶$$

Геометрически, если $f(x) \geq 0$ на полуинтервале $[a,\ +\infty)$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ численно равен площади под кривой $y = f(x)$ на $[a, +\infty)$. В этом смысле, в частности, результаты примера **11.73**, ***в***, ***г*** означают, что площадь под кривой $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (кривая Аньези) на интервале $(-\infty;\ +\infty)$ равна π (ед.^{2}) (рис. **11.14**), и площадь под кривой $y = xe^{-x+1}$ на полуинтервале $[0, +\infty)$ равна e (ед.^{2}) (рис. **11.15**).

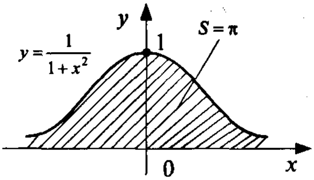


Рис. 11.14

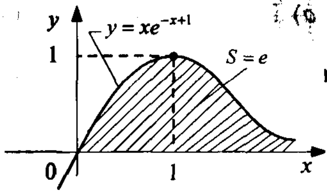


Рис. 11.15

Б. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Справочный материал

Пусть функция $y = f(x)$ — непрерывна, но не ограничена на полуинтервале $[a, b)$. В этом случае интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется ***несобственным*** (*второго рода*) и, по определению,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx. \qquad \textbf{(11.25)}$$

Если предел, стоящий в правой части последнего равенства, существует и конечен, то этот интеграл называется *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично, если функция $y = f(x)$ непрерывная, но неограниченная на полуинтервале $(a, b]$, то, по определению,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx. \qquad \textbf{(11.26)}$$

Геометрически несобственные интегралы второго рода от неотрицательных функций численно равны площадям под графиками этих функций на рассматриваемых промежутках.

Если функция не является непрерывной в некоторой внутренней точке $x = c$ отрезка интегрирования $[a, b]$, то интегралы от таких функций на данном отрезке сводятся к несобственным интегралам **(11.25)**, **(11.26)** с помощью свойства **(11.7)** определенного интеграла.

11.74. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; *б*) $\int\limits_{-7}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$,

если они сходятся.

Решение:

а) Подынтегральная функция $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не ограничена вблизи точки $x = 1$. Согласно **(11.25)**, имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to 0+} \arcsin x\Big|_0^{1-\delta} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0+} \arcsin(1-\delta) = \arcsin 1 = \pi/2.$$

Геометрический смысл полученного результата: площадь под кривой $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на полуинтервале $[0, 1)$ равна $\pi/2$ (ед.^{2}) (рис. **11.16**).

б) Подынтегральная функция $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ не определена во внутренней точке $x = 1$ отрезка интегрирования $[-7, 2]$ и не ограничена вблизи этой точки. Используя свойство **(11.7)** определенного интеграла, запишем исходный интеграл в виде суммы двух слагаемых:

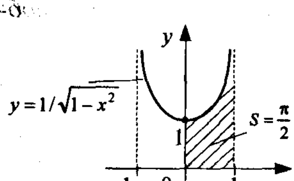


Рис. 11.16

$$\int\limits_{-7}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \int\limits_{-7}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}},$$

для вычисления которых применим определения **(11.25)**, **(11.26)** (соответственно). Тогда получаем:

$$\int\limits_{-7}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{-7}^{1-\delta} (x-1)^{-2/3} dx + \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{1+\delta}^{2} (x-1)^{-2/3} dx =$$

$$= \lim_{\delta\to 0+} 3(x-1)^{1/3}\Big|_{-7}^{1-\delta} + \lim_{\delta\to 0+} 3(x-1)^{1/3}\Big|_{1+\delta}^{2} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0+} 3\delta^{1/3} + 6 + 3 - \lim_{\delta\to 0+} 3(-\delta)^{1/3} = 9. \blacktriangleright$$

Вычислить интегралы (если они сходятся):

11.75. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^4}$.

11.76. $\int_{-1}^{-\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$.

11.77. $\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx$.

11.78. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

11.79. $\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx$.

11.80. $\int_{0}^{+\infty}\operatorname{arctg} x\,dx$.

11.81. $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}dx$.

11.82. $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$.

11.83. $\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

11.84. $\int_{1}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$.

11.85. $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2}$.

11.86. $\int_{1}^{0}\ln x\,dx$.

11.87. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

11.88. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $y=\frac{1}{x^2+2x}$ и ее горизонтальной асимптотой при $x \geq 1$.

11.89. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox плоской фигуры, заключенной между кривой $y=\frac{1}{\sqrt[3]{4-x}}$, ее вертикальной асимптотой и осью Ox на отрезке $[2; 6]$.

11.90. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, заключенной между линиями $y = \ln x$ и $y = 0$ на полуинтервале $(0; 1]$.

11.4. Приближенное вычисление определенного интеграла

Справочный материал

Пусть функция $y=f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и этот отрезок разбит на n равных частей точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$,

$$x_i = x_{i-1} + ih,$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда приближенное значение определенного интеграла от функции $y = f(x)$ на $[a, b]$ может быть найдено по *формуле трапеций*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right). \qquad \textbf{(11.27)}$$

Погрешность Δ от применения формулы трапеций оценивается по формуле:

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \qquad \textbf{(11.28)}$$

где M_2 — максимальное значение модуля второй производной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$M_2 = \max_{x \in [a,\, b]} |f''(x)|.$$

11.91. Вычислить $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле трапеций с точностью до 0,01.

Решение. Известно, что k-я производная функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ может быть представлена в виде:

$$f^{(k)}(x) = k! \cos^{k+1} u \sin\left((k+1)(u + \frac{\pi}{2})\right),$$

где $u = \operatorname{arctg} x$.

Так как $|\sin \alpha| \le 1$, $|\cos \alpha| \le 1$ при любом аргументе α, то

$$|f^{(k)}(x)| \le k!$$

Тогда $|f''(x)| \le 2! = 2$ и (см. **(11.28)**)

$$\Delta \le \frac{(1-0)^3}{12n^2} \cdot 2 = \frac{1}{6n^2}.$$

Из условия $\Delta \le 0{,}01$ находим $n \ge 4{,}08$, т.е. для достижения требуемой точности в формуле **(11.27)** достаточно положить $n = 5$. Тогда $h = \dfrac{1-0}{5} = 0{,}2$ и $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}4$, $x_3 = 0{,}6$, $x_4 = 0{,}8$, $x_5 = 1$. Соответственно, $f(x_0) = \dfrac{1}{1+0^2} = 1$, $f(x_1) = \dfrac{1}{1+0{,}2^2} = 0{,}96154$,

$$f(x_2)=\frac{1}{1+0{,}4^2}=0{,}86207,\ f(x_3)=\frac{1}{1+0{,}6^2}=0{,}73529,$$

$$f(x_4)=\frac{1}{1+0{,}8^2}=0{,}60976,\ f(x_5)=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}.$$

Подставляя теперь эти значения в **(11.27)**, окончательно получаем:

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\cong 0{,}2\ (\frac{1+0{,}5}{2}+0{,}96154+0{,}86207+0{,}73529+0{,}60976)=0{,}78373.$$

По формуле Ньютона—Лейбница $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$, поэтому применение формулы трапеций для данного определенного интеграла позволяет, в частности, вычислить число π с требуемой точностью.▶

11.92. Вычислить $\ln 2$ с точностью до 0,01.

Указание: воспользоваться равенством $\ln 2=\int_1^2\frac{dx}{x}$ и формулой трапеций.

11.93. Вычислить по формуле трапеций для $n = 10$ интеграл $\int_0^4 x^2dx$. Найти значение погрешности полученного результата.

11.94. Вычислить по формуле трапеций для $n = 8$ интеграл $\int_1^9\sqrt{6x-5}\,dx$. Найти значение погрешности полученного результата.

11.95. При каком значении n следует применить формулу трапеций для вычисления интеграла $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001?

11.5. Использование понятия определенного интеграла в экономике

Пусть функция $z=f(x)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Тогда объем продукции $Q(t_1,\ t_2)$, произведенной за промежуток времени $[t_1,\ t_2]$, вычисляется по следующей формуле:

$$Q(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}f(t)\ dt. \qquad \textbf{(11.29)}$$

11.96. Изменение производительности производства с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией $z = 32 - 2^{-0,5t+5}$, где t – время в месяцах. Найти объем продукции, произведенной: *а*) за первый месяц; *б*) за третий месяц; *в*) за шестой месяц; *г*) за последний месяц года, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

Решение. По формуле **(11.29)**, получаем:

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left(32 - 2^{-0,5t+5}\right) dt = 32(t_2 - t_1) + \frac{64}{\ln 2}\left(2^{-0,5t_2} - 2^{-0,5t_1}\right).$$

Тогда:

$$Q(0; 1) = 32(1-0) + \frac{64}{\ln 2}(2^{-0,5} - 2^0) = 4,95;$$

$$Q(2; 3) = 32(3-2) + \frac{64}{\ln 2}(2^{-0,5\cdot 3} - 2^{-0,5\cdot 2}) = 18,48;$$

$$Q(5; 6) = 32(5-6) + \frac{64}{\ln 2}(2^{-0,5\cdot 6} - 2^{-0,5\cdot 5}) = 27,22;$$

$$Q(11; 12) = 32(12-11) + \frac{64}{\ln 2}(2^{-0,05\cdot 12} - 2^{-0,5\cdot 11}) = 31,4.$$

Сравнивая между собой полученные результаты, можно заметить, что основная работа по внедрению данного технологического процесса приходится, в основном, на первую половину года.▶

Возможность учета влияния различных факторов на изменение производительности производства связана с использованием, например, так называемых *функций Кобба—Дугласа*. В этом случае производительность $f(t)$ представляется в виде произведения трех сомножителей:

$$f(t) = a_0 A^{\alpha}(t)\, L^{\beta}(t)\, K^{\gamma}(t),$$

где функции $A(t)$, $L(t)$, $K(t)$ есть величины затрат природных ресурсов, труда и капитала (соответственно), a_0, α, β, γ — некоторые числа.

11.97. Найти объем выпускаемой продукции за пять лет, если в функции Кобба—Дугласа $A(t) = e^t$, $L(t) = (t+1)^2$, $K(t) = (100 - 3t)^2$, $a_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0,5$, (t — время в годах).

Решение. Подставляя функцию производительности $f(t)$ в формулу **(11.29)**, получаем:

$$Q(0; 5) = \int_0^5 e^t (t+1)(100-3t)\, dt = \int_0^5 e^t(-3t^2 + 97t + 100)\, dt.$$

Применяя дважды последовательно формулу интегрирования по частям (11.13), имеем:

$$Q(0;\,5) = (-3t^2 + 97t + 100)e^t\Big|_0^5 - (97 - 6t)e^t\Big|_0^5 - 6e^t\Big|_0^5 = 64825. \blacktriangleright$$

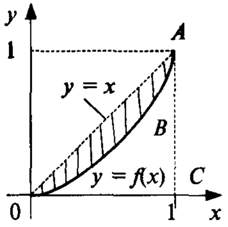


Рис. 11.17

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, характеризующую неравномерность распределения доходов среди населения, где y — доля совокупного дохода, получаемого долей x беднейшего населения. График этой функции называется *кривой Лоренца* (рис. **11.17**). Очевидно, что $0 \le f(x) \le x$ при $x \in [0,\,1]$, и неравномерность распределения доходов тем больше, чем больше площадь фигуры OAB (см. рис. **11.17**). Поэтому в качестве меры указанной неравномерности используют так называемый *коэффициент Джини* k, равный отношению площади фигуры OAB к площади треугольника OAC.

11.98. По данным исследований о распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = \dfrac{x}{3-2x}$, где $x \in [0,\,1]$. Вычислить коэффициент Джини k.

Р е ш е н и е. По формуле **(11.16)** получаем

$$S_{OAB} = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{3-2x}\right)dx = \int_0^1 \left(x + \frac{x - 1{,}5 + 1{,}5}{2x-3}\right)dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{2x-3}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{3}{4}\ln|2x-3|\,\Big|_0^1 = 1 - 0{,}75\ln 3 \approx 0{,}176.$$

Тогда

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = \frac{0{,}176}{0{,}5} = 0{,}352\,. \blacktriangleright$$

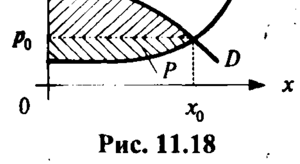


Рис. 11.18

Пусть $p = f(x)$ — кривая спроса D на некоторый товар и $p = g(x)$ — кривая предложения S, где p — цена на товар, x — величина спроса (предложения). Обозначим через $(x_0,\,p_0)$ точку рыночного равновесия (см. рис. **11.18**).

Доход от реализации количества товара x_0 по равновесной цене p_0 равен произведению $x_0 p_0$. Если предполагать непрерывное снижение цены от максимальной $p_D = f(0)$ до равновесной p_0 по мере удовлетворения спроса, то доход составит $\int\limits_0^{x_0} f(x)\,dx$. Величина денежных средств $C = \int\limits_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0$ сберегается потребителями, если предполагать продажу товара по равновесной цене p_0, поэтому C называется также *выигрышем потребителей.*

Аналогично,

$$P = p_0 x_0 - \int\limits_0^{x_0} g(x)\,dx$$

называется *выигрышем поставщиков.*

Величины C и P численно равны площадям соответствующих криволинейных треугольников (рис. **11.18**).

11.99. Найти выигрыши потребителей и поставщиков в предложении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют вид:

$$p = 186 - x^2,\ p = 20 + \frac{11}{6}x..$$

Р е ш е н и е. Решая систему

$$\begin{cases} p = 186 - x^2, \\ p = 20 + \dfrac{11}{6}x, \end{cases}$$

найдем точку рыночного равновесия: $x_0 = 12, p_0 = 42$.

Тогда

$$C = \int\limits_0^{12}(186 - x^2)\,dx - 12\cdot 42 = 186x\Big|_0^{12} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{12} - 504 = 1152,$$

$$P = 12\cdot 42 - \int\limits_0^{12}(20 + \frac{11}{6}x)\,dx = 504 - 20x\Big|_0^{12} - \frac{11}{6}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{12} = 132 \text{ (ден. ед.).}$$ ▶

11.100. Определить объем выпуска продукции за первые пять часов работы при производительности $f(t) = 11{,}3\, e^{-0{,}417t}$, где t — время в часах.

11.101. Найти объем продукции, выпущенной предприятием за год (258 рабочих дней), если ежедневная производительность этого предприятия задана функцией $f(t) = -0{,}0033\,t^2 - 0{,}089\,t + 20{,}96$, где $1 \le t \le 8$, t — время в часах.

11.102. При непрерывном производстве химического волокна производительность $f(t)$ (т/ч) растет с момента запуска 10 часов, а затем остается постоянной. Сколько волокна дает аппарат в первые сутки после запуска, если $f(t) = e^{t/5} - 1$ при $t \in [0,10]$.

11.103. Найти объем выпуска продукции за четыре года, если в функции Кобба—Дугласа $A(t) = e^{3t}$, $L(t) = (t + 1)$, $K(t) = 10$, $a_0 = \alpha = \beta = \gamma = 1$.

11.104. Кривые Лоренца распределения дохода в некоторых странах могут быть заданы уравнениями:

а) $y = 0{,}85x^2 + 0{,}15x$; *б*) $y = 2^x - 1$; *в*) $y = 0{,}7x^3 + 0{,}3x^2$.

Какую часть дохода получают 10 % наиболее низкооплачиваемого населения? Вычислить коэффициенты Джини для этих стран.

11.105. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$. Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

11.106. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = \dfrac{100}{x+15}$.

Найти выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10.

11.107. Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, законы спроса и предложения на который имеют следующий вид:

а) $p = 250 - x^2$, $\quad p = \dfrac{1}{3}x + 20$;

б) $p = 240 - x^2$, $\quad p = x^2 + 2x + 20$.

Задачи для повторения

Вычислить определенные интегралы:

11.108. $\displaystyle\int_1^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$. **11.109.** $\displaystyle\int_0^{-1} \frac{(x+1)dx}{x^2 + 4x - 5}$.

11.110. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$. **11.111.** $\displaystyle\int_0^{\pi/6} x\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$.

11.112. $\displaystyle\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$. **11.113.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} xe^{2x}\sin x\,dx$.

11.114. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

Найти площадь фигур, ограниченных линиями:

11.115. $y = x^2$, $y = x^2/4$, $y = 1$.

11.116. $y=2/x,\ y=x/2,\ y=2.$

11.117. $y=x^2+1,\ y=x+1,\ y=2.$

11.118. $y=x^2-2x,\ y=0,\ x=1,\ x=3.$

Найти длины дуг следующих кривых:

11.119. $y=2e^{x/2}$ от $x=\ln 3$ до $x=\ln 8.$

11.120. $y=x^2/2$ от $x=0$ до $x=1.$

11.121. Найти площадь поверхности вращения, полученной при вращении вокруг оси Ox кривой $y=2\sqrt{x}$ при $x\in[1;\,3].$

Найти объемы тел, образованных при вращении вокруг осей Ox и Oy плоских фигур, ограниченных линиями:

11.122. $y=e^x,\ y=e^{x/2},\ y=e^2.$

11.123. $y=x,\ y=1/x,\ x=2.$

Вычислить интегралы (если они сходятся):

11.124. $\int\limits_0^{-\infty}\frac{dx}{(2x-3)^2}.$

11.125. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{2x^4+8}}.$

11.126. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\ln x}{x^2}\,dx.$

11.127. $\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}.$

11.128. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{6-2x-2x^2}{(x^2+3)^2}\,dx$

11.129. $\int\limits_1^{2}\frac{x-x\ln x-1}{x(x-1)^2}\,dx$

11.130. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+3x+2}.$

Контрольные задания по главе 11 «Определенный интеграл»

№	Вариант 11.1	Вариант 11.2	Вариант 11.3
	Вычислить определенные интегралы:		
1	$\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$	$\int\limits_1^{2}\frac{1}{x^2}e^{1/x}dx$	$\int\limits_0^{7}\frac{x^3}{\sqrt[3]{7+x^2}}dx$
2	$\int\limits_0^{\ln 0,5}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$	$\int\limits_0^{2\pi}x^2\cos x\,dx.$	$\int\limits_1^{e}(x\ln x)^2\,dx$

Окончание контрольных заданий

№	Вариант 11.1	Вариант 11.2	Вариант 11.3
3	$\int\limits_0^3 x^2 e^{-x/3}\,dx$	$\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$	$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$
4	$\int\limits_0^{0,5} \frac{3-2x}{x^2-1}\,dx$	$\int\limits_4^5 \frac{dx}{x^2-3x}$	$\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^{3x}\,dx}{1+e^{3x}}$
5	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:		
	$y=x^2-2,\ \ y=-1,$ $y=2$	$y=\ln x,\ \ y=e^x,$ $x=2,\ x=0,\ y=0$	$y=3x^3-x,\ \ y=2x$
6	Найти объем тела, полученного при вращении плоской фигуры, ограниченной линиями:		
	$y=x^2,\ \ xy=8,$ $x=0,\ y=8$ (вокруг оси Oy)	$xy=6,\ x=1,\ x=6,$ $y=0$ (вокруг оси Ox)	$y=x^2,\ \ y=\frac{1}{x},\ x=2$ (вокруг оси Oy)
7	Вычислить несобственный интеграл (если он сходится):		
	$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(5x+7)^3}$	$\int\limits_{-7}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$

Тест 11

1. Найти максимальное значение интегральной суммы функции $y = x^2$ на отрезке [0, 1], если число отрезков разбиения равно 4.
Ответ: a/b, где $a = \ldots$, $b = \ldots$ (a и b — положительные целые числа, дробь a/b — несократима).

2. При каких значениях параметров a и b справедливо равенство

$$\int_0^1 x\sqrt{e^{x^2+1}}\,dx = e^a - \sqrt{e^b}\ ?$$

3. Найти такие значения a и b, при которых справедливо равенство:

$$\int_1^{e-1} \ln(x+1)\,dx = a - 2\ln b.$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+7x}.$$

Ответ: $\frac{1}{a}\ln\frac{9}{b}$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$(a и b — целые числа).

5. При каком значении параметра a интеграл $\int_0^3 \frac{ax}{x+1}dx$ равен площади S фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x-2}{x+1}$, $y = -2$, $x = 3$. Найти эту площадь S.
Ответ: $a = \ldots$, $S = 9 - \ln b$, где $b = \ldots$ (a и b — целые числа).

6. Найти длину дуги кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ на отрезке [1, 4].

Ответ: a/b, где $a = \ldots$, $b = \ldots$ (a и b — положительные целые числа, дробь a/b — несократима).

7. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной линиями $x = y^2$, $x = 4y - y^2$, $x = 0$.
Ответ: $a\pi/3$, где $a = \ldots$.

8. При каком минимальном значении n формула трапеций обеспечивает вычисление определенного интеграла $\int_1^5 \ln x\,dx$ с точностью до 0,001?

9. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $y = 4xe^{-2x}$ и ее горизонтальной асимптотой на промежутке $[0; +\infty)$.

10. Вычислить определенный интеграл $\int_0^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$, если он сходится.

Глава 12
Дифференциальные уравнения

12.1. Основные понятия

Справочный материал

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее искомую функцию некоторой переменной, эту переменную и производные различных порядков данной функции:

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок n старшей производной, входящей в уравнение, называется *порядком* этого дифференциального уравнения.

Любая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество, называется *решением* этого дифференциального уравнения. Решение, заданное в неявном виде $f(x, y) = 0$, называется *интегралом* дифференциального уравнения.

График решения (интеграла) дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Решение (интеграл) дифференциального уравнения n-го порядка, зависящее от n произвольных независимых постоянных, называется *общим решением (интегралом)* этого уравнения. Решение (интеграл), полученное при конкретных числовых значениях этих постоянных, называется *частным решением (частным интегралом)* дифференциального уравнения.

12.1. Доказать, что функция

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} \tag{12.1}$$

является решением уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \tag{12.2}$$

Р е ш е н и е. Последовательно дифференцируя **(12.1)**, приходим к равенствам:

$$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x},$$

$$y'' = C_1e^x + 4C_2e^{2x}.$$

Решая эту систему относительно C_1e^x и C_2e^{2x}, получаем:

$$C_1e^x = 2y' - y'',$$

$$C_2e^{2x} = \frac{1}{2}(y'' - y').$$

Подставляя эти выражения в **(12.1)**, приходим к **(12.2)**. ▶

12.2. Проверить, что функция

$$y^3 - Cx^3 + 3xy = 0 \qquad \textbf{(12.3)}$$

является интегралом уравнения

$$y^3 - (xy^2 + x^2)\,y' + 2xy = 0. \qquad \textbf{(12.4)}$$

Р е ш е н и е. Дифференцируя **(12.3)** по x в предположении, что $y = y(x)$, приходим к равенству

$$y^2y' - Cx^2 + y + xy' = 0,$$

откуда

$$Cx^2 = (y^2 + x)\,y' + y.$$

Подставляя выражение для Cx^2 из последнего равенства в **(12.3)**, имеем:

$$y^3 - (y^2y' + xy' + y)\,x + 3xy = 0,$$

что равносильно **(12.4)**.▶

12.3. Найти дифференциальное уравнение семейства кривых

$$y = C\,(x - C)^2. \qquad \textbf{(12.5)}$$

Р е ш е н и е. Дифференцируя **(12.5)** по переменной x, получаем

$$y' = 2C\,(x - C), \qquad \textbf{(12.6)}$$

откуда

$$C^2 = Cx - 0{,}5y'. \qquad \textbf{(12.7)}$$

С помощью равенства **(12.7)** преобразуем **(12.5)** так, что постоянная C будет входить в запись слагаемых полученного выражения в степенях не более первой:

$$y = 0{,}5\,xy' - 0{,}5\,Cy'.$$

Следовательно,

$$Cy' = xy' - 2y. \qquad \textbf{(12.8)}$$

Умножая **(12.6)** на $(y')^2$, получаем

$$(y')^3 = 2xy'\,(Cy') - 2(Cy')^2.$$

Исключая из полученного равенства Cy' с помощью **(12.8)**, окончательно имеем:

$$(y')^3 = 4xyy' - 8y^2.$$ ▶

12.4. Найти решение уравнения

$$y' = 2xe^{x^2},$$

удовлетворяющие начальному условию $y(0) = 1$.

Р е ш е н и е. Из определения неопределенного интеграла (см. гл.10), следует, что общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = \int 2xe^{x^2}\,dx.$$

Используя преобразование переменной под знаком дифференциала, получаем

$$y = \int e^{x^2}\,dx^2 = e^{x^2} + C.$$

Учитывая начальное условие, приходим к равенству $1 = 1 + C$, откуда $C = 0$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид:

$$y = e^{x^2}.$$

Геометрически найденная функция представляет интегральную кривую дифференциального уравнения, проходящую через точку (0, 1).▶

Проверить, что следующие функции являются интегралами дифференциальных уравнений:

12.5. $x^2 - xy + y^2 = C^2$, $\quad (x - 2y)\,y' = 2x - y$.

12.6. $x\sqrt{1 + y^2} = Cy$, $\quad xy' - y = y^3$.

12.7. $y^2 - 2 = Ce^{1/x}$, $\quad 2x^2yy' + y^2 = 2$.

12.8. $y = C_1 \ln x - x^2/4 + C_2$, $\quad x(y'' + 1) + y' = 0$.

При каких значениях параметра a следующие функции являются решениями (интегралами) дифференциальных уравнений:

12.9. $x = Cy^2 - y^a$, $\quad y^2 - (2xy + 3)\,y' = 0$.

12.10. $y = ax^4 + C/x^2$, $\quad y' + 2y/x = x^3$.

Составить дифференциальные уравнения семейств кривых:

12.11. $y = Ce^x$. **12.12.** $x^2 + Cy^2 = 2y$.

12.13. $Cy = \sin Cx$. **12.14.** $y^3 = C_1(x + C_2)^2$.

12.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением *с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде:

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy. \qquad \textbf{(12.9)}$$

Решается такое уравнение почленным интегрированием равенства (12.9).

12.15. Решить уравнение:

$$yx^2dy - \ln x\,dx = 0. \qquad \textbf{(12.10)}$$

Р е ш е н и е. Исходное уравнение перепишем в виде

$$y\,dy = \frac{\ln x\,dx}{x^2}. \qquad \textbf{(12.11)}$$

Таким образом, имеем уравнение с разделяющимися переменными и из (12.11) следует:

$$\int y\,dy = \int \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Интеграл левой части — табличный. Для нахождения интеграла правой части воспользуемся формулой интегрирования по частям (см. гл. 10), где $u = \ln x$, $dv = \dfrac{dx}{x^2}$:

$$y^2/2 = -x^{-1}\ln x + \int x^{-2}dx.$$

Окончательно интеграл уравнения (12.10) имеет вид:

$$y^2/2 = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C. \ \blacktriangleright$$

Уравнение вида

$$y' = f(ax + by),$$

где a и b — некоторые числа, приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью замены $z = ax + by$ или замены $z = ax + by + c$, где c — некоторое число.

12.16. Решить уравнение

$$y' + 1 = \sqrt{x + y + 1}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся заменой $z = x + y + 1$, где $z = z(x)$. Тогда $z' = y' + 1$ и исходное уравнение принимает вид:

$$z' = \sqrt{z},$$

или

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = dx,$$

т.е. становится уравнением с разделяющимися переменными относительно переменной z. Решая это уравнение, получаем:

$$\int z^{-1/2} dz = \int dx,$$

$$2z^{1/2} = x + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной, окончательно имеем

$$2 \cdot \sqrt{x + y + 1} = x + C,$$

или

$$y = 0{,}25\,(x + C)^2 - x - 1, \text{ где } x \geq -C. \ \blacktriangleright$$

Решить дифференциальные уравнения:

12.17. $(3x - 1)\,dy + y^2 dx = 0$.

12.18. $3x^2 y dx + 2\sqrt{4 - x^3}\, dy = 0$.

12.19. $xy' + 2y = 2xyy'$.

12.20. $e^{1-2x}(y^2 - 1)\,dy - dx = 0$.

12.21. $x^2(y' - 1) = 2y'$.

12.22. $e^{x+y} dx + y dy = 0$.

12.23. $y' = (x + y)^2$.

12.24. $(2x + 3y - 1)\,dx + (4x + 6y - 5)\,dy = 0$.

12.25. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

12.26. $y' e^{-x} = x - 1$.

Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям:

12.27. $(1+x^2)\,y^3 dx - (y^2 - 1)\,x^3 dy = 0$; $y(1) = -1$.

12.28. $\left(\sqrt{xy} + \sqrt{x}\right)y' - y = 0$; $y(1) = 1$.

12.29. $x^2(2yy' - 1) = 1$; $y(1) = 0$.

12.30. $y\,dx + \operatorname{ctg} x\,dx = 0$; $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$.

12.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Справочный материал

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если оно может быть представлено в виде

$$y' = g\,(y/x)$$

для некоторой функции g. Уравнение

$$y' = f(x, y)$$

является однородным, если функция $f(x, y)$ однородна степени ноль по переменным x, y, т.е. обладает свойством

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)$$

для произвольного числа α.

Замена переменной $z = y/x$, где $z = z(x)$, сводит однородные дифференциальные уравнения к уравнениям с разделяющимися переменными.

Уравнение вида

$$y' = h\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (12.12)$$

приводится к однородному в том случае, если прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ пересекаются: достаточно перенести начало координат в точку пересечения этих прямых. В случае, если указанные прямые не пересекаются, то выражения $(a_1x + b_1y)$ и $(a_2x + b_2y)$ пропорциональны, и уравнение **(12.12)** решается с помощью замены переменной $z = a_1x + b_1y$ (см. § **12.2**).

12.31. Решить уравнение

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}. \qquad (12.13)$$

Р е ш е н и е. Правая часть $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$ уравнения (12.13) является однородной функцией степени 0 по переменным x и y, так как

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2}{2(\alpha x)^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y).$$

Поэтому само уравнение (12.13) — однородное. Для его решения воспользуемся заменой переменной $z = y/x$, где $z = z(x)$. Тогда $y = zx$, $y' = z'x + z$, и уравнение (12.13) принимает вид:

$$z'x + z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^2,$$

или

$$z'x = \frac{(z-1)^2}{2},$$

что равносильно

$$\frac{2dz}{(z-1)^2} = \frac{dx}{x},$$

т.е. приходим к уравнению с разделяющимися переменными. Выполняя почленное интегрирование последнего равенства, получаем

$$-\frac{2}{z-1} = \ln|x| + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной, после преобразования имеем:

$$y = x - \frac{2x}{\ln|x| + C}. \blacktriangleright$$

12.32. Решить уравнение

$$y' = \frac{x+y}{x+1} + \left(\frac{y-1}{x+1}\right)^2. \qquad \textbf{(12.14)}$$

Р е ш е н и е. Поскольку $\frac{y-1}{x+1} = \frac{x+y-(x+1)}{x+1} = \frac{x+y}{x+1} - 1$, то правая часть уравнения (12.14) является функцией от выражения $\frac{x+y}{x+1}$. Прямые $x + y = 0$ и $x + 1 = 0$ пересекаются в точке $(-1;\ 1)$, поэтому перейдем к новым переменным, выполняя параллельный перенос координатных осей в эту точку: $t = x + 1$, $z = y - 1$. Искомой функцией становится $z = z(t)$. Так как $z' = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} = y'$, то исходное уравнение принимает вид:

$$z' = 1 + \frac{z}{t} + \left(\frac{z}{t}\right)^2. \qquad \textbf{(12.15)}$$

Для решения полученного однородного уравнения воспользуемся заменой переменной $u = z/t$, где $u = u(t)$. Тогда $z = ut$, $z' = u't + u$ и уравнение **(12.15)** принимает вид:

$$u't = 1 + u^2,$$

или

$$\frac{du}{1+u^2} = \frac{dt}{t},$$

т. е. является уравнением с разделяющимися переменными. Выполняя почленное интегрирование последнего равенства, получаем

$$\operatorname{arctg} u = \ln|t| + C,$$

или

$$u = \operatorname{tg}(\ln|t| + C).$$

Так как $u = \dfrac{z}{t} = \dfrac{y-1}{x+1}$, то (после преобразования) окончательно имеем $y = 1 + (x + 1)\operatorname{tg}(\ln|x + 1| + C)$. ▶

Решить дифференциальные уравнения:

12.33. $(xy - x^2)\,y' = y^2$. **12.34.** $xy^2dy = (x^3 + y^3)\,dx$.

12.35. $xy' = y\ln\dfrac{x}{y}$. **12.36.** $y - xy' = x + yy'$.

12.37. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

12.38. $(4x^2 + 3xy + y^2)\,dx + (4y^2 + 3xy + x^2)\,dy = 0$.

12.39. $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$. **12.40.** $(y + 2)\,dx = (2x + y - 4)\,dy$.

12.41. $(y' + 1)\ln\dfrac{y+x}{x+3} = \dfrac{y+x}{x+3}$. **12.42.** $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x+1}$.

12.43. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

12.44. Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

12.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Справочный материал

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно имеет вид:

$$y' + f(x)\, y = g(x), \qquad \textbf{(12.16)}$$

где $f(x)$, $g(x)$ — некоторые непрерывные функции переменной x. Если функция $g(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение **(12.16)** называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Решение $y = y(x)$ уравнения **(12.16)** может быть найдено в виде

$$y = u \cdot v,$$

где $v = v\,(x)$ — некоторое решение уравнения

$$v' + f(x)\, v = 0, \qquad \textbf{(12.17)}$$

$u = u\,(x)$ — решение уравнения

$$vu' = g\,(x),$$

(см. ниже пример **12.45**).

Уравнение **(12.16)** может быть также решено *методом вариации произвольной постоянной*, при котором сначала находят решение v однородного уравнения **(12.17)**. Это решение (как и любое общее решение дифференциального уравнения первого порядка) зависит от постоянной C ($v = v\,(x,\ C)$). Предполагая затем, что C является функцией переменной x, находят эту функцию $C = C(x)$ из условия, что $y = v(x,\ C(x))$ удовлетворяет исходному уравнению (**12.16**) (см. пример **12.46**).

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением Бернулли*, если оно имеет вид

$$y' + f(x)\, y = g(x)\, y^n,$$

где $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Это уравнение приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-n}$ либо может быть непосредственно решено любым из двух описанных выше способов решения линейных уравнений.

12.45. Решить уравнение

$$y' + \frac{y}{x+1} = x^2.$$

Р е ш е н и е. Будем искать решение этого линейного уравнения в виде

$$y = u \cdot v,$$

где $v = v\,(x)$ — некоторое решение уравнения

$$v' + \frac{v}{x+1} = 0, \qquad (12.18)$$

$u = u(x)$ — решение уравнения

$$vu' = x^2. \qquad (12.19)$$

Уравнение (12.18) — с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x+1}.$$

Выполняя почленное интегрирование последнего равенства, получаем:

$$\ln|v| = -\ln|x+1| + C.$$

Поскольку в данном случае достаточно найти *некоторое* решение уравнения (12.18), то удобно полагать $C = 0$, тогда

$$v = \frac{1}{x+1}.$$

Подставляя найденную функцию v в уравнение (12.19), приходим к уравнению

$$du = (x^3 + x^2)\,dx.$$

В результате почленного интегрирования последнего равенства получаем

$$u = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C.$$

Таким образом, решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C\right)\frac{1}{x+1}. \ \blacktriangleright$$

12.46. Решить уравнение

$$(y^3 - xy)\,y' = 1.$$

Решение. Будем искать решение этого уравнения в виде $x = x(y)$ (т.е. считая, что y — независимая переменная, а x — функция от y). Так как $y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = (x')^{-1}$, то исходное уравнение линейно относительно функции x:

$$x' + xy = y^3. \qquad (12.20)$$

Решим соответствующее однородное уравнение:

$$x' + xy = 0. \tag{12.21}$$

Пусть $x \neq 0$. Тогда

$$\frac{dx}{x} = -y\,dy,$$

$$\ln|x| = -\frac{y^2}{2} + C_1.$$

Последнее равенство равносильно

$$x = \pm e^{C_1} e^{-y^2/2}.$$

Учитывая, что $x = 0$ — решение уравнения **(12.21)**, получаем, что общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x = C_2 e^{-y^2/2}. \tag{12.22}$$

Полагая, что $C_2 = C_2(y)$, найдем эту функцию из условия, что **(12.22)** — решение уравнения **(12.20)**. Из **(12.22)** следует, что

$$x' = C_2' e^{-y^2/2} + C_2 e^{-y^2/2}(-y). \tag{12.23}$$

Подставляя **(12.22), (12.23)** в **(12.20)**, приходим к уравнению

$$C_2' e^{-y^2/2} = y^3,$$

или

$$dC_2 = y^3 e^{y^2/2}\,dy.$$

Тогда

$$C_2 = \int y^3 e^{y^2/2}\,dy = 2\int \frac{y^2}{2} e^{y^2/2}\,d\left(\frac{y^2}{2}\right).$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$C_2 = y^2 e^{y^2/2} - 2e^{y^2/2} + C.$$

Подставляя найденное выражение для функции $C_2 = C_2(y)$ в **(12.22)**, получаем решение уравнения **(12.20)**:

$$x = y^2 + Ce^{-y^2/2} - 2. \ ▶$$

12.47. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-xy^2.$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение является уравнением Бернулли при $n = 2$. Отметим, что $y = 0$ является решением этого уравнения. Пусть $y \neq 0$. Воспользуемся заменой переменной $z = y^{1-n} = y^{-1}$. Тогда $y = z^{-1}, y' = -z^{-2}z'$ и исходное уравнение принимает вид:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x}=x. \qquad \textbf{(12.24)}$$

Решим сначала однородное уравнение

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}. \qquad \textbf{(12.25)}$$

Пусть $z \neq 0$. Тогда

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x},$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_2, \qquad \textbf{(12.26)}$$

где C_2 — произвольное положительное число.

Равенство **(12.26)** перепишем в виде:

$$|z| = C_2|x| \qquad \text{или} \qquad z = \pm\, C_2x.$$

Учитывая, что $z = 0$ является решением уравнения **(12.25)**, получаем, что произвольное решение этого уравнения имеет вид:

$$z = C_1x, \qquad \textbf{(12.27)}$$

где C_1 — любое число.

Положим теперь, что $C_1 = C_1(x)$ и найдем эту функцию C_1 из условия, что **(12.27)** — решение уравнения **(12.24)**. Из **(12.27)** следует, что

$$z' = C_1'x + C_1.$$

Тогда, учитывая **(12.27)**, получаем, что уравнение **(12.24)** принимает вид:

$$C_1'x + C_1 - \frac{C_1x}{x} = x,$$

или

$$dC_1 = dx,$$

и поэтому

$$C_1 = x + C.$$

Подставляя это выражение в (12.27), имеем решение уравнения (12.24):

$$z=(x+C)\,x.$$

Так как $y=\frac{1}{z}$, то окончательно решение исходного уравнения имеет вид:

$$y\,(x^2+Cx)=1,$$

или

$$y=0. \blacktriangleright$$

Решить уравнения:

12.48. $y'-2y=e^{2x}$.

12.49. $y'+\frac{y}{x}=xe^{x/2}$.

12.50. $4y'+\frac{2y}{x+1}=\frac{x^3}{y^2}$.

12.51. $(y^2+x)y'=1$.

12.52. $1-2xyy'=y^3y'$.

12.53. $y'=\frac{4}{x}y+x\sqrt{y}$.

12.54. $2xy\frac{dy}{dx}-y^2+x=0$.

12.55. $3x\,dy=y(1+x\sin x-3y^3\sin x)dx$.

12.56. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$.

12.57. $(2x^2y\ln y-x)y'=y$.

12.58. Найти уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси абсцисс, равен квадрату ординаты точки касания.

12.59. Найти уравнение кривой, для которой отрезок касательной равен расстоянию точки пересечения этой касательной с осью абсцисс от точки $M(0;\ 1)$.

12.5. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Справочный материал

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$G(x,y',y'')=0,$$

т.е. в запись уравнения не входит искомая функция $y=y\,(x)$, то понижение порядка достигается с помощью замены $z=y'$.

Если уравнение имеет вид

$$G(y,y',y'')=0,$$

то используется замена $z = y'$, причем z рассматривается как функция переменной y.

12.60. Решить уравнение

$$y'' = y' \operatorname{ctg} x.$$

Р е ш е н и е. Положим $z = y'$. Тогда $y'' = (y')' = z'$ и исходное уравнение принимает вид

$$z' = z \operatorname{ctg} x. \qquad \textbf{(12.28)}$$

Пусть $z \neq 0$. Тогда из **(12.28)** следует:

$$\frac{dz}{z} = \frac{\cos x \; dx}{\sin x},$$

или

$$\frac{dz}{z} = \frac{d \sin x}{\sin x}.$$

Интегрируя почленно последнее равенство, получаем

$$\ln|z| = \ln|\sin x| + \ln C_1,$$

где $C_1 > 0$, или

$$z = \pm\, C_1 \sin x.$$

Так как $z = 0$ является решением уравнения (12.28), то произвольное решение этого уравнения имеет вид:

$$z = C_1 \sin x, \qquad \textbf{(12.29)}$$

где C_1 — произвольное число.

Так как $z = \dfrac{dy}{dx}$, то из (12.29) следует:

$$dy = C_1 \sin x \; dx.$$

Интегрируя последнее равенство, окончательно получаем

$$y = -\, C_1 \cos x + C_2. \blacktriangleright$$

12.61. Решить уравнение

$$yy'' = y^2 y' + (y')^2.$$

Р е ш е н и е. Пусть $z = y'$, тогда $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dy'}{dy}\,\dfrac{dy}{dx} = z' \cdot z$, где $z' = \dfrac{dz}{dy}$, и исходное уравнение принимает вид:

$$yzz' = y^2 z + z^2, \qquad \textbf{(12.30)}$$

т.е. становится уравнением относительно функции $z = z(y)$. Очевидно, $z = 0$ — решение уравнения **(12.30)**, откуда $y = C$, где C — произвольное число.

Пусть $z \neq 0$. Тогда из **(12.30)** следует, что

$$yz' = y^2 + z \tag{12.31}$$

— линейное уравнение первого порядка (см. § **12.4**). Решение этого уравнения будем искать в виде $z = uv$, где $v = v(y)$ — некоторое решение уравнения

$$yv' - v = 0, \tag{12.32}$$

$u = u\,(y)$ — решение уравнения

$$u'v = y. \tag{12.33}$$

Решая **(12.32)**, в частности, имеем $v = y$. Тогда **(12.33)** приводит к уравнению $u' = 1$, откуда $u = y + C_1$, т.е. решение **(12.31)** имеет вид:

$$z = y^2 + C_1 y.$$

Так как $z = y'$, то приходим к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1 y.$$

Пусть $C_1 = 0$. Тогда при $y \neq 0$ имеем

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

и, следовательно, $x = -y^{-1} + C_2$, или

$$y = (C_2 - x)^{-1}. \tag{12.34}$$

Пусть $C_1 \neq 0$, тогда

$$x = \int \frac{dy}{y^2 + C_1 y} = \frac{1}{C_1}\int \frac{dy}{y} - \frac{1}{C_1}\int \frac{dy}{y + C_1},$$

и после интегрирования:

$$x = \frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y + C_1}\right| + C_3. \tag{12.35}$$

Окончательно решение исходного уравнения имеет вид $y = C$ или **(12.34)**, или **(12.35)**.▶

Решить уравнения:

12.62. $y'' = -\frac{x}{y'}$. **12.63.** $xy'' + y' = 0$.

12.64. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$. **12.65.** $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

12.66. $yy'' = (y')^2$. **12.67.** $4y' + (y'')^2 = 4xy''$.

12.68. $y''' = (y'')^2$. **12.69.** $y''' = 2(y'' - 1) \operatorname{ctg} x$.

Найти решение уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

12.70. $(y''x - y')y' = x^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

12.71. $2y(y')^3 + y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

12.6. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Справочный материал

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = r(x), \tag{12.36}$$

где p и q — некоторые действительные числа, $r(x)$ — некоторая функция. Если функция $r(x)$ тождественно равна нулю, то соответствующее уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Рассмотрим решение однородного дифференциального уравнения

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{12.37}$$

Дифференциальному уравнению **(12.37)** ставится в соответствие *характеристическое уравнение*:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{12.38}$$

где λ — переменная.

1. Если характеристическое уравнение **(12.38)** имеет действительные корни λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение уравнения **(12.37)** имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{12.39}$$

2. Если характеристическое уравнение **(12.38)** имеет один корень λ (кратности 2), то общее решение уравнения **(12.37)** имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}. \qquad \textbf{(12.40)}$$

3. Если характеристическое уравнение **(12.38)** имеет комплексные корни $\lambda = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{q - p^2/4}$, то общее решение уравнения **(12.37)** имеет вид:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin\beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos\beta x. \qquad \textbf{(12.41)}$$

12.72. Решить дифференциальные уравнения:

а) $2y'' - y' - y = 0$; *б)* $4y'' + 4y' + y = 0$; *в)* $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение:

а) Характеристическое уравнение

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

имеет различные корни ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1/2$), поэтому (см. **(12.39)**) общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x/2}.$$

б) В данном случае характеристическое уравнение имеет один корень кратности 2 ($\lambda = -1/2$), поэтому (см. **(12.40)**) искомое общее решение есть

$$y = C_1 e^{-x/2} + C_2 x e^{-x/2}.$$

в) Характеристическое уравнение имеет комплексные корни ($\lambda = -1 \pm 2i$), поэтому (см. **(12.41)** при $\alpha = -1$, $\beta = 2$) общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x} \sin 2x + C_2 e^{-x} \cos 2x. ▶$$

Рассмотрим решение неоднородного дифференциального уравнения **(12.36)**.

***Первый способ**. Метод вариации произвольной постоянной.*

Пусть найдено общее решение

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad \textbf{(12.42)}$$

соответствующего однородного уравнения **(12.37)**. Тогда общее решение исходного уравнения **(12.36)** имеет вид **(12.42)**, где C_1 и C_2 — функции переменной x. Эти функции могут быть найдены в результате решения системы:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = r. \end{cases} \qquad \textbf{(12.43)}$$

12.73. Решить уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}. \qquad \textbf{(12.44)}$$

Решение. Поскольку корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$ комплексные ($\lambda = \pm\, i$), то общее решение однородного уравнения

$$y'' + y = 0$$

имеет вид

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x \qquad \textbf{(12.45)}$$

(см. **(12.41)** при $\alpha = 0$, $\beta = 1$). Общее решение уравнения **(12.44)** будем искать в виде **(12.45)**, полагая, что C_1 и C_2 — функции переменной x. Эти функции C_1 и C_2 найдем, опираясь на систему **(12.43)**, которая в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0, \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases} \qquad \textbf{(12.46)}$$

Решая **(12.46)**, получаем $C_1' = 1$, $C_2' = -\operatorname{tg} x$. Тогда $C_1 = x + C_3$ и

$$C_2 = \int(-\operatorname{tg} x)dx = \int\frac{d\cos x}{\cos x} = \ln|\cos x| + C_4.$$

Таким образом, общее решение уравнения **(12.44)** :

$$y = (x + C_3) \sin x + (\ln|\cos x| + C_4) \cos x,$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные. ▶

Второй способ решения уравнения **(12.36)** основан на том, что *общее решение неоднородного дифференциального уравнения* **(12.36)** *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения* **(12.37)** *и частного решения исходного однородного уравнения* **(12.36)**.

Пусть правая часть (неоднородность) уравнения **(12.36)** имеет вид:

$$r(x) = e^{ax}(P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx), \qquad \textbf{(12.47)}$$

где a, b — некоторые действительные числа; $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены от переменной x. Через λ_r обозначим (комплексное) число, ассоциированное с неоднородностью вида **(12.47)**: $\lambda_r = a + ib$.

Пусть $k = k(\lambda_r)$ — кратность числа λ_r как корня характеристического многочлена **(12.38)** решаемого уравнения **(12.36)**.

Тогда частное решение $u = u(x)$ уравнения **(12.36)** может быть найдено в виде

$$u = x^k e^{ax}(R(x) \cos bx + S(x) \sin bx),$$

где $R(x)$, $S(x)$ многочлены, степень m которых равна наибольшей из степеней многочленов $P(x)$, $Q(x)$ (см. **(12.47)**).

Многочлены $R(x)$, $S(x)$ находятся *методом неопределенных коэффициентов* (из условия, что u — решение уравнения **(12.36)**).

Если неоднородность $r(x)$ исходного уравнения **(12.36)** имеет вид:

$$r(x) = r_1(x) + r_2(x) + \ldots + r_l(x),$$

и $u_i = u_i(x)$ — частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = r_i(x),$$

где $i = 1, 2, \ldots, l$, то

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_l$$

— частное решение уравнения **(12.36)**.

12.74. Найти частные решения неоднородных уравнений:

а) $y'' + 2y' - 3y = xe^{2x}$; *б*) $y'' + 3y' - 4y = (x+1)e^x$.

Решение:

а) Так как $\lambda_r = 2$ ($a = 2$, $b = 0$) и не является корнем характеристического многочлена

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0,$$

то $k = 0$. Так как $P(x) = x$ и, можно полагать, $Q(x) = 1$, то $m = 1$. Поэтому частное решение будем искать в виде

$$u = (Ax + B)\, e^{2x}.$$

Подставляя эту функцию в исходное уравнение, после приведения подобных слагаемых и сокращения на e^{2x} приходим к равенству

$$5Ax + 6A + 5B = x,$$

которое удовлетворяется тождественно (при всех x), если

$$\begin{cases} 5A = 1, \\ 6A + 5B = 0. \end{cases}$$

Откуда $A = 1/5$, $B = -6/25$ и искомое частное решение имеет вид:

$$u = (1/5x - 6/25)\, e^{2x}.$$

б) Правая часть уравнения имеет вид **(12.47)** при $a = 1$, $b = 0$, $P(x) = x + 1$ и, можно считать, $Q(x) = 1$. Поэтому $\lambda_r = 1$ и $m = 1$. Так как $\lambda_r = 1$ является корнем кратности 1 характеристического многочлена

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0,$$

то $k = 1$ и частное решение уравнения будем искать в виде

$$u = x\,(Ax + B)\, e^x = (Ax^2 + Bx)\, e^x.$$

Подставляя эту функцию в исходное уравнение, приходим к равенству

$$10Ax + 2A + 5B = x + 1,$$

которое выполняется тождественно, если

$$\begin{cases} 10A = 1, \\ 2A + 5B = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $A = 0{,}1$, $B = 0{,}16$, и, следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$u = (0{,}1x^2 + 0{,}16x)\, e^x. \blacktriangleright$$

12.75. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = (x-1)e^x, \qquad \textbf{(12.48)}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Р е ш е н и е. Найдем сначала общее решение уравнения **(12.48)**. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

однородного уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad \textbf{(12.49)}$$

имеет единственный корень $\lambda = 1$ (кратности 2), и потому общее решение уравнения **(12.49)** имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Правая часть уравнения **(12.48)** имеет вид **(12.47)**, где $a = 1$, $b = 0$, $P(x) = x - 1$ и, можно считать, $Q(x) = 1$. Тогда $\lambda_r = 1$, $m = 1$. Поскольку $\lambda_r = 1$ является корнем кратности 2 характеристического уравнения, то $k = 2$, и частное решение уравнения **(12.48)** будем искать в виде

$$u = x^2(Ax + B)\, e^x = (Ax^3 + Bx^2)\, e^x.$$

Подставляя эту функцию в **(12.48)** приходим к равенству

$$6Ax + 2B = x - 1,$$

откуда $A = 1/6$, $B = -1/2$.

Объединяя полученные результаты, приходим к выводу, что общее решение уравнения **(12.48)** имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + (x^3/6 - x^2/2)e^x.$$

Из условия $y(0) = 0$, получаем $C_1 = 0$, а из $y'(0) = 1$, $C_2 = 1$. Окончательно, искомое частное решение задается функцией

$$y = xe^x + (x^3/6 - x^2/2)\, e^x = (x^3/6 - x^2/2 + x)\, e^x.$$

12.76. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos x \qquad \textbf{(12.50)}$$

Р е ш е н и е. Корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

являются комплексные числа $\lambda = 1 \pm 2i$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^x \sin 2x + C_2 e^x \sin 2x \qquad \textbf{(12.51)}$$

(см. **(12.41)** при $\alpha = 0$, $\beta = 1$).

Найдем частное решение неоднородного уравнения **(12.50)**. Правая часть этого уравнения имеет вид **(12.47)**, где $a = 1$, $b = 1$, $P(x) = 1$, $Q(x) = 1$, поэтому $m = 0$ и $\lambda_r = 1 + i$. Так как число λ_r не является корнем характеристического многочлена, то $k = 0$, и частное решение **(12.50)** будем искать в виде

$$u = Ae^x \sin x + Be^x \cos x.$$

Подставляя эту функцию в **(12.50)**, получаем $A = 0$, $B = 1/3$, и, следовательно,

$$u = 1/3 e^x \cos x.$$

Принимая во внимание **(12.51)**, получаем общее решение уравнения **(12.50)**:

$$y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x + 1/3 e^x \cos x. \blacktriangleright$$

12.77. Решить уравнение

$$y'' + y = 2\sin 2x \cos x.$$

Р е ш е н и е. Используя формулы тригонометрии, преобразуем правую часть уравнения:

$$y'' + y = \sin 3x + \sin x.$$

Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda = \pm i$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

(см. (12.41) при $\alpha = 0$, $\beta = 1$).

Частное решение неоднородного уравнения

$$y'' + y = \sin 3x \tag{12.52}$$

будем искать в виде

$$u_1 = A \sin 3x + B \cos 3x.$$

Подставляя эту функцию в (12.52), находим $A = -1/8$, $B = 0$, поэтому

$$u_1 = -1/8 \sin 3x.$$

Аналогично, для частного решения

$$u_2 = x\,(A \sin x + B \cos x)$$

уравнения

$$y'' + y = \sin x$$

находим: $A = 0$, $B = -1/2$, т.е.

$$u_2 = -1/2 x \cos x.$$

Объединяя полученные результаты, получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{1}{2} x \cos x. \blacktriangleright$$

Решить уравнения:

12.78. $y'' - 9y = 0.$

12.79. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

12.80. $y'' - 2y' + y = 2e^x.$

12.81. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}.$

12.82. $y'' + y = \cos x.$

12.83. $y'' + y' = \sin^2 x.$

12.84. $y'' - 3y' = x + \cos x.$

12.85. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}.$

Найти решение уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

12.86. $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3.$

12.87. $y'' + y = 4 \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1.$

12.88. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

12.89. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$, $y(1) = e$, $y'(1) = 3e$.

12.7. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике

Справочный материал

Рассмотрим примеры применения дифференциальных уравнений для описания (простейших) процессов макроэкономической динамики.

Пусть $y = y(t)$ — объем производства некоторого производителя, реализованный к моменту времени t. Предположим, что цена на данный товар остается постоянной (в пределах рассматриваемого промежутка времени). Тогда функция $y = y(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$y' = ky, \tag{12.53}$$

где $k = mpl$, m — норма инвестиций, p — продажная цена, l — коэффициент пропорциональности между величиной инвестиций и скоростью выпуска продукции (см. учебник).

Уравнение **(12.53)** является уравнением с разделяющимися переменными (см. § **12.2**). Его решение имеет вид:

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)}, \tag{12.54}$$

где $y_0 = y(t_0)$.

Уравнение **(12.53)** описывает также рост народонаселения, динамику роста цен при постоянной инфляции и т.д.

12.90. Выяснить, по истечении какого промежутка времени объем реализованной продукции удвоится по сравнению с первоначальным, если значение коэффициента пропорциональности k в уравнении **(12.53)** равно 0,1. На сколько процентов следует увеличить норму инвестиций, чтобы промежуток времени, необходимого для удвоения объема реализованной продукции, уменьшился на 20 %.

Р е ш е н и е. Полагая в **(12.54)** $t_0 = 0$, $k = 0{,}1$, $y = 2y_0$, приходим к равенству

$$2y_0 = y_0 e^{0,1t},$$

откуда $t = 10 \ln 2 \approx 6{,}93$ (ед. времени). Полагая теперь, что $t_1 = 0{,}8t$, получаем $k_1 = k/0{,}8 = 1{,}25k$, т.е. норму инвестиций следует увеличить на 25 %.

Предположение о неизменности цены (о ненасыщаемости рынка) на практике оказывается справедливым лишь для узких временных интервалов.

В общем случае цена p является убывающей функцией от объема y реализованной продукции ($p = p(y)$). Тогда уравнение **(12.53)** принимает вид:

$$y' = mlp\,(y)\,y, \qquad \textbf{(12.55)}$$

оставаясь тем не менее уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение вида **(12.55)** описывает также рост народонаселения при наличии (естественных) ограничений для этого роста, динамику развития эпидемий, процесс распространения рекламы и т.д.

12.91. Изменение численности населения горнорудного поселка с течением времени описывается уравнением:

$$y' = 0{,}3y\,(2 - 10^{-4}y),$$

где $y = y\,(t)$, t — время (лет). В начальный момент времени население поселка составляло 500 человек. Каким оно станет через три года?

Р е ш е н и е. Разделяя переменные в уравнении, приходим к равенству:

$$\frac{dy}{0{,}3y(2-10^{-4}y)} = dt.$$

Выполняя почленное интегрирование этого равенства, получаем

$$\ln\left|\frac{y}{2-10^{-4}y}\right| = 0{,}6t + C_1,$$

или

$$\frac{y}{2-10^{-4}y} = Ce^{0{,}6t}. \qquad \textbf{(12.56)}$$

Значение постоянной C находим из начальных условий: так как $y(0) = 500$, то $C \approx 256{,}4$. Выражая теперь функцию y из **(12.56)**, получаем

$$y = \frac{512{,}8e^{0{,}6t}}{1-0{,}02564e^{0{,}6t}}.$$

Тогда $y\,(3) = 512{,}8e^{1{,}8}/\,(1 - 0{,}02564e^{1{,}8}) \approx 2685$. ▶

Напомним (§ **7.4**), что эластичность спроса (относительно цены) определяется формулой $E_p(y) = \dfrac{p}{y}\dfrac{dy}{dp}$. В некоторых случаях представляет интерес функция спроса при данной эластичности.

12.92. Найти функцию спроса, если $E_p = -2 = \text{const}$ и $y\,(3) = 1/6$.

Р е ш е н и е. Из определения эластичности следует, что

$$-2 = \frac{p}{y}\frac{dy}{dp},$$

т.е. искомая функция задается уравнением с разделяющимися переменными. Решая это уравнение, получаем

$$p^{-2} = Cy.$$

Учитывая начальное условие $y(3) = 1/6$, имеем $C = 2/3$. Окончательно $y = 1{,}5p^{-2}$. ▶

В простейших ситуациях спрос на товар (предложение товара) предполагается зависящим лишь от его цены. В более сложных случаях в расчет принимается также зависимость спроса (предложения) от скорости изменения цены.

12.93. Функции спроса и (соответственно) предложения имеют вид:

$$y = 25 - 2p + 3\frac{dp}{dt},$$

$$x = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p = 9$.

Р е ш е н и е. Из условия равенства спроса и предложения имеем:

$$25 - 2p + 3\frac{dp}{dt} = 15 - p + 4\frac{dp}{dt},$$

откуда

$$\frac{dp}{dt} = 10 - p,$$

т.е. получаем уравнение с разделяющимися переменными (см. § **12.2**).

Решая это уравнение, приходим к функции

$$p = 10 - Ce^{-t}.$$

Из условия $p(0) = 9$ следует, что $C = 1$, так что окончательно

$$p = 10 - e^{-t}.$$

Заметим, что, поскольку $\lim\limits_{t\to\infty} p = \lim\limits_{t\to\infty}\left(10 - e^{-t}\right) = 10 = \text{const}$, цена обладает устойчивостью. ▶

12.94. В условиях ненасыщаемости рынка найти объем производства по истечении 6 месяцев, если в начальный момент времени объем производства $y_0 = y(0) = 24$ (усл. ед.), при норме инвестиций 0,6, продажной цене равной 0,15 (усл. ед.) и $l = 0{,}4$.

12.95. Предполагая, что цена на товар задается функцией $p(y)=(5+3e^{-y})\,y^{-1}$, $m = 0{,}6$, $l = 0{,}4$, $y(0) = 1$, найти зависимость $y = y(t)$ объема реализованной продукции от времени.

12.96. Известно, что рост числа $y = y(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0{,}2y}{m}(m - y),$$

где m — максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1 % от максимального. Через какой промежуток времени число жителей составит 80 % от максимального?

12.97. В поселке с населением 3000 человек распространение эпидемии гриппа (без применения экстренных санитарно-профилактических мер) описывается уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}001y(3000 - y),$$

где y — число заболевших в момент времени t; t — число недель. Сколько больных будет в поселке через две недели, если в начальный момент было трое больных?

12.98. Найти функцию спроса $y = y(p)$, если эластичность E_p постоянна и задана цена p при некотором значении спроса y:

а) $E_p = -1/2, \qquad p = 5$ при $y = 2$;

б) $E_p = -3, \qquad p = 2$ при $y = 27$.

12.99. Найти функцию спроса, если известно значение цены p при некотором спросе y и эластичность имеет следующий вид:

а) $E_p = \dfrac{y - 100}{y}, \; 0 < y < 100, p = 90 \quad$ при $y = 10$;

б) $E_p = \dfrac{p}{p - 20}, \quad 0 < p < 20, \; p = 18 \quad$ при $y = 1$.

12.100. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид:

$$y = 50 - 2p - 4\frac{dp}{dt},$$

$$x = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p(0) = 10$.

б) Является ли равновесная цена устойчивой?

12.101. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид:

$$y = 30 - p - 4\frac{dp}{dt},$$

$$x = 20 + p + \frac{dp}{dt}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени.

б) Является ли равновесная цена устойчивой?

Задачи для повторения

Решить уравнения:

12.102. $y' = \dfrac{x(1-y^3)}{(1+x^2)y^2}$. **12.103.** $x^2y' + 2xy - 1 = 0$.

12.104. $(xy + y^2)dx - (2x^2 + xy)dy = 0$.

12.105. $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$.

12.106. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$. **12.107.** $xy' + 2y = 2xyy'$.

12.108. $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$. **12.109.** $y'' - 2y' + 2y = x\cos x$.

12.110. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$. **12.111.** $xy' - 2y = 2x^4$.

12.112. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$. **12.113.** $(xy + e^x)dx - x\,dy = 0$.

Найти решения уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям:

12.114. $x^2y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$.

12.115. $y'' - y = 2e^x - x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

12.116. $3x^2y\,dx = (3x^3 + y^3)dy$, $y(1) = 1$.

12.117. $y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$, $x(1) = 0$.

12.118. $y'' - 2y' + y = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$.

12.119. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

12.120. Найти зависимость $y = y(t)$ объема реализованной продукции от времени, предполагая, что цена p на товар задается функцией $p(y) = (7 + 2^{-y}) \cdot y^{-1}$, норма инвестиции $m = 0,8$, коэффициент пропорциональности $p = 0,5$, значение $y(0) = 1$.

Контрольные задания по главе 12 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 12.1	Вариант 12.2	Вариант 12.3
Решить дифференциальные уравнения:		
$2xy' + y^2 = 1$	$x^2(dy - dx) = (x + y)\,y\,dx$	$x^2y' - 2xy = 3y$
$x^2y' = y\,(x + y)$	$(1 - x^2)\,dy + xy\,dx = 0$	$x - \dfrac{y}{y'} = \dfrac{2}{y}$
$x^2y^2y' + 1 = y$	$(x + 2y^3)\,y' = y$	$x^2y'' = (y')^2$
$y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$	$(x + y)^2y' = 1$	$y - y' = y^2 + xy'$
$y'\,(x - y^2) = 1$	$y''(e^x + 1) + y' = 0$	$\dfrac{y - xy'}{x + yy'} = 2$
Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным условиям:		
$y'\sqrt{x} = \sqrt{y - x} + \sqrt{x}$, $y\,(0)=1$	$y'' + 4y = 5e^x$, $y\,(0) = 0, y'(0) = 3$	$2(x - y^2)\,dy = y\,dx$, $y\,(1) = 1$
$y'' - 2y' = x^2 - 1$, $y\,(0) = 0, y'(0) = 9/4$	$x\,(x + 1)(y' - 1) = y$, $y\,(1) = 0{,}5$	$y'' + 9y = 15\sin 2x$, $y(0) = -7$, $y'(0) = 0$

Тест 12

1. Установить соответствие между приведенными дифференциальными уравнениями первого порядка и их типами:

1) $y = x(y' - \sqrt[x]{e^y})$; а) с разделяющимися переменными;

2) $x^2(yy' + 2) = x - 1$; б) линейное;

3) $x^2(2x + y)\,dx = dy$. в) однородное.

2. Выяснить, при каких целых значениях параметров a и b функция $y = e^{bx^2 + x^4/a}$ является решением уравнения

$$dy - (x^3y + 2xy)\,dx = 0.$$

3. Найти интегральную кривую уравнения $dy = xe^y dx$, проходящую через точку (2; 0).
Ответ: $2e^{ay} + bx^2 + d = 0$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$, $d = \ldots$.

4. Пусть $y = y(x)$ — решение уравнения $e^{-2x}y' = e^3$, удовлетворяющее начальному условию $y(-1{,}5) = 0{,}5$. Найти (с точностью до целых) $y(0)$.

5. Пусть $y = y(x)$ — интегральная кривая уравнения

$$dx - (3x + 1)\,y^2 dy = 0,$$

проходящая через точку $(1;\ \sqrt[3]{\ln 4})$. Найти $y(0)$.

6. Пусть $x = x(y)$ решение уравнения

$$2yy' + 3y' = 1,$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 0$. Найти $x(2)$.

7. Найти уравнение касательной в точке (1; 2) к интегральной кривой уравнения

$$2yy' + xy + 2x^2 = 0.$$

Ответ: $y = ax + b$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$.

8. Пусть $y = y(x)$ — решение уравнения $y' + xy = x$, удовлетворяющее условию $y(0) = 2$. Найти $y(\sqrt{2})$ (с точностью до 0,1).

9. Найти решение уравнения $y' = -\dfrac{x + y}{x}$, удовлетворяющее условию $y(1) = 0$. В ответе дать значение $y(2)$.

10. Найти решение уравнения $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 12$, $y'(0) = -12$. В ответе дать значение $y(3)$.

Раздел V
Ряды

Глава 13
Числовые ряды

13.1. Основные сведения о рядах

Справочный материал

1. Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком сложения: $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Числа $u_1, u_2, ...$ называются *членами* ряда, член u_n — ***общим*** или ***n-м членом*** ряда, сумма n первых членов ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad \textbf{(13.1)}$$

называется ***n-й частичной суммой ряда.***

2. Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n. \qquad \textbf{(13.2)}$$

Число S называется *суммой ряда.* Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется *расходящимся.*

3. Отбрасывание или приписывание к ряду конечного числа членов не влияет на сходимость или расходимость ряда.

4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ (*необходимое условие* сходимости ряда).

5. При нарушении необходимого условия сходимости ряда, т.е. если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ не существует или если он не равен нулю, ряд расходится. Заметим, что если предел общего члена ряда равен нулю, то вывод о сходимости или расходимости ряда можно сделать только после дополнительного исследования.

Для рядов с членами разных знаков удобнее пользоваться эквивалентными формулировками: если предел модуля общего члена ряда не равен нулю, т.е. если $\lim_{n\to\infty} |u_n| \neq 0$, то ряд расходится, а если предел модуля общего члена ряда равен нулю, т.е. если $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$, то вывод о сходимости или расходимости ряда можно сделать только после дополнительного исследования.

13.1. Выяснить, является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(5n-2)(5n+3)}$ сходящимся. В случае положительного ответа найти сумму ряда.

Р е ш е н и е. Для того чтобы ответить на вопрос о сходимости ряда, надо найти предел последовательности частичных сумм S_n, если он существует (п. 2). Представим n-й член ряда в виде разности дробей со знаменателями $(5n-2)$ и $(5n+3)$:

$$u_n = \frac{5}{(5n-2)(5n+3)} = \frac{5n+3-(5n-2)}{(5n-2)(5n+3)} = \frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3}.$$

Найдем частичную сумму по формуле **(13.1)**:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5k-2} - \frac{1}{5k+3}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{13}\right) + \ldots +$$
$$+\left(\frac{1}{5n-7} - \frac{1}{5n-2}\right) + \left(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3}.$$

Найдем предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3}\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Предел последовательности частичных сумм ряда конечен, он равен 1/3. Это значит, что исследуемый ряд сходится (п. 2), и его сумма S равна 1/3. ▶

13.2. Для данных рядов найти $\lim_{n\to\infty} u_n$ $\left(\lim_{n\to\infty}|u_n|\right)$. В тех случаях, где этого достаточно для установления сходимости или расходимости ряда, сделать вывод о поведении ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{2n^3+4n+1}$.

Р е ш е н и е:

а) Общий член ряда имеет вид $u_n = \frac{1}{n^2+2}$. Найдем его предел:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+2} = 0,$$

как предел отношения ограниченной функции и бесконечно большой величины. Поскольку предел общего члена ряда равен нулю, вывод о сходимости или расходимости ряда можно сделать только после дополнительного исследования (п. 5).

б) Общий член ряда имеет вид $u_n = \frac{(-1)^n n^3}{2n^3+4n+1}$, ряд имеет и положительные, и отрицательные члены, поэтому находим предел модуля общего члена:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n n^3}{2n^3+4n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2n^3+4n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3(2+4n/n^3+1/n^3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+4/n^2+1/n^3} = \frac{1}{2+0+0} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку предел модуля общего члена не равен нулю, необходимое условие сходимости ряда не выполняется, и исследуемый ряд расходится (п. 5). ▶

13.3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)$.

Р е ш е н и е. Общий член ряда имеет вид $u_n = \ln\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)$. Найдем предел n-го члена:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{3n-1}\right) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0.$$

Это значит, что для ответа на вопрос о сходимости ряда требуется дополнительное исследование. Воспользуемся определением сходимости ряда. Найдем выражение для частичных сумм ряда (**13.1**):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{3k+2}{3k-1}\right) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) + \ln\left(\frac{8}{5}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{3n-1}{3n-4}\right) + \ln\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{11}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-1}{3n-4}\cdot\frac{3n+2}{3n-1}\right) = \ln\left(\frac{3n+2}{2}\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что сумма логарифмов равна логарифму произведения. Далее, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{3n+2}{2}\right) = \infty$, ибо при $n \to \infty$ выражение в скобках и логарифм от него стремятся к бесконечности. Таким образом, предел последовательности частичных сумм ряда бесконечен, и поэтому (п. 2) исследуемый ряд расходится. ▶

Найти частичную сумму ряда S_n. В случае сходимости ряда найти его сумму:

13.4. $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \ldots$.

13.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

13.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n+1}{(3n-1)^2(3n+2)^2}$.

13.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{5n-3}{5n+2}\right)$.

Для данных рядов найти $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} |u_n|\right)$. В тех случаях, где этого достаточно для установления сходимости или расходимости ряда, сделать вывод о поведении ряда:

13.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{4n+7}$.

13.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{3n^4+11}$.

13.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{4n^2+1}}{5n^2-3}$.

13.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^n$.

13.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{n^2+1}$.

13.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\frac{3n}{3n-1}$.

13.2. Признаки сходимости рядов с положительными членами

Справочный материал

1. Признак сравнения. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ — два ряда с положительными членами, и члены первого ряда не превосходят членов второго, т.е. $u_n \le v_n$ при любом n. Тогда: *а*) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

б) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

2. Предельный признак сравнения. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ — ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \ne 0, \qquad (13.3)$$

то ряды либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

3. Ряд, с которым сравнивается исследуемый ряд, будем называть *эталонным*. Наиболее часто в качестве эталонного используют либо гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (он расходится), либо обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (при $\alpha > 1$ он сходится, а при $\alpha \le 1$ — расходится), либо геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ (при $|q| < 1$ он сходится, при $|q| \ge 1$ — расходится).

4. Признак Даламбера. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел отношения $(n+1)$-го члена к n-му:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l. \qquad (13.4)$$

Тогда при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ и при $l = \infty$ ряд расходится. При $l = 1$ для ответа на вопрос о сходимости ряда требуется дополнительное исследование.

5. *Интегральный признак сходимости.* Пусть дан положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и пусть функция $f(x)$ такая, что $f(1)=u_1$, $f(2)=u_2$, …, $f(n)=u_n$, …, непрерывна и не возрастает при $x \ge 1$. Тогда для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ при некотором $a \ge 1$.

13.14. С помощью признаков сравнения исследуйте данные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2n^3-n-25}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+\sqrt{n^7+3}}{n^4+\sqrt[3]{n^5}+10}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}\ln(n+2)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}\ln(n+2)}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n+1}$.

Р е ш е н и е:

а) Несколько членов данного ряда не являются положительными. Если отбросить конечное число членов этого ряда, он станет знакоположительным. Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость или расходимость ряда (§ **13.1**, п. 3), поэтому к этому ряду можно применить предельный признак сравнения. Если общий член ряда представляет собой отношение двух многочленов, то при подборе эталонного обобщенного гармонического ряда значение α выбирают равным разности наибольших показателей степеней знаменателя и числителя. Наибольший показатель степени знаменателя равен 3, числителя — 1, поэтому $\alpha = 3-1=2$, и в качестве эталонного ряда возьмем обобщенный гармонический ряд с членами $v_n = 1/n^2$.

По формуле **(13.3)**:

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1}{2n^3-n-25}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n^2}{2n^3-n-25}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(4-\frac{n^2}{n^3}\right)}{n^3\left(2-\frac{n}{n^3}-\frac{25}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n^2}-\frac{25}{n^3}}=\frac{4-0}{2-0-0}=2.$$

Поскольку предел k конечен и отличен от нуля, условие (**13.3**) выполнено. На основании предельного признака сравнения заключаем, что исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ведут себя одинаково. Эталонный ряд сходится (обобщенный гармонический ряд, $\alpha = 2$, п. 3), поэтому исследуемый ряд тоже сходится.

З а м е ч а н и е 1. Вычисление предела k необходимо для проверки правильности подбора эталонного ряда. Если получим, что $k = 0$ или $k = \infty$, то для применения предельного признака сравнения следует взять другой эталонный ряд.

б) Применим предельный признак сравнения. Подберем подходящий эталонный ряд. Рассмотрим поведение числителя и знаменателя общего члена ряда при *больших* n: $2n+\sqrt{n^7+3} = 2n+(n^7+3)^{1/2} \approx 2n+n^{7/2}$, $n^4+\sqrt[3]{n^5+10} = n^4+(n^5+10)^{1/3} \approx n^4+n^{5/3}$. Поскольку при больших n величина $n^{7/2}$ много больше, чем n, а величина n^4 много больше, чем $n^{5/3}$, то числителю условно припишем показатель степени $7/2$, а знаменателю — 4. Возьмем $\alpha = 4-7/2 = 1/2$, и в качестве эталонного ряда рассмотрим обобщенный гармонический ряд с членами $v_n = 1/n^{1/2}$. Найдем

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+\sqrt{n^7+3}}{n^4+\sqrt[3]{n^5+10}} : \frac{1}{n^{1/2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^{\frac{3}{2}}+\sqrt{n^8+3n}}{n^4+\sqrt[3]{n^5+10}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4(2n^{\frac{3}{2}-4}+\sqrt{1+3n^{1-8}})}{n^4(1+\sqrt[3]{n^{5-12}+10/n^{12}})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{n^{5/2}}+\sqrt{1+\dfrac{3}{n^7}}}{1+\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^7}+\dfrac{10}{n^{12}}}} = \frac{0+\sqrt{1+0}}{1+\sqrt{0}} = 1.$$

Предел k конечен и отличен от нуля, условие (**13.3**) предельного признака сравнения выполнено (п. 2). Эталонный ряд расходится (обобщенный гармонический ряд, $\alpha = 1/2$, п. 3), поэтому исследуемый ряд тоже расходится.

в) Попытки применить предельный признак сравнения с эталонным рядом вида $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ не приводят к успеху: при разных α предел k равен или нулю, или бесконечности. Применим первый признак сравнения (п. 1). Подберем эталонный ряд. При увеличении n функция n^3 растет гораздо быстрее, чем функция $\ln(n+2)$, поэтому возьмем $v_n = 1/\sqrt{n^3}$. При $n \ge 1$ выполняется цепочка неравенств: $\ln(n+2) \ge 1$, $n^3 \ln(n+2) \ge n^3$, $\sqrt{n^3 \ln(n+2)} \ge \sqrt{n^3}$, $1/\sqrt{n^3 \ln(n+2)} \le 1/\sqrt{n^3}$, т.е. $u_n \le v_n$. Эталонный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{3/2}$ является обобщенным гармоническим рядом, у которого $\alpha = 3/2 > 1$, поэтому он сходится (п. 3). Члены исследуемого ряда не превосходят членов сходящегося ряда, значит, исследуемый ряд сходится (п. 1).

г) Как и в пункте *в*), попытки применить предельный признак сравнения с эталонным рядом вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ не приводят к успеху: при разных α предел k равен или нулю, или бесконечности. Применим признак сравнения (п. 1). Подберем эталонный ряд. При увеличении n при всех $\alpha > 0$ функция n^{α} растет гораздо быстрее, чем функция $\ln(n+2)$. Возьмем $v_n = 1/(\sqrt[4]{n}\sqrt{n}) = 1/n^{3/4}$. При достаточно больших n выполняется неравенство $\ln(n+2) < \sqrt{n}$, откуда $\sqrt[4]{n}\ln(n+2) < \sqrt{n}\sqrt[4]{n}$, $1/(\sqrt[4]{n}\ln(n+2)) > 1/n^{3/4}$, т.е. $u_n > v_n$. Эталонный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{3/4}$ является обобщенным гармоническим рядом, $\alpha = 3/4 < 1$, поэтому он расходится (п. 3). Члены исследуемого ряда больше членов расходящегося ряда, значит, исследуемый ряд расходится (п. 1).

Замечание 2. В примере *г*) при подборе эталонного ряда нельзя просто отбросить $\ln(n+2)$. Если взять $v_n = 1/\sqrt[4]{n}$, то, как и в примере *в*), можно показать, что $u_n \le v_n$. Однако ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt[4]{n}$ расходится ($\alpha = 1/4 < 1$), и члены исследуемого ряда не больше членов расходящегося ряда, а в этом случае предельный признак сравнения не дает ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

д) Применим предельный признак сходимости. При $n \to \infty$ бесконечно малая величина $\ln(1 + 3/n^2)$ эквивалентна $3/n^2$ (см. начало гл. 6, п. 11), и в качестве эталонного ряда возьмем ряд с членами $v_n = 1/n^2$. По формуле (13.3) найдем

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{3}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 3 \neq 0.$$

Эталонный ряд сходится, и с ним вместе сходится исследуемый ряд.

е) Решение аналогично п. *д*). При $n \to \infty$ бесконечно малая величина $\sin(\pi/(2^n+1))$ эквивалентна $\pi/(2^n+1)$, и в качестве эталонного ряда возьмем ряд с членами $v_n = 1/2^n$ — (см. начало гл. 6, п. 11). По формуле (13.3) найдем $k = \pi \neq 0$. Эталонный ряд сходится, и с ним вместе сходится исследуемый ряд.

Замечание 3. В примерах *а*) — *д*) признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости рядов — во всех этих случаях $l = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. В примере *е*) $l = 1/2$, применение признака Даламбера возможно. ▶

13.15. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Даламбера:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$; *в*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; *г*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{n!}$.

Решение:

а) Для того чтобы вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, преобразуем u_{n+1}/u_n:

$$u_n = \frac{n^2}{3^n},\ u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}},\ \text{и}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} : \frac{n^2}{3^n} = \frac{(n+1)^2 3^n}{3^{n+1}n^2} = \frac{n^2+2n+1}{3n^2}.$$

Далее,

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{3n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+2/n+1/n^2)}{3n^2} = \frac{1+0+0}{3} = \frac{1}{3}.$$

Поскольку $l = 1/3 < 1$, то по признаку Даламбера (п. 4) исследуемый ряд сходится.

б) Имеем $u_n = \frac{n!}{100^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{100^{n+1}}$. Напомним, что по определению факториала $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$. Найдем l по формуле (13.4):

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{100^{n+1}}:\frac{n!}{100^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot 100^n}{100^{n+1}\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{100}=\infty.$$

Поскольку $l=\infty$, то по признаку Даламбера (п. 4) исследуемый ряд расходится.

в) Имеем $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$, $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Вычислим

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

По формуле **(13.4)**

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left[1^\infty\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{n}{-(n+1)}}=e^{-1}.$$

При вычислении предела мы воспользовались вторым замечательным пределом **(6.2)**. Поскольку $l=1/e<1$, то по признаку Даламбера (п. 4) исследуемый ряд сходится.

г) По условию $u_n=\dfrac{5^n+2^n}{n!}$, $u_{n+1}=\dfrac{5^{n+1}+2^{n+1}}{(n+1)!}$. Используя определение факториала, получим что $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{5^{n+1}+2^{n+1}}{(n+1)\cdot(5^n+2^n)}$. Найдем l по формуле **(13.4)**:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+2^{n+1}}{(n+1)\cdot(5^n+2^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(5+2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{(n+1)\cdot 5^n\cdot\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}=0,$$

так как 5^n сокращается, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$, а величина $(n+1)\to\infty$ при $n\to\infty$. Поскольку $l=0<1$, то по признаку Даламбера (п. 4) исследуемый ряд сходится. ▶

13.16. Исследовать сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\,\ln^2(n+1)}$.

Р е ш е н и е. Применим интегральный признак сходимости. Рассмотрим $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\ \ln^2(x+1)}$. Эта функция удовлетворяет всем условиям интегрального признака. По определению несобственного интеграла (**11.22**)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

Найдем

$$\int_1^t \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\int_1^t \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)}=\int_1^t \ln^{-2}(x+1)\,d(\ln(x+1))=\frac{1}{-2+1}\ln^{-2+1}(x+1)\Big|_1^t=$$

$$=\frac{-1}{\ln(x+1)}\Big|_1^t=\frac{-1}{\ln(t+1)}+\frac{1}{\ln 2}$$

(при вычислении определенного интеграла мы воспользовались тем, что $d\ln(x+1)=\dfrac{dx}{x+1}$, и применили формулу Ньютона—Лейбница (**11.11**)). Далее,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{\ln(t+1)}+\frac{1}{\ln 2}\right)=0+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}.$$

Поскольку предел конечен, несобственный интеграл сходится, и по интегральному признаку сходимости (п. 5) исследуемый ряд тоже сходится.

З а м е ч а н и е. При попытке использовать признак Даламбера для исследования сходимости данного ряда получим, что $l=1$, т.е. необходимо дополнительное исследование. При попытке найти эталонный ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ и применить предельный признак сравнения получим, что $k=0$ при $\alpha\le 1$ или $k=\infty$ при $\alpha>1$, т.е. применение предельного признака сравнения с эталонным обобщенным гармоническим рядом невозможно. Также невозможно исследовать сходимость этого ряда с помощью эталонных рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ и первого признака сравнения (п. 1), поскольку члены исследуемого ряда при $\alpha\le 1$ меньше членов расходящихся рядов, а при $\alpha>1$ они больше членов сходящихся рядов. В этих ситуациях признак сравнения не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. ▶

Исследовать сходимость рядов с помощью предельного признака сравнения. В качестве эталонного ряда рассмотреть ряд с общим членом $v_n = 1/n^{\alpha}$. В ответе указать также подходящее значение α.

13.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 10}$.

13.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 7n + 10}{3n^5 + 10n - 12}$.

13.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^5 + 11}}{n^3 - 7n - 1}$.

13.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{5n^2 + 7}}{\sqrt{4n^2 + 11n}}$.

13.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 + 2} + \sqrt{n^3 - 1}}{\sqrt[5]{n^{15} + 14n^{11} + 1}}$.

13.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n + n^2 + 1}{3^n n^5 - 12}$.

13.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^3 + \sqrt{n^8 + 10}}{35\sqrt{n^4 + 1} + n^5}$.

13.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{3n+1}$.

13.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{4}{n^3 + 7}\right)$

13.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{3^n + 1}{\sqrt{n} \cdot 3^n}$.

13.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n}$.

13.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

Исследовать данные ряды на сходимость, применив признаки сравнения:

13.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2 - 5}$.

13.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 7}{3n^3 + 11}$.

13.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 7}}{n^5 + 12}$.

13.32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$.

13.33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(3^n - 4)}$.

13.34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+3)}{n^2}$.

13.35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}\ln(n+1)}$.

13.36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}\ln(n+1)}$.

13.37. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{4^n}{5^n + n}$.

13.38. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1 - \cos\frac{1}{n^2}\right)$.

Выяснить, можно ли исследовать сходимость данных рядов с помощью признака Даламбера. В случае положительного ответа сделать вывод о поведении ряда. В ответе также указать полученное значение l (см. **(13.4)**):

13.39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+7}$. **13.40.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{5^n+12}$.

13.41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n(n+1)}$. **13.42.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3-5}$.

13.43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n+n}$. **13.44.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,3^n}{n^n}$.

13.45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n+n^2}$. **13.46.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n+2^n}$.

13.47. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^n$. **13.48.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{-2n^2}$.

13.49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{3^n}$. **13.50.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n^2+5}\right)^n$.

13.51. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi\cdot 3^n}{4^n+e^n}$. **13.52.** $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\frac{1}{3^n}\right)$.

С помощью интегрального признака исследовать сходимость рядов:

13.53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$. **13.54.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^5 n}}$. **13.55.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

Исследовать сходимость рядов:

13.56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{5^n}$. **13.57.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n+7}}{3n^2-15}$.

13.58. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4^n n^2}$. **13.59.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+12n}{\sqrt[5]{n^8+n^3+2}}$.

13.60. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\sqrt{\ln^3 n}}$. **13.61.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{12^n+n^2}$.

13.62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{50}}{3^n}$. **13.63.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^n+1}{(3n+1)^n}$.

13.64. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{2^n}$. **13.65.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n}\right)$.

13.66. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{4^n}{n(4^n+1)}\right)$. **13.67.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^{3n}$.

13.3. Сходимость рядов с членами произвольного знака

Справочный материал

1. Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Ряд называется *условно сходящимся*, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

2. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.

3. Ряд называется *знакочередующимся*, если его члены попеременно то положительны, то отрицательны: $u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$, где $u_n > 0$.

4. Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, т.е. $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots > 0$, и предел модуля его общего члена равен нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \qquad (13.5)$$

то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена: $S \le u_1$.

5. Пусть знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ удовлетворяет условиям признака Лейбница и S_n — его n-я частичная сумма. Тогда ряд сходится, и погрешность $r_n = S - S_n$ при приближенном вычислении его суммы S по абсолютной величине не превосходит модуля первого отброшенного члена:

$$|r_n| \le u_{n+1}, \qquad (13.6)$$

а для его суммы S при любом n выполняется неравенство:

$$S_{2n} < S < S_{2n+1}. \qquad (13.7)$$

13.68. Выяснить, какие из данных рядов являются сходящимися, а какие — расходящимися. Для сходящихся рядов определить, сходятся они абсолютно или условно.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2+7}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n}{2^n+n^3}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n}{3^n n^2+1}$.

Р е ш е н и е:

а) В данном случае $u_n = \frac{n}{n^2+7}$. При $n \geq 3$ члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, $\frac{3}{3^2+7} > \frac{4}{4^2+7} > \ldots > \frac{n}{n^2+7} > \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+7} = 0$. Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, поэтому по признаку Лейбница (п. 4) ряд сходится.

Определим тип сходимости ряда. Для этого исследуем сходимость ряда, составленного из модулей членов данного ряда. Его члены равны $u_n = \frac{n}{n^2+7}$. Применим предельный признак сравнения (§ **13.2**, п. 2). Рассуждая так же, как и при решении примера **13.14***а*, в качестве эталонного ряда возьмем гармонический ряд, $v_n = 1/n$. Имеем $k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+7} : \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+7} = 1$, т.е. предел k конечен и отличен от нуля, и исследуемый ряд ведет себя так же, как и эталонный ряд. Из расходимости эталонного ряда следует расходимость исследуемого ряда.

Таким образом, сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, т.е. ряд сходится условно.

б) Члены этого ряда имеют разные знаки, поэтому, следуя п. 5, § **13.1**, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^n}{2^n+n^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n\left(1+\frac{n^3}{2^n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

ибо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n} = 0$ (это можно проверить трехкратным применением правила Лопиталя). Предел модуля общего члена ряда отличен от нуля, поэтому (§ **13.1**, п. 5) ряд расходится.

в) Члены данного ряда убывают по абсолютной величине и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-3)^n}{3^n n^2+1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1/3^n} = 0$, ибо при $n\to\infty$ $n^2\to\infty$, а $1/3^n \to 0$. Следовательно, по признаку Лейбница ряд сходится.

Исследуем сходимость ряда, составленного из модулей членов данного ряда. Его члены имеют вид $u_n = \left|\dfrac{(-3)^n}{3^n n^2+1}\right| = \dfrac{3^n}{3^n n^2+1}$. Применим предельный признак сравнения (§ 13.2, п. 2). В качестве эталонного ряда возьмем сходящийся ряд с членами $v_n = 1/n^2$. Имеем

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{3^n n^2+1} : \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n n^2}{3^n n^2(1+1/(3^n n^2))} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

предел k конечен и отличен от нуля, следовательно, исследуемый ряд ведет себя так же, как и эталонный ряд, т.е. сходится.

Таким образом, сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. ряд сходится абсолютно. ▶

13.69. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(2n)!}$ с точностью до 0,0001.

Р е ш е н и е. У данного ряда $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(2n)!}$, его члены удовлетворяют условиям признака Лейбница, поэтому ряд сходится. Для того чтобы определить количество членов, подлежащих суммированию для вычисления суммы ряда с заданной точностью, будем выписывать члены ряда до тех пор, пока не найдем член, по модулю меньший, чем 0,0001 = 1/10 000:

$$u_1 = \frac{1}{4} > \frac{1}{10\,000};\quad u_2 = \frac{1}{3\cdot 4!} = \frac{1}{72} > \frac{1}{10\,000};$$

$$u_3 = \frac{1}{4\cdot 6!} = \frac{1}{2880} > \frac{1}{10\,000};\quad u_4 = \frac{1}{5\cdot 8!} = \frac{1}{201600} < \frac{1}{10000}.$$

Таким образом, для достижения требуемой точности достаточно вычислить S_3: $|S-S_3| < u_4 < 0{,}0001$ (п. 5), т.е. достаточно взять три первых члена ряда:

$$S \approx S_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} = -\frac{681}{2880} \approx -0{,}236458 \approx -0{,}2365.$$

Результат должен быть получен с точностью до 0,0001, поэтому окончательный ответ не может содержать более 4 цифр после запятой. При последнем округлении была допущена дополнительная ошибка, не превосходящая 0,00005. Итоговая ошибка при вычислении суммы ряда не больше $0{,}00005 + u_4 \approx 0{,}00005 + 1/201600 \approx 0{,}000055 < 0{,}0001$. ▶

13.70. Для суммы S ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{3^n}$ выбрать наиболее точную оценку:

а) $4/81 < S < 13/243$; *б*) $1/9 < S < 2/9$; *в*) $14/81 < S < 47/243$.

Р е ш е н и е. Данный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, поэтому $S_{2n} < S < S_{2n+1}$. (13.7). Найдем несколько первых частичных сумм по формуле (13.1):

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = 0, \\ S_1 = u_1 = 1/3 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < S < \frac{1}{3};$$

$$\left.\begin{array}{l} S_2 = u_1 - u_2 = 1/3 - 2/9 = 1/9, \\ S_3 = S_2 + u_3 = 1/9 + 3/27 = 2/9 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{9} < S < \frac{2}{9};$$

$$\left.\begin{array}{l} S_4 = S_3 - u_4 = 2/9 - 4/81 = 14/81, \\ S_5 = S_4 + u_5 = 14/81 + 5/243 = 47/243 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{14}{81} < S < \frac{47}{243}.$$

Таким образом, неравенство (*а*) для суммы S данного ряда не выполняется, т.е. вообще не является оценкой для S. Неравенства (*б*) и (*в*) верны для S, поэтому они являются оценками S. Из них более точной оказалась оценка пункта (*в*). ▶

Выяснить, какие из данных рядов являются сходящимися, а какие — расходящимися. Для сходящихся рядов определить, сходятся они абсолютно или условно:

13.71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$.

13.72. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^3+10}$.

13.73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^5+7}}$.

13.74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$.

13.75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{4^n+7}$.

13.76. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \cdot 2^n}{n^3+1}$.

13.77. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5n+7}$.

13.78. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{10-n\cdot 3^n}$.

13.79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n^3+7)}{3n^4+12\sqrt{n+5}}$.

13.80. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{\sqrt{n^8+7}+\sqrt{n^6-1}}$.

13.81. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n+5}{4n-15}\right)^n$.

13.82. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+4}{3n-7}\right)^n$.

13.83. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \ln \frac{n^2}{n^2+1}$.

13.84. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin\left(\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$.

Определить, сколько членов ряда надо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,0001:

13.85. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+5}$.

13.86. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$.

13.87. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

13.88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot n^2}{5^n\cdot n!}$.

Найти сумму ряда с точностью до 0,00001. В ответе также указать, сколько членов ряда надо взять, чтобы гарантировать требуемую точность:

13.89. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n\cdot n!}$.

13.90. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\cdot 2^n}$.

Задачи для повторения

13.91. Пользуясь определением сходимости ряда, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

В случае положительного ответа найти сумму этого ряда.

Исследовать сходимость рядов:

13.92. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{\ln^2 n}$.

13.93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{5n(n+3)}}$.

13.94. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+1}$.

13.95. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

13.96. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{(ne)^n}$.

13.97. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{2\cdot 5\ldots(3n-1)}$.

13.98. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^{n^2}}$.

13.99. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2\ln n+1}}$.

Выяснить, какие из данных рядов являются сходящимися, а какие — расходящимися. Для сходящихся рядов определить, сходятся они абсолютно или условно.

13.100. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3\cdot 2^n+n}$.

13.101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5n^3-2}}$.

13.102. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(3n-1)}$.

13.103. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{(n-1)!}$.

13.104. Найти сумму ряда, с точностью до 0,001.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{(2n)^n}.$$

Контрольные задания по главе 13 «Числовые ряды»

№	Вариант 13.1	Вариант 13.2	Вариант 13.3
	Найти сумму ряда:		
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7n-2}-\frac{1}{7n+5}\right)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5n-1}-\frac{1}{5n+4}\right)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)$
	Исследовать сходимость рядов:		
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{(n+1)^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{\sqrt[3]{3n^9-4}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^{n+2}}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+\sqrt{n^8+10}}{6n^6-14}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5n-11}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+\sqrt{n^{10}+4}}{\sqrt[3]{n^{12}+18}}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2^n}{3^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!\cdot 2^n}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^3 n}$
	Определить, какие из приведенных рядов являются сходящимися, а какие — расходящимися. Для сходящихся рядов указать тип сходимости:		
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^5}{4n^2+3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{3^n+n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 7^n}{7^n+2\cdot 5^n}$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^3}{\sqrt{n^8+10}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^4}{n^4+3n^2+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{n^4+3^n}$
	Выяснить, сколько членов ряда надо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,0001:		
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^4+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^5-10}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^6+\ln n}$

Тест 13

1. Закончить утверждение. Ряд называется сходящимся, если:
1) последовательность его частичных сумм имеет конечный или бесконечный предел;
2) предел общего члена ряда равен нулю;
3) последовательность его частичных сумм имеет конечный предел;
4) предел модуля общего члена равен нулю;
5) последовательность его частичных сумм является бесконечно большой.

2. Дан сходящийся ряд. При отбрасывании нескольких его ненулевых членов:
1) ряд останется сходящимся и его сумма не изменится;
2) ряд останется сходящимся и его сумма изменится;
3) ряд станет расходящимся;
4) ряд останется сходящимся и его сумма обязательно уменьшится;
5) не зная членов ряда, ничего нельзя сказать о сходимости или расходимости нового ряда.

3. Из данных рядов выбрать сходящиеся:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

4. Найти соответствие между числовыми рядами и утверждениями:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n+4}$; 1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, ряд расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, ряд расходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{4n-1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, для ответа на вопрос о сходимости ряда требуется дополнительное исследование;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{5n^2+7}$. 4) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, ряд сходится.

5. Для каждого из данных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ указать такое значение α, при котором для ряда с общим членом $v_n = 1/n^{\alpha}$ выполняется условие предельного признака сравнения: существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \quad k \neq 0, \quad k \neq \infty$.

В ответе указать значение α и: число 1, если ряд сходится; число 2, если ряд расходится.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-7}{n^2+\sqrt{n^2+7}}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-7}{n^2\sqrt{n^2+7}}$.

6. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с членами $u_n = \frac{5^n}{n+2^n}$ найти $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ и на основании этого сделать вывод о сходимости ряда (*1* — сходится, *2* — расходится, *3* — требуется дополнительное исследование).

7. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — знакоположительный ряд и $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Из приведенных в ответах двух утверждений для данного ряда являются несовместимыми:.

1) $l = 0{,}1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$; 2) $l = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;

3) $l = 2$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$; 4) $l = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$.

8. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^4-15}$ указать тип сходимости:

1) абсолютная сходимость; 2) условная сходимость; 3) расходимость.

9. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 10^n}$ надо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,00005?

10. Указать наиболее точную оценку для суммы S ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n}$:

1) $0 < S < 1/2$; 2) $3/8 < S < 5/8$; 3) $1/8 < S < 3/8$; 4) $0 < S < 1/8$.

Глава 14
Степенные ряды

14.1. Область сходимости степенного ряда

Справочный материал

1. Степенным рядом называется ряд

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n, \qquad (14.1)$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — коэффициенты степенного ряда.

2. Областью сходимости степенного ряда называется совокупность тех значений x, при которых степенной ряд **(14.1)** сходится.

3. Число R — такое, что при $|x| < R$ ряд **(14.1)** сходится, а при $|x| > R$ — расходится, называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда. При $x = -R$, $x = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

4. Радиус сходимости степенного ряда может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \qquad (14.2)$$

Формула **(14.2)** применима, если, начиная с некоторого номера n, все $c_n \neq 0$.

Для степенного ряда вида

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^n + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad (14.3)$$

радиус сходимости находится по формуле **(14.2)**, а интервал сходимости из условия $|x - a| < R$, т.е. имеет вид: $(a - R, a + R)$.

14.1. Найти области сходимости степенных рядов:

а) $1 + \dfrac{3x}{3^4\sqrt{5}} + \dfrac{9x^2}{5^4\sqrt{5^2}} + \ldots + \dfrac{3^n x^n}{(2n+1)^4\sqrt{5^n}} + \ldots$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^n}{2n\cdot n!}$;

в) $1 + x + 2^2x^2 + \ldots + n^nx^n + \ldots$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin^2\dfrac{1}{n}(x-2)^n$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2-1}}{n}x^{n^2}$; е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{2n}}{(2n+1)^4\sqrt{5^n}}$.

Р е ш е н и е:

а) Найдем радиус сходимости ряда по формуле (14.2):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{(2n+1)^4\sqrt{5^n}}:\frac{3^{n+1}}{[2(n+1)+1]^4\sqrt{5^{n+1}}}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^4}{(2n+1)^4}=\frac{\sqrt{5}}{3},$$

т.е. интервал сходимости ряда $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3};\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

Теперь выясним поведение ряда на концах интервала сходимости. На левом конце при $x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ данный степенной ряд принимает вид $1-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}-...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}+...$; этот ряд сходится по признаку Лейбница (см. § 13.3, п. 4). На правом конце при $x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ получаем ряд $1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+...+\frac{1}{(2n+1)^4}+...$, представляющий обобщенный гармонический ряд (§ 13.2, п. 3) при $\alpha=4$, у которого все члены с четными номерами равны нулю. Так как $\alpha=4>1$, то этот ряд сходится.

Следует отметить, что сходимость ряда на левом конце интервала сходимости при $x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ могла быть установлена с помощью достаточного признака сходимости знакопеременного ряда (§ 13.3, п. 2), так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. ряд $\sum\limits_{n=0}\frac{1}{(2n+1)^4}$, сходится. Итак, область сходимости данного ряда $[-\sqrt{5}/3;\sqrt{5}/3]$.

Обращаем внимание на то, что при исследовании сходимости степенного ряда на концах интервала сходимости в ситуации, когда получаемый ряд — с положительными членами, применять признак Даламбера не имеет смысла, так как при этом всегда будем получать

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l = 1$ с нерешенным вопросом о сходимости ряда: в этом случае рекомендуется рассматривать другие признаки сходимости (например, признак сравнения, интегральный, необходимый признаки и т.д.)

б) Найдем радиус сходимости по формуле (14.2):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!} : \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\right| =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!} = 2\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

т.е. область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$.

в) Задачу можно решать аналогично предыдущим. Решение упрощается, если заметить, что при $x \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^n x^n = \lim\limits_{n\to\infty}(nx)^n \neq 0$, т.е. необходимый признак сходимости не выполняется, и ряд расходится.

Итак, область сходимости ряда состоит из одной точки $x = 0$.

г) Найдем радиус сходимости по формуле (14.2)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n \sin^2\dfrac{1}{n}}{(-1)^{n+1}\sin^2\dfrac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\dfrac{1}{n}}{\sin^2\dfrac{1}{n+1}}.$$

Для нахождения предела заменим бесконечно малые величины $\sin\dfrac{1}{n}$ и $\sin\dfrac{1}{n+1}$ при $n\to\infty$ им эквивалентными $\dfrac{1}{n}$ и $\dfrac{1}{n+1}$ (гл. 6, §6.4); получим

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

В соответствии с п. 4 интервал сходимости находится из условия $|x-2| < 1$, или $-1 < x-2 < 1$, т.е. $2-1 < x < 2+1$, или $(1; 3)$.

Теперь выясним поведение ряда на концах интервала сходимости. На левом конце при $x = 1$ данный ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin^2\frac{1}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n} \quad (\text{ибо } (-1)^n\cdot(-1)^n = (-1)^{2n} = 1$$

при любом натуральном n).

Так как при любом $n \geq 1$ $\sin\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$, $\sin^2\frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ есть сходящийся обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 2 > 1$ (§ **13.2**, п. 3), то по признаку сравнения (§ **13.2**) данный ряд сходится.

На правом конце при $x = 3$ степенной ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin^2\frac{1}{n}$, т.е. является знакочередующимся рядом и по достаточному признаку сходимости знакопеременного (а значит, и знакочередующегося) ряда сходится, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n}$. Итак, область сходимости данного ряда $[1; 3]$.

д) Выпишем несколько первых членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2-1}}{n}x^{n^2} = x + \frac{3^3}{2}x^4 + \frac{3^8}{3}x^9 + \ldots .$$

Очевидно, что находить радиус сходимости по формуле **(14.2)** в данном случае не представляется возможным, так как коэффициенты ряда **(14.1)** $c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8, c_{10}$ и т.д. равны нулю. Поэтому применим непосредственно признак Даламбера. Данный ряд будет абсолютно сходиться, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$, и расходиться, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$.

Поэтому найдем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{(n+1)^2-1}}{n+1}x^{(n+1)^2-1} : \frac{3^{n^2-1}}{n}x^{n^2-1}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}3^{2n+1}x^{2n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}(3x)^{2n+1} = \begin{cases}\infty, & \text{если } |3x| > 1,\\ 0, & \text{если } |3x| < 1,\end{cases}$$

ибо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Следовательно, ряд сходится при $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ или на интервале $(-1/3;\ 1/3)$.

Исследуем сходимость на концах интервала сходимости.

При $x = -\frac{1}{3}$ ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2-1}}{n}\frac{(-1)^{n^2}}{3^{n^2}}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^2}}{n}=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...\right).$$

Этот ряд сходится по признаку Лейбница (§ **13.3**).

При $x=\frac{1}{3}$ ряд принимает вид $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, где $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — расходящийся гармонический ряд. Итак, область сходимости ряда $[-1/3;\ 1/3)$.

е) Так как члены ряда, стоящие на нечетных местах, отсутствуют, т.е. коэффициенты ряда $c_1=0$, $c_3=0$, $c_5=0$ и т.д., то формулу **(14.2)** для нахождения радиуса сходимости использовать нельзя. Можно применить непосредственно признак Даламбера, как это делалось в примере в п. *д*). Но в данном случае удобнее сделать замену $x^2=t$. Тогда ряд примет вид $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n t^n}{(2n+1)^4\sqrt{5^n}}$. Область сходимости этого ряда получена в п. *а*): $\left[-\frac{\sqrt{5}}{3};\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right]$, т.е. $-\frac{\sqrt{5}}{3}\le t\le\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Возвращаясь к переменной x, получим $-\frac{\sqrt{5}}{3}\le x^2\le\frac{\sqrt{5}}{3}$, откуда $|x|\le\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{\sqrt[4]{45}}{3}$, т.е. область сходимости ряда $[-\sqrt[4]{45}/3;\ \sqrt[4]{45}/3]$.▶

Найти области сходимости степенных рядов:

14.2. $\frac{x}{1\cdot2}+\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^3}{3\cdot4}+\frac{x^4}{4\cdot5}+\dots$ **14.3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$.

14.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. **14.5.** $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$.

14.6. $\frac{x^3}{8}+\frac{x^6}{8^2\cdot5}+\frac{x^9}{8^3\cdot9}+\frac{x^{12}}{8^4\cdot13}+\dots$ **14.7.** $\sum_{n=1}^{\infty}10^n x^n$.

14.8. $\frac{x}{2+3}+\frac{x^2}{2^2+3^2}+\frac{x^3}{2^3+3^3}+\dots$ **14.9.** $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\mathrm{tg}\frac{1}{n}$.

14.10. $5x+\frac{5^2x^2}{2!}+\frac{5^3x^3}{3!}+\frac{5^4x^4}{4!}+\dots$ **14.11.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

14.12. $\frac{x}{1\cdot3}+\frac{x^2}{2\cdot4}+\dots+\frac{x^n}{n(n+2)}+\dots$ **14.13.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$.

14.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{5^n\sqrt{n+1}}$.

14.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

14.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

14.17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{n-1}n\sqrt{n}}$.

14.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{3^{n^2}}(x-1)^n$.

14.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2 2^{n+2}}$.

14.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n}(x-1)^n$.

14.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

14.2. Ряды Тейлора и Маклорена. Формула Тейлора

Справочный материал

1. Если функция $f(x)$ имеет производные любого порядка в окрестности точки $x = 0$, то для функции $f(x)$ может быть получен *ряд Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad \textbf{(14.4)}$$

Для того, чтобы ряд Маклорена (14.4) сходился к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $n\to\infty$, остаток ряда стремился к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \qquad \textbf{(14.5)}$$

для всех значений x из интервала сходимости ряда.

2. Разложение в ряд Маклорена некоторых функций[1]

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ (-\infty;+\infty), \qquad \textbf{(14.6)}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots\ (-1;1], \qquad \textbf{(14.7)}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\ (-\infty;+\infty), \qquad \textbf{(14.8)}$$

[1] В скобках указана область (интервал) сходимости данного ряда. Для ряда (14.10) концы интервала сходимости $x = \pm 1$ включаются (или не включаются) в область сходимости этого ряда в зависимости от конкретных значений m.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \ (-\infty; +\infty), \qquad (14.9)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots \ (-1; 1), \qquad (14.10)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \ [-1; 1], \qquad (14.11)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \ (-1; 1). \qquad (14.12)$$

3. Ряд Маклорена (при $x_0 = 0$) является частным случаем *ряда Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (14.13)$$

Ряд Тейлора тесно связан с *формулой Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n, \qquad (14.14)$$

где R_n — остаточный член формулы Тейлора:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (14.15)$$

($\xi \in (x_0; x)$ или $\xi \in (x; x_0)$), записанный в *форме Лагранжа*.

При выполнении условия **(14.5)** остаток $r_n(x)$ ряда Тейлора равен остаточному члену $R_n(x)$ формулы Тейлора.

4. Свойства степенных рядов:

а) Если $f(x)$ — сумма степенного ряда, т.е. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, то на любом отрезке $[a, b]$, целиком принадлежащем интервалу сходимости $(-R; R)$, функция $f(x)$ является непрерывной, а степенной ряд можно *почленно интегрировать* на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c_0 dx + \int_a^b c_1 x dx + \ldots + \int_a^b c_n x^n dx + \ldots \qquad (14.16)$$

б) В интервале сходимости степенной ряд можно *почленно диф- ...цировать*:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + ... + nc_nx^{n-1} + ... \qquad (14.17)$$

При этом ряды **(14.16)** и **(14.17)** имеют тот же радиус сходимости ...что и исходный ряд **(14.1)**.

... Если в некоторой окрестности точки $x = 0$ имеют место разло- ...ия

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \qquad (14.18)$$

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots, \qquad (14.19)$$

... произведение функции $f(x)\ \varphi(x)$ разлагается в той же окрестности в ...енной ряд

$$f(x)\varphi(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\,x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\,x^2 + \ldots +$$
$$+ (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)\,x^n + \ldots \qquad (14.20)$$

...ило перемножения рядов).

В частности, при $f(x) = \varphi(x)$

$$f^2(x) = a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)\,x^2 +$$
$$+ (2a_0a_3 + 2a_1a_2)\,x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2)\,x^4 + \ldots \qquad (14.21)$$

...ило возведения ряда в квадрат).

Почленное интегрирование и дифференцирование степенных ря- ... (свойства **(14.16)**, **(14.17)**) могут быть использованы при нахожде- ... суммы степенного ряда.

14.22. Найти сумму ряда при $x \in (-1; 1)$:

а) $-2x + 4x^3 - 6x^5 + 8x^7 - \ldots (-1)^n\,(2n)\,x^{2n-1} + \ldots;$

б) $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots$

Р е ш е н и е:

а) Можно заметить, что почленное интегрирование данного ряда ... отрезке $[0; x]$, где $x \in (-1; 1)$) приведет к геометрическому ряду ...**14.22**), сумма которого известна:

$$-x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots + (-1)^n\,x^{2n} + \ldots . \qquad (14.22)$$

Полагая $a = -x^2$, $q = -x^2$, **найдем сумму ряда (14.22):**

$S = \dfrac{a}{1-q}$ (см. учебник, **§ 13.1**) или $S(x) = \dfrac{-x^2}{1-\left(-x^2\right)} = \dfrac{-x^2}{1+x^2}$.

Возвращаясь к исходному ряду, находим его сумму дифференцированием $S(x)$. Итак, сумма данного в условии ряда

$$S'(x)=\left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right)'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

б) Данный ряд может быть приведен почленным дифференцированием в интервале сходимости к геометрическому ряду $S'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, сумма которого равна $S'(x)=\dfrac{1}{1-x}$ $(a = 1,\ q = x)$. Сумму исходного ряда находим интегрированием на отрезке $[0;\ x]$, где $x \in(-1;\ 1)$:

$$S(x)=\int_0^x S'(x)\,dx=\int_0^x\frac{dx}{1-x}=-\ln|1-x|\Big|_0^x=-\ln(1-x).\ \blacktriangleright$$

Существует несколько способов разложения функций в степенной ряд. Проиллюстрируем их на конкретных примерах.

Непосредственное разложение

14.23. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = (3 + e^{-x})^2$.

Найдем производные функции и ее значения в точке $x = 0$:

$f(x) = (3 + e^{-x})^2$; $\qquad f(0) = 16$;

$f'(x) = -2(3 + e^{-x})\, e^{-x} = -2(3e^{-x} + e^{-2x})$; $\qquad f'(0) = -8$;

$f''(x) = 2\,(3e^{-x} + 2e^{-2x})$; $\qquad f''(0) = 10$;

$f'''(x) = -2\,(3e^{-x} + 2^2e^{-2x})$; $\qquad f'''(0) = -14$;

$f^{(4)}(x) = 2\,(3e^{-x} + 2^3e^{-2x})$; $\qquad f^{(4)}(0) = 22$;

. . . .

$f^{(n)}(x) = (-1)^n\cdot 2(3e^{-x} + 2^{n-1}e^{-2x})$; $\qquad f^{(n)}(0) = (-1)^n\cdot 2(3 + 2^{n-1})$.

Теперь по формуле **(14.4)**:

$$(3+e^{-x})^2=16-8x+\frac{10}{2!}x^2-\frac{14}{3!}x^3+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot 2\left(3+2^{n-1}\right)}{n!}x^n+\ldots$$

Область сходимости ряда (§ **14.1**) есть $(-\infty;\ +\infty)$.$\blacktriangleright$

Применение готовых разложений

14.24. Разложить в ряд по степеням x функции: *а*) $y = x\ln(1 + x^2)$;

б) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

Р е ш е н и е:

а) Воспользуемся готовым разложением (14.7) функции $y = \ln(1+x)$. Заменяя в нем x на x^2, получим

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n} + ...,$$

следовательно,

$$x\ln(1+x^2) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{n} + ...$$

Область сходимости ряда $[-1; 1]$ находим из условия $-1 < x^2 \le 1$.

б) Воспользуемся биномиальным рядом (14.10), представляющим разложение в ряд функции $y = (1+x)^m$. Заменив в нем x на $(-x^2)$, получим при $m = -\frac{1}{2}$ разложение функции $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-x^2\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-x^2\right)^2 + ...$$
$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)...\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-x^2\right)^n + ...$$

Умножая обе части разложения на x^2, получим

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^6 + ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n+2} + ...$$

Область сходимости ряда $(-1; 1)$ находим из условия $-1 < -x^2 < 1$.▶

14.25. Разложить в ряд по степеням $(x-1)$ функцию $y = e^{3x}$.

Р е ш е н и е. Представим функцию $y = e^{3x}$ в виде: $y = e^3 e^{3(x-1)}$. Это позволяет использовать готовое разложение (14.6) функции $y = e^x$, в котором x заменяем на $3(x-1)$:

$$e^{3(x-1)} = 1 + 3(x-1) + \frac{3^2}{2!}(x-1)^2 + \frac{3^3}{3!}(x-1)^3 + ... + \frac{3^n(x-1)^n}{n!} + ...,$$

откуда

$$e^{3x} = e^3 e^{3(x-1)} = e^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(x-1)^n}{n!}$$ (записываем ряд в сокращенном виде).

Область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$ находим из условия $-\infty < 3(x-1) < \infty$.▶

Применение правила умножения рядов

14.26. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = e^x \ln(1 + x)$.

Р е ш е н и е. В интервале (–1; 1) имеют место разложения **(14.6)** и **(14.7)**. По правилу умножения рядов **(14.20)** получим:

$$e^x \ln(1+x) = 1\cdot x + \left(1\cdot(-\frac{x^2}{2}) + x\cdot x\right) + \left(1\cdot\frac{x^3}{3} + x(-\frac{x^2}{2}) + \frac{x^2}{2!}x\right) + \ldots =$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots.$$

Область сходимости ряда (–1; 1).▶

Применение почленного интегрирования

14.27. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = \arcsin x$.

Р е ш е н и е. Среди готовых разложений **(14.6)—(14.12)** ряда для данной функции нет. В то же время производная этой функции $y = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ может быть разложена в степенной ряд с помощью биномиального ряда **(14.10)** (см. пример **14.24**, *б*):

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n} + \ldots.$$

Учитывая, что $\arcsin x = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, искомый ряд найдем почленным интегрированием данного ряда на отрезке $[0; x]$, принадлежащем интервалу сходимости ряда (–1; 1):

$$\arcsin x = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^x dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^x x^2 dx + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\int\limits_0^x x^4 dx + \ldots +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\int\limits_0^x x^{2n} dx + \ldots = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}x^5 + \ldots +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots.$$▶

14.28. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = \cos^2 x$, применяя различные способы.

Р е ш е н и е:

Первый способ. Применим метод непосредственного разложения по формуле **(14.4)**.

Вначале найдем производные до n-го порядка и вычислим их значения при $x = 0$:

$$f(x) = \cos^2 x;\ f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x;$$
$$f''(x) = -2\cos 2x; f'''(x) = 2^2 \sin 2x;$$
$$f^{(4)}(x) = 2^3 \cos 2x; f^{(5)}(x) = -2^4 \sin 2x \text{ и т. д.}$$

Теперь по формуле **(14.4)** запишем ряд:

$$\cos^2 x = 1 + 0 - \frac{2}{2!}x^2 + 0 + \frac{2^3}{4!}x^4 + 0 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \ldots$$

или

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots.$$

Область сходимости ряда, как нетрудно убедиться, есть $(-\infty; +\infty)$.

Второй способ. Учитывая, что $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, используем готовое разложение в ряд **(14.9)** функции $\cos x$ (в котором вместо x берем $2x$), умножаем обе части полученного равенства на $\frac{1}{2}$, а затем прибавляем к ним $\frac{1}{2}$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right] =$$
$$= 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$$

Третий способ. Для функции $f(x) = \cos x$, имеющей разложение **(14.9)**, т.е.

$$\cos x = 1 + 0 - \frac{1}{2}x^2 + 0 + \frac{1}{4!}x^4 + 0 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots,$$

применим правило **(14.21)** возведения в квадрат степенного ряда:

$$\cos^2 x = 1^2 + 2\cdot 1\cdot 0\cdot x + \left[2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2!}\right) + 0^2\right]x^2 + \left(2\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot\left(-\frac{1}{2!}\right)\right)x^3 +$$
$$+\left[2\cdot 1\cdot\frac{1}{4!} + 2\cdot 0\cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]x^4 + \ldots = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \ldots +$$
$$+\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots.$$

Четвертый способ. Относительно легко можно разложить в ряд производную функции $f(x) = \cos^2 x$, т.е. $f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$ (берем члены ряда **(14.8)** с противоположными знаками, а вместо x берем $2x$):

$$-\sin 2x = -(2x) + \frac{(2x)^3}{3!} - \frac{(2x)^5}{5!} + \ldots .$$

Для получения искомого разложения почленно интегрируем полученный ряд на отрезке $[0;\ x]$, принадлежащем интервалу сходимости $(-\infty;\ +\infty)$, т.е. при любом x:

$$\cos^2 x = 1 + \int_0^x (-\sin 2x)\,dx = 1 - 2\int_0^x x\,dx + \frac{2^3}{3!}\int_0^x x^3 dx - \frac{2^5}{5!}\int_0^x x^5 dx + \ldots =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 2^{n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$$

(к полученному почленным интегрированием ряду добавили 1, так как $\int_0^x (-\sin 2x)\,dx = \cos^2 x \Big|_0^x = \cos^2 x - \cos^2 0 = \cos^2 x - 1$). ▶

Разложить в степенной ряд по степеням x функции:

14.29. $y = e^{-2x}$. **14.30.** $y = \sin\frac{x}{2}$. **14.31.** $y = x^3 \cos x$.

14.32. $y = \ln(1+5x)$. **14.33.** $y = \ln(5+2x)$. **14.34.** $y = \sqrt{1+x^2}$.

14.35. $y = \dfrac{1}{1+x^4}$. **14.36.** $y = \dfrac{3}{4-x}$. **14.37.** $y = x^2 e^{-2x}$.

14.38. $y = x \operatorname{arctg} x$. **14.39.** $y = (1+x)\ln(1+x)$.

14.40. $y = \dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$. **14.41.** $y = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. **14.42.** $y = e^x \ln\sqrt{1-x^2}$.

14.43. $y = e^{-x}\sin x$. **14.44.** $y = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

14.45. $y = (\operatorname{arctg} x)^2$. **14.46.** $y = \ln(6 + x - x^2)$.

14.47. $y = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$.

Разлагая подынтегральную функцию в ряд по степеням x и интегрируя его почленно, найти разложения в ряд функций:

14.48. $\int \frac{e^x}{x}\,dx$. **14.49.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **14.50.** $\int \frac{1-\cos x}{x}\,dx$.

Разложить в степенной ряд функции:

14.51. $y = x^4 + x^2$ по степеням $(x-1)$.

14.52. $y = e^x$ по степеням $(x-2)$.

14.53. $y = \ln x$ по степеням $(x-1)$.

14.54. $y = \frac{1}{x-4}$ по степеням $(x+2)$.

Применяя почленное интегрирование или дифференцирование рядов, найти их суммы:

14.55. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ $(x \in (-1; 1))$.

14.56. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$ $(x \in [-1; 1])$.

14.57. $1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \ldots$ $(x \in (-1; 1))$.

14.3. Применение рядов в приближенных вычислениях

Степенные ряды могут быть использованы для приближенного вычисления значений различных функций, определенных интегралов (в том числе «неберущихся»), нахождения пределов и т.п.

14.58. Вычислить приближенно с точностью до 0,0001:

а) $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}}$; *б*) $\ln 0{,}6$; *в*) $\ln 5$; *г*) $\sqrt[6]{68}$; *д*) $\cos 10^\circ$; *е*) $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$.

Решение:

а) Для вычисления $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}} = e^{-3/4}$ запишем ряд **(14.6)** при $x = -3/4$, принадлежащем области сходимости $(-\infty; +\infty)$:

$$e^{-3/4} = 1 - \frac{3}{4} + \frac{3^2}{4^2 \cdot 2!} - \frac{3^3}{4^3 \cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{4^n \cdot n!} + \ldots =$$
$$= 1 - 0{,}75 + 0{,}28125 - 0{,}070312 + 0{,}013184 - 0{,}001978 +$$
$$+ 0{,}000247 - 0{,}000026 + \ldots .$$

Взяв первые семь членов разложения, на основании следствия из теоремы Лейбница (§ **13.3**, п. 5) для сходящегося знакочередующегося ряда мы допустим погрешность $|r_n|$, не превышающую первого отброшенного члена (по абсолютной величине), т.е.

$$|r_n| \le 0{,}000026 < 0{,}0001.$$

Итак, складывая первые семь членов, получим

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0{,}472391 \approx 0{,}4724.$$

Более точно оценить погрешность вычисления $\frac{1}{\sqrt[3]{e^4}}$ можно, используя формулу Тейлора **(14.14)**. Взяв в качестве величины e^x первые $(n+1)$ членов ряда (вместе с нулевым), мы допускаем погрешность, определяемую остаточным членом R_n **(14.15)** при $x_0 = 0$, $0 < \xi < x$ или $x < \xi < 0$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Для функции $f(x) = e^x$ $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n+1)}(x) = e^x$, т.е. $f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi}$. Следовательно, при $x = -3/4$

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} e^{\xi} 3^{n+1}}{(n+1)! 4^{n+1}}, \text{ где } -\frac{3}{4} < \xi < 0.$$

При $n = 6$, т.е. просуммировав вместе с нулевым 7 членов ряда, мы получим $1/\sqrt[4]{e^3} = e^{-3/4} \approx 0{,}472391$; при этом остаточный член $R_n = -\frac{e^{\xi} \cdot 3^7}{7! \cdot 4^7}$ заключен в границах от минимального $R_n(0) = -\frac{3^7}{7! \cdot 4^7}$ до максимального $R_n(-3/4) = -\frac{0{,}472391 \cdot 3^7}{7! \cdot 4^7}$, т.е. $-0{,}000026 < R_n < -0{,}000013$. Следовательно, точное значение $1/\sqrt[4]{e^3}$ находится в пределах $0{,}472365 < 1/\sqrt[4]{e^3} < 0{,}472378$. Неизменны 4 десятичных знака, следовательно, с точностью до $\delta = 0{,}0001$ $1/\sqrt[4]{e^3} \approx 0{,}4724$.

(Легко показать, что суммирование менее, чем семь членов ряда ($n < 6$), не обеспечивает данной в условии точности ответа.)

б) Для вычисления $\ln 0{,}6$ запишем ряд **(14.7)** при $x = -0{,}4$, входящем в область сходимости ряда $(-1;\ 1]$:

$$\ln 0{,}6=\ln(1+(-0{,}4))=-0{,}4-\frac{0{,}4^2}{2}-\frac{0{,}4^3}{3}-\ldots-\frac{0{,}4^n}{n}-\ldots=$$

$$=-(0{,}4+0{,}08+0{,}021333+0{,}0064+0{,}002048+0{,}000683+$$

$$+0{,}000234+0{,}000082+\ldots).$$

Если в качестве $\ln 0{,}6$ взять первые восемь членов, мы допустим погрешность

$$|r_n|=\frac{0{,}4^9}{9}+\frac{0{,}4^{10}}{10}+\ldots+\frac{0{,}4^n}{n}+\ldots<\frac{0{,}4^9}{9}+\frac{0{,}4^{10}}{9}+\ldots+\frac{0{,}4^n}{9}+\ldots=$$

$$=\frac{0{,}4^9}{9}(1+0{,}4+\ldots+0{,}4^{n-9}+\ldots)=\frac{0{,}4^9}{9}\cdot\frac{1}{1-0{,}4}=0{,}000048<0{,}0001$$

(мы учли, что сумма сходящегося геометрического ряда в скобках равна $\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-0{,}4}$).

Итак, складывая первые восемь членов, получим:

$$\ln 0{,}6\approx-0{,}510780\approx-0{,}5108.$$

Заметим, что при суммировании только семи членов погрешность $|r_n|=\frac{0{,}4^8}{8}\cdot\frac{1}{1-0{,}4}=0{,}000136>0{,}0001$, т.е. не удовлетворяет заданной в условии точности до 0,0001.

З а м е ч а н и е. Оценка погрешности вычисления $\ln 0{,}6$ с помощью остаточного члена формулы Тейлора оказывается в данном случае менее эффективной. Действительно (см. пример **7.20**), для функции $f(x)=\ln(1+x)$ $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, тогда по формуле **(14.15)** остаточный член

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)!}x^{n+1}=\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1},$$

где $0<\xi<x$ или $x<\xi<0$.

При $n=8, x=-0{,}4$ $R_n=-\frac{0{,}4^9}{9(1+\xi)^9}$. Следовательно, $R_n(-0{,}4)<R_n<R_n(0)$, или $-0{,}002890<R_n<-0{,}000029$, а значит, $-0{,}510780-0{,}002890<\ln 0{,}6<-0{,}510780-0{,}000029$, т.е. $-0{,}513670<\ln 0{,}6<-0{,}510809$, что гарантирует точность вычисления лишь до 0,01 (а точнее, до 0,003).

в) Вычислить ln 3 = ln (1 + 2) с помощью ряда **(14.7)** для функции $y = \ln(1 + x)$ не представляется возможным, так как $x = 2$ не входит в область сходимости ряда (–1; 1].

Воспользуемся рядом, приведенным в *учебнике* (**§ 14.2**):

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\right). \qquad \textbf{(14.23)}$$

Этот ряд позволяет вычислять логарифмы любых чисел, так как при изменении x в интервале сходимости ряда (–1; 1) дробь $\frac{1+x}{1-x}$ меняется в интервале $(0;\ +\infty)$.

Пусть $\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln 3$, тогда $x=\frac{1}{2}$ и

$$\ln 3=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^5\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2^{2n-1}\cdot(2n-1)}+\ldots\right)=$$

$$= 1 + 0{,}083333 + 0{,}0125 + 0{,}002232 + 0{,}000434 + 0{,}000089 +$$

$$+ 0{,}000018 + \ldots \approx 1{,}098606 \approx 1{,}0986$$

(суммируем семь членов ряда — обоснование аналогично п. *б*).

Ряд **(14.23)** по сравнению с рядом **(14.7)** быстрее сходится, и потому удобнее для вычисления логарифмов. Так, если для вычисления ln 0,6 с точностью до 0,0001 потребовалось суммировать восемь членов ряда **(14.7)** — см. п. *б*), то с помощью ряда **(14.23)** та же точность достигается при сложении лишь трех членов (рекомендуем убедиться в этом самому читателю).

г) Представим $\sqrt[6]{68}$ в виде $\sqrt[6]{68}=\sqrt[6]{64+4}=2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{6}}$. Так как после проведенного преобразования $x=\frac{1}{16}$ входит в область сходимости (–1; 1) биномиального ряда **(14.10)**, то при $x=\frac{1}{16}$, $m=\frac{1}{6}$ получим, учитывая **(14.10)**:

$$\sqrt[6]{68}=2\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{16}+\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-1\right)}{2!}\frac{1}{16^2}+\ldots+\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{6}-n+1\right)}{n!}\frac{1}{16^n}+\ldots\right)=$$

$$= 2 + 0{,}020833 - 0{,}000543 + 0{,}000021 - \ldots .$$

(Для обеспечения данной в условии точности расчета достаточно взять три члена, так как по следствию из признака Лейбница для сходящегося знакочередующегося ряда погрешность $|r_n| \le 0{,}000021 < 0{,}0001$). Итак, $\sqrt[6]{68} = 2{,}020290 \approx 2{,}0203$.

д) Для вычисления $\cos 10^\circ = \cos\frac{\pi}{18}$ запишем ряд **(14.9)** при $x = \frac{\pi}{18}$, принадлежащем области сходимости $(-\infty; +\infty)$:

$$\cos\frac{\pi}{18} = 1 - \frac{\pi^2}{18^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{18^4 \cdot 4!} + \ldots + (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{18^{2n}(2n)!} + \ldots =$$
$$= 1 - 0{,}015231 + 0{,}000039 + \ldots$$

(необходимо взять два члена, так как при этом погрешность

$$|r_n| < 0{,}000039 < 0{,}0001).$$

Итак, $\cos 10^\circ \approx 1 - 0{,}015231 = 0{,}984769 \approx 0{,}9848$.

е) «Точное» интегрирование здесь невозможно, так как интеграл «неберущийся». Заменив x на $(-x^2)$ в разложении **(14.6)**, получим

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots .$$

Почленно интегрируя ряд на отрезке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, принадлежащем интервалу сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$, получим

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx = \int_0^{1/4} dx - \int_0^{1/4} x^2 dx + \frac{1}{2!}\int_0^{1/4} x^4 dx + \ldots +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{1/4} x^{2n} dx + \ldots = x\Big|_0^{1/4} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/4} + \frac{1}{2!\cdot 5}x^5\Big|_0^{1/4} + \ldots +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}\Big|_0^{1/4} + \ldots = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3\cdot 3} + \frac{1}{2!\cdot 4^5\cdot 5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!\cdot 4^{2n+1}(2n+1)} +$$
$$+ \ldots = 0{,}25 - 0{,}005208 + 0{,}000098 - \ldots \approx 0{,}24489 \approx 0{,}2449$$

(оценка погрешности производится так же, как в примерах *а*), *г*) и *д*)).▶

14.59. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$.

Р е ш е н и е. Нахождение указанных пределов требует неоднократного применения правила Лопиталя (с учетом первого замечательного предела, либо использования эквивалентных бесконечно малых). Вместе с тем эти пределы относительно легко могут быть вычислены, если использовать разложение входящих в них функций в степенные ряды.

а) Заменим e^x и $\sin x$ их разложениями (14.6), (14.8) в степенные ряды. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-2-2x-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\ldots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!}+\frac{2x}{4!}+\ldots}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots}=2.$$

б) Заменяя $\sin x$ и $\operatorname{arctg} x$ их разложениями (14.8), (14.11) в степенные ряды, найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{3!}\right)-\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^5}{5!}\right)+\ldots}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)x^2+\ldots\right]=.$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.\ \blacktriangleright$$

Вычислить приближенно[1] с точностью δ:

14.60. $1/\sqrt[3]{e}$; $\delta=0{,}0001$. **14.61.** $\ln 1{,}4$; $\delta=0{,}001$.

---

[1] При вычислении отдельных определенных интегралов с помощью рядов может потребоваться интегрирование рядов с нецелыми или частично отрицательными показателями степеней при *x*, т.е., вообще говоря, рядов не являющихся степенными. В более подробных курсах математического анализа доказывается возможность почленного интегрирования таких рядов в интервалах их сходимости.

14.62. $\sin 18°$; $\delta = 0{,}0001$.

14.63. $\sqrt[3]{500}$; $\delta = 0{,}001$.

14.64. $\ln 5$; $\delta = 0{,}001$.

14.65. $\sqrt[10]{1027}$; $\delta = 0{,}0001$.

14.66. $\operatorname{arctg} 0{,}2$; $\delta = 0{,}0001$.

14.67. $\cos 0{,}22$; $\delta = 0{,}0001$.

14.68. $\int\limits_0^{0{,}2} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$; $\delta = 0{,}0001$.

14.69. $\int\limits_0^{0{,}25} \ln(1+\sqrt{x})\,dx$; $\delta = 0{,}001$.

14.70. $\int\limits_{0{,}1}^{0{,}2} \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx$; $\delta = 0{,}001$.

14.71. $\int\limits_0^{0{,}5} \frac{dx}{1+x^4}$; $\delta = 0{,}001$.

14.72. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx$; $\delta = 0{,}001$.

14.73. $\int\limits_0^{0{,}5} \cos\frac{x^2}{4}\,dx$; $\delta = 0{,}001$.

14.74. $\int\limits_0^{0{,}1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$; $\delta = 0{,}001$.

14.75. $\int\limits_0^{0{,}5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$; $\delta = 0{,}001$.

Вычислить приближенное значение интегралов, взяв три члена разложения подынтегральной функции в ряд; указать погрешность:

14.76. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

14.77. $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$.

Найти пределы:

14.78. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x - 1 - x}$.

14.79. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

14.80. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$.

14.81. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4}\right)$.

14.82. Прибыль от реализации продукции промышленного предприятия растет в зависимости от роста удельного веса p высококачественных изделий в общем объеме выпуска продукции по формуле $S(p) = \ln\left(1+\frac{p}{a}\right)^b$, где $a > 1$, $0 \le p \le 0{,}2$. Аппроксимировать функцию $S(p)$ линейной и оценить получаемую при этом погрешность.

Указание. Воспользоваться разложением функции $\ln(1 + x)$ в ряд Маклорена. При оценке погрешности считать p максимально возможным.

Задачи для повторения

Найти области сходимости степенных рядов:

14.83. $\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^3}{3\cdot 5}+\frac{x^4}{4\cdot 6}+\ldots$ **14.84.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

14.85. $x-\frac{x^3}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{n-1}n\sqrt{n}}$. **14.86.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

14.87. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}$. **14.88.** $\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$

Применяя дифференцирование или интегрирование, найти суммы рядов:

14.89. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ **14.90.** $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$

Разложить в степенной ряд по степеням x функции:

14.91. $y=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$. **14.92.** $y=(x-\operatorname{tg}x)\cos x$

14.93. $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. **14.94.** $y=e^{-x}\cos x$.

14.95. Применяя дифференцирование, функцию $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ разложить в ряд по степеням x.

14.96. Функцию $y=e^x$ разложить в ряд по степеням $(x+2)$.

Вычислить приближенно с точностью δ:

14.97. $\sqrt[3]{129}$; $\delta=0{,}001$. **14.98.** $\sin 10^\circ$; $\delta=0{,}0001$.

14.99. $\int_0^{1/4}\sqrt{1+x^2}\,dx$; $\delta=0{,}0001$. **14.100.** $\int_0^1\sqrt[3]{x}\cos x\,dx$; $\delta=0{,}001$.

14.101. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$, используя разложение функции $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ в ряд.

Контрольные задания по главе 14 «Степенные ряды»

№	*Вариант 14.1*	*Вариант 14.2*	*Вариант 14.3*
	Найти область сходимости степенных рядов:		
1	$1-\frac{x^2}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\frac{x^4}{3^2\cdot 3\sqrt{3}}-\frac{x^6}{3^3\cdot 4\sqrt{4}}+\ldots$	$1-\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^5}{5^3\sqrt{4}}+\ldots$	$1+\frac{2x}{\sqrt{5\cdot 5}}+\frac{4x^2}{\sqrt{9\cdot 5^2}}+\frac{8x^3}{\sqrt{13\cdot 5^3}}+\ldots$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-2)^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$
	Разложить в ряды по степеням x функции (с указанием области сходимости рядов):		
3	$y=\ln\sqrt[5]{\frac{1+3x}{1-3x}}$	$y=\frac{x-3}{(x+1)^2}$	$y=\frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{2x^3}$
4	$y=e^x\cos x$	$y=\left(1+e^x\right)^2$	$y=e^x\sin x$
	Вычислить приближенное значение выражения, взяв два первых члена разложения функции $f(x)$ степенной ряд; указать погрешность:		
5	$\cos 12^\circ$; $f(x)=\cos x$	$\ln 0{,}9$; $f(x)=\ln(1+x)$	$\sqrt[3]{30}$; $f(x)=(1+x)^m$
	Вычислить приближенно с точностью до 0,001 определенный интеграл:		
6	$\int\limits_0^{1/3}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$	$\int\limits_0^{1}\sin x^2dx$	$\int\limits_0^{0,2}\frac{e^{-2x}-1}{x}dx$

Тест 14

1. Найти длину интервала сходимости ряда

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots.$$

2. Найти наименьшее значение x из области сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}.$$

3. Определить середину интервала сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x-5)^n}{2n-1}.$$

4. Найти радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-9)^{-n}x^{2n}.$$

5. Выяснить, какие из приведенных рядов сходятся при любых значениях x:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^2}x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^n+2}x^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^2}$.

6. Разложить функцию $y=\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$ в ряд по степеням x. В ответе дать коэффициент этого ряда при x^4.

7. Разложить функцию $\frac{1}{x}$ по степеням $(x+2)$. В ответе дать коэффициент этого ряда при $(x+2)^2$.

8. При вычислении $\sqrt[10]{1{,}14}$ было взято два члена биномиального ряда для функции $y=(1+x)^m$ при $x=0{,}14$, $m=\frac{1}{10}$. Выяснить, какая при этом была допущена погрешность:

1) $\approx 0{,}1$; 2) $\approx 0{,}01$; 3) $\approx 0{,}001$; 4) $\approx 0{,}0001$.

9. Вычислить с точностью до 0,01

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

10. Найти максимальное значение x, при котором приближенная формула $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ (представляющая первые два члена разложения в ряд Маклорена функции $y = \cos x$) дает ошибку, не превышающую 0,01. (Округлить полученное значение x до десятых.)

Раздел VI
Функции нескольких переменных

Глава 15
Функции нескольких переменных

15.1. Основные понятия
Справочный материал

1. Если каждому набору n переменных $x_1, \ldots, x_n$ из некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной z, то говорят, что задана *функция нескольких переменных*

$$z = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Множество X называется *областью определения функции.*

2. График функции двух переменных $z = f(x, y)$ есть множество точек трехмерного пространства (x, y, z) и представляет собой, как правило, некоторую поверхность.

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек на плоскости, таких, что во всех этих точках значение функции одно и то же и равно C. Число C в этом случае называется *уровнем.*

3. Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для всех точек (x, y), отстоящих от точки (x_0, y_0) не более, чем на δ, выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

15.1. Найти область определения функции $z = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)}$.

Р е ш е н и е. Область определения представляет собой решение системы неравенств:

$$\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \ge 0, \\ x^2 + y^2 - 1 > 0, \\ \ln(x^2 + y^2 - 1) \ne 0, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, & (*) \\ x^2 + y^2 > 1, & (**) \\ x^2 + y^2 \ne 2. & (***) \end{cases}$$

Множество значений x, y, удовлетворяющих (*), представляет собой внутренность круга с центром (0; 0) и радиусом, равным 2. Решения (**) — внешность круга радиуса 1 с центром (0; 0). Условие (***) означает, что в область определения не входит окружность с центром в начале координат и радиусом, равным $\sqrt{2}$. Таким образом, область определения представляет собой два кольца (см. рис. **15.1**). ▶

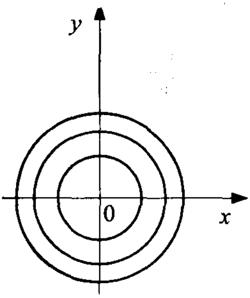


Рис. 15.1

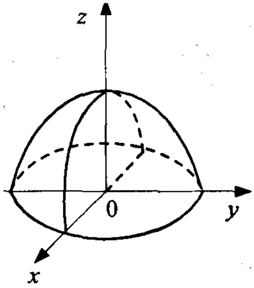


Рис. 15.2

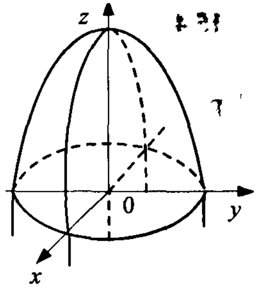


Рис. 15.3

15.2. Построить графики функций:

а) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$; *б*) $z=9-x^2-y^2$.

Р е ш е н и е:

а) Так как $z \geq 0$, график расположен выше плоскости Oxy. Его сечения плоскостями $x=0$ и $y=0$ представляют собой полуокружности радиуса 3 с центром в начале координат. «Нижняя» граница графика (пересечение с плоскостью Oxy представляет собой окружность радиуса 3 (рис. **15.2**).

б) В этом случае сечения графика плоскостями $x=0$ и $y=0$ представляют собой параболы с вершиной в точке (0; 0; 9) и ветвями, направленными вниз. Сечение плоскостью $z=0$ есть окружность с центром в начале координат и радиуса 3. Функция не ограничена снизу. Ее график представлен на рис. **15.3**.▶

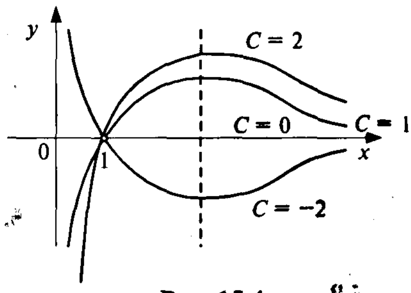


Рис. 15.4

15.3. Построить линии уровня функции $z=\dfrac{xy}{\ln x}$.

Р е ш е н и е. Линии уровня имеют вид $\dfrac{xy}{\ln x}=C$, т.е. представляют собой график функции $y=\dfrac{C\ln x}{x}$ ($x>0$, $x\neq 1$). Функция определена при $x > 0$, имеет правостороннюю асимптоту, ось абсцисс, вертикальную асимптоту — ось ординат. Единственная критическая точка $x = e$ — это точка максимума. Значение функции при этом $y = \frac{C}{e}$. Таким образом, линии уровня имеют вид, показанный на рис. **15.4**.

15.4. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\arcsin(x^2+y^2)}{\ln(1-\sqrt{x^2+y^2})}$.

Р е ш е н и е. Обозначим $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Тогда условие $x \to 0,\ y \to 0$ равносильно тому, что $r \to 0$ и искомый предел примет вид:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\arcsin r^2}{\ln(1-r)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{r\to 0} \frac{(\arcsin r^2)'}{(\ln(1-r))'} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\cdot 2r}{\frac{1}{1-r}(-1)} = 0$$

(применили правило Лопиталя (см. § **8.2**). ▶

15.5. Исследовать на непрерывность в точке (0; 0) функцию $z = \frac{x+y}{x-y}$.

Р е ш е н и е. Будем приближаться к точке (0; 0) по направлению прямых $y = kx$. Тогда будем иметь

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \frac{1+k}{1-k}.$$

Значения пределов различны при различных k, следовательно, предела функции двух переменных не существует, и функция не является непрерывной в точке (0; 0).▶

Найти области определения функций:

15.6. $z = \frac{1}{x^2+y^4}$. **15.7.** $z = \frac{1}{x^2+y^3}$.

15.8. $z = \sqrt[8]{1-x^2+y}$. **15.9.** $z = \sqrt[7]{1-x^2+y}$.

15.10. $z = \ln(x+y)$. **15.11.** $z = \ln(x^2+y^2)$.

15.12. $z = \arcsin x + \arccos y$. **15.13.** $z = \frac{\arcsin(x+y)}{\arccos(x-y)}$.

Найти линии уровня функции в явном виде $y = g(x, C)$:

15.14. $z = xy^3$. **15.15.** $z = x\ln(x^2+y)$.

15.16. $z = e^{x+y}$.

15.17. $z = \sqrt{y - x^2}$.

15.18. $z = \dfrac{1}{x + 2y}$.

15.19. $z = \dfrac{y - x^2}{x^2}$.

15.20. $z = \mathrm{tg}(x + y)$.

Найти пределы:

15.21. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[xy\sqrt{1+xy}\right]$.

15.22. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^3}{x^3 + y^3}$.

15.23. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}$.

15.24. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[xy\ln(xy)\right]$.

15.25. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+2y)\, e^{\frac{1}{x}}$.

15.26. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{x-y}{x^3 - y^2}$.

15.2. Частные производные, градиент, дифференциал

Справочный материал

1. Частными производными $z = f(x, y)$ по x и по y называются пределы вида:

$$z'_x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x};$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x,\ \ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}. \qquad \textbf{(15.1)}$$

2. Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения независимых переменных

$$dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y \qquad \textbf{(15.2)}$$

или

$$dz = z'_x dx + z'_y dy, \qquad \textbf{(15.3)}$$

учитывая, что

$$dx = \Delta x,\ dy = \Delta y. \qquad \textbf{(15.4)}$$

3. Производной z'_l *по направлению* l функции $z = f(x, y)$ называется предел

$$z'_l = \lim_{\Delta l\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}. \qquad \textbf{(15.5)}$$

Производная по направлению может быть выражена через частные производные по формуле

$$z'_l = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta, \qquad \textbf{(15.6)}$$

где единичный вектор $e = (\cos\alpha, \cos\beta)$ задает направление l (с углами α и β, образуемыми с осями координат).

4. *Градиентом* функции $z = f(x, y)$ называется вектор

$$\nabla z = (z'_x, z'_y). \qquad \textbf{(15.7)}$$

Градиент функции в точке $M(x, y)$, отличный от нуля, перпендикулярен линии уровня, проходящей через эту точку.

15.27. Найти частные производные функции $z = x^2 e^{y^2}$.

Решение. При дифференцировании по x считаем постоянной величину y. Таким образом, $z'_x = 2xe^{y^2}$. При дифференцировании по y считаем постоянной величину x, следовательно, $z'_y = x^2 e^{y^2} \cdot 2y = 2x^2 y e^{y^2}$. ▶

15.28. Найти частные производные второго порядка функции двух переменных $z = \ln(1 + x + 2y)$.

Решение. Частные производные 1-го порядка имеют вид:

$$z'_x = \frac{1}{1+x+2y}, \quad z'_y = \frac{2}{1+x+2y}.$$

Считая их новыми функциями двух переменных, найдем их частные производные. Получаем:

$$z''_{xx} = -\frac{1}{(1+x+2y)^2}; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{2}{(1+x+2y)^2};$$

$$z''_{yy} = -\frac{4}{(1+x+2y)^2}. \quad ▶$$

15.29. Найти длину вектора ∇z градиента функции $z = x + e^{x+5y}$ в точке (0; 0).

Решение. Компонентами вектора ∇z **(15.7)** являются частные производные функции, т.е. $\nabla z = (1 + e^{x+5y}, 5e^{x+5y})$. В точке (0; 0) получаем $\nabla z = (2; 5)$. Соответственно длина вектора ∇z равна $|\nabla z| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$. ▶

15.30. Найти производную функции $z = 3y \ln x$ в точке (2; 0) по направлению, параллельному биссектрисе первого координатного угла.

Решение. Прямая, проходящая через точку (2; 0) параллельно биссектрисе первого координатного угла, задается уравнением $y = x - 2$

(см. (4.7)). Ее углы с осями координат (как и у биссектрисы) равны $\frac{\pi}{4}$.

Следовательно, по формуле (15.6):

$$z'_l = z'_x \cos\frac{\pi}{4} + z'_y \cos\frac{\pi}{4} = \left(\frac{3y}{x} + 3\ln x\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = z'_l(2;\,0) = \frac{3}{\sqrt{2}}\ln 2. \blacktriangleright$$

Найти частные производные функций:

15.31. $z = e^{x-y}(2x-1)$. **15.32.** $z = \sin(x+\sqrt{y})$.

15.33. $z = xe^y + x^y$. **15.34.** $z = \ln\sqrt{x+y^2}$.

15.35. $z = \ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$. **15.36.** $z = x^{\sqrt{y}}$.

15.37. $z = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}+1)$. **15.38.** $z = xye^{xy}$.

15.39. $z = \frac{\cos y^2}{x}$. **15.40.** $z = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Найти полные дифференциалы функций:

15.41. $z = e^{xy}(x+y)$. **15.42.** $z = \ln(1+e^x+y^2)$.

15.43. $z = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}$. **15.44.** $z = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$.

15.45. $z = \frac{x\arcsin y}{y}$. **15.46.** $z = x^y + y^x$.

Найти производные функций по заданным направлениям l:

15.47. $z = 3x^4 - xy + y^3$; l составляет с осью Ox угол 60°.

15.48. $z = x + y^2$; l — биссектриса 1-го координатного угла.

15.49. Вычислить производную функции $z = 5x^4 - 3x - y - 1$ в точке $M(2;\,1)$ по направлению l — прямой MN, где $N\,(5;\,5)$.

15.50. Вычислить производную функции $z = \frac{x}{y}$ в точке $M(1;\,1)$ по направлению l — перпендикуляра к прямой $y = 2x - 1$.

Найти градиент функции $z = f(x,\,y)$ и его модуль для функций в указанных точках M:

15.51. $z = 7 - x^2 - y^2$; $M\,(1;\,2)$. **15.52.** $z = (x-y)^2$; $M\,(0;\,3)$.

15.53. $z = xye^{1+x+y}$; $M\,(0;\,-1)$. **15.54.** $z = x\ln(x+y)$; $M\,(-1;\,2)$.

15.55. $z = \sin(x+y^2)$; $M\left(\frac{\pi}{2};\,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$.

15.3. Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум

Справочный материал

1. Точка $M(x_0, y_0)$ называется *точкой максимума (минимума)* функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M, такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \ge f(x, y) \qquad (f(x_0, y_0) \le f(x, y)).$$

2. Если в точке максимума или минимума обе частные производные существуют и непрерывны, то они равны нулю в этой точке *(необходимое условие экстремума).*

3. Если в точке (x_0, y_0) обе частные производные обращаются в нуль, то характер этой точки определяется величиной $\Delta = AC - B^2$, где $A = z''_{xx}$, $B = z''_{xy}$, $C = z''_{yy}$.

При $\Delta > 0$ имеется экстремум (максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$).

При $\Delta < 0$ функция в данной точке не имеет экстремума.

При $\Delta = 0$ вопрос о наличии экстремума остается открытым *(достаточное условие экстремума).*

4. Наибольшее (наименьшее) значение функции (глобальный максимум (минимум)) $z = f(x, y)$ определяется как наибольшее (наименьшее) значение функции в замкнутой области из ее значений в критических точках внутри области и на ее границе.

5. Точка $M(x_0, y_0)$ называется точкой *условного максимума (минимума)* функции $z = f(x, y)$, при условии $g(x, y) = C$, если существует такая окрестность этой точки, что во всех точках (x, y) из этой окрестности, удовлетворяющих условию $g(x, y) = C$, выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \ge f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \le f(x, y)).$$

Уравнение $g(x, y) = C$ называется *уравнением связи.*

Точка условного экстремума является точкой экстремума функции $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[g(x, y) - C]$. Функция L называется *функцией Лагранжа*, а λ — *множителем Лагранжа.*

6. При исследовании функции на экстремум рекомендуется пользоваться следующей схемой:

1. Найти частные производные z'_x и z'_y.

2. Решить систему уравнений $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ и найти критические точки функции.

3. Найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в каждой критической точке и с помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов.

4. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

15.56. Найти экстремумы функции $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

Р е ш е н и е.

1. Находим частные производные:

$$z'_x = e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}(x + y^2) + e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 1\right); \quad z'_y = e^{\frac{x}{2}} \cdot 2y.$$

2. Находим критические точки функции из системы $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

Получаем $x = -2$, $y = 0$, т.е. $(-2;\ 0)$ — единственная критическая точка.

3. Находим частные производные второго порядка: $A = z''_{xx} = e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \times$

$$\times\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 1\right) + e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 2\right); \quad B = z''_{xy} = z''_{yx} = e^{\frac{x}{2}}y;$$

$$C = z''_{yy} = 2e^{\frac{x}{2}}.$$

Имеем $\Delta = AC - B^2 = e^x\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 2\right) - e^x y^2 = e^x\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 2\right).$

В точке $(-2;\ 0)$ имеем $\Delta = e^{-x} > 0$, $A = z''_{xx} = \frac{1}{2}e^{-1} > 0$. Таким образом, $(-2;\ 0)$ — точка минимума.

4. Находим минимум функции $z_{\min}(-2;\ 0) = e^{-\frac{2}{2}}(-2 + 0) = -\frac{2}{e}$. ▶

15.57. Найти экстремумы функции $z = x^y - xy$.

Р е ш е н и е. $z'_x = yx^{y-1} - y$; $z'_y = x^y \ln x - x$. Легко проверить, что равенство $z'_x = 0$ выполняется в трех случаях: при $x = 1$, при $y = 0$ и при $y = 1$. В первых двух случаях уравнение $z'_y = 0$ не имеет решений, так что единственное решение системы $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$ есть $x = e$, $y = 1$, т.е. критическая точка $(e;\ 1)$ — единственная.

Имеем $A = z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2} - 1$; $B = z''_{xy} = x^{y-1}(1 + y\ln x) - 1$;

$C = z''_{yy} = x^y \ln^2 x.$ В точке $(e;\,1)A = z''_{xx} = -1;$ $B = z''_{xy} = 1;$ $C = z''_{yy} = e.$

$\Delta = AC - B^2 = -e - 1 < 0,$ так что функция экстремумов не имеет. Такая точка $(e;\,1)$ есть *седловая* точка. ▶

15.58. Найти экстремумы функции $z = x^3y^3$.

Р е ш е н и е. $z'_x = 3x^2y^3;$ $z'_y = 3x^3y^2.$ Очевидно, (0; 0) — единственная критическая точка: $z''_{xx} = 6xy^3,$ $z''_{xy} = 9x^2y^2,$ $z''_{yy} = 6x^3y.$ Очевидно, в точке (0; 0) $z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yy} = 0,$ т.е. $A = B = C = 0$, $\Delta = 0$, и вопрос об экстремуме остается открытым, так что требуется дополнительное исследование.

Очевидно, в любой окрестности точки (0; 0) функция может принимать и положительные, и отрицательные значения (например, в точке (1; 1) $z = 1 > 0$, а в точке (–1; 1) $z = -1 < 0$); в самой же точке (0; 0) функция равна нулю. Таким образом, ни в какой своей окрестности точка (0; 0) не является ни точкой максимального, ни точкой минимального значения, т.е. функция экстремумов не имеет. ▶

15.59. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = y^2 + 4x^2$ на круге $x^2 + y^2 \le 1$.

Р е ш е н и е. Критическая точка $x = 0$, $y = 0$ — единственная и расположена внутри круга $z\,(0;\,0) = 0$. На границе круга $y^2 = 1 - x^2$ и $z = 1 + 3x^2$, где $0 \le x^2 \le 1$. Таким образом, на границе имеем $z_{\min} = 1$, $z_{\max} = 4$. Следовательно, наименьшее значение $z = 0$ принимается внутри круга, наибольшее $z = 4$ — на его границе.▶

15.60. Найти экстремумы функции $z = e^{x+2y}$ при условии, что $x^2 + y^2 = 1$.

Р е ш е н и е.

Первый способ. При условии $x^2 + y^2 = 1$ имеем $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ и получаем две функции одной переменной $z_{1,2} = e^{2y\pm\sqrt{1-y^2}}$;

$$z' = e^{2y\pm\sqrt{1-y^2}}\left(2 \mp \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right).$$

Критические точки задаются равенствами $2\sqrt{1-y^2} = \pm y,$ т.е. $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.Таким образом, имеем две критические точки $\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ и

$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Легко проверить (см. § **8.4**), что $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ — точка максимума, $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ — точка минимума.

Второй способ. Функция Лагранжа **(15.8)** имеет вид:

$$L(x, y, \lambda) = e^{x+2y} - \lambda\,(x^2 + y^2 - 1). \qquad \textbf{(15.8)}$$

Приравнивая ее частные производные к нулю, получаем систему:

$$\begin{cases} e^{x+2y} = 2\lambda x, & \textbf{(15.9)} \\ 2e^{x+2y} = 2\lambda y, & \textbf{(15.10)} \\ x^2 + y^2 = 1. & \textbf{(15.11)} \end{cases}$$

Из уравнений **(15.9)** и **(15.10)** находим $y = 2x$, подставляя в **(15.11)**, получаем два решения $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Таким образом, получаем те же две критические точки $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ — точку максимума и $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ — точку минимума. ▶

15.61. При каком соотношении между высотой и радиусом основания прямого кругового конуса его объем будет наибольшим, если площадь боковой поверхности фиксирована?

Р е ш е н и е. Пусть площадь боковой поверхности $S = \pi Rl = \pi R\sqrt{h^2 + R^2}$ (где l — образующая конуса, R — радиус основания, h — высота). Объем $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Таким образом, требуется найти наибольшее значение функции $V(L, R) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ при условии $\pi R\sqrt{h^2 + R^2} = S$.

Составим функцию Лагранжа **(15.8)**:

$$L(h, R, \lambda) = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \lambda(\pi R\sqrt{h^2 + R^2} - S).$$

Ее частные производные по h и по R соответственно равны $V'_h = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{\lambda\pi Rh}{\sqrt{h^2+R^2}}$; $V'_R = \frac{2}{3}\pi Rh - \lambda\left(\pi\sqrt{h^2+R^2} + \frac{\pi R^2}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)$. Приравнивая их к нулю, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}R^2 = \lambda\frac{Rh}{\sqrt{h^2+R^2}}, & (15.12) \\ \frac{2}{3}Rh = \lambda\frac{h^2+2R^2}{\sqrt{h^2+R^2}}. & (15.13) \end{cases}$$

Поделив обе части уравнения (15.12) на аналогичные (15.13), получаем

$$2\frac{h}{R} = \frac{h}{R} + 2\frac{R}{h},$$

откуда $h^2 = 2R^2$, т.е. $h = R\sqrt{2}$.

Таким образом, имеется одна критическая точка $\left(\sqrt{\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}};\ \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}\right)$.

Допустимые значения R принадлежат отрезку $\left[0;\ \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right]$, причем на границе этого отрезка значения V равны нулю. Так как $V \geq 0$ при всех R, то в единственной критической точке достигается наибольшее значение.

Таким образом, искомое соотношение имеет вид: $h = R\sqrt{2}$. ▶

Исследовать функции на экстремум:

15.62. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

15.63. $z = xy(1 - x - y)$.

15.64. $z = x^3y^2(2 - x - y)$.

15.65. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

15.66. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ $(0 < x < \pi;\ 0 < y < \pi)$.

15.67. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

15.68. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

15.69. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

15.70. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$.

15.71. $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

15.72. $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

15.73. $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

15.74. $z = xy - \ln(x + y)$.

15.75. $z = \sqrt{x}\sqrt[4]{y} - x - 2y$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции в областях, задаваемых неравенствами:

15.76. $z = x - 2y + 5,\ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ x + y \leq 1.$

15.77. $z = x^3 + y^2,\qquad x^2 + y^2 \leq 1.$

15.78. $z = \ln(x + y),\qquad (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 1.$

15.79. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную сумму длин ребер a, найти параллелепипед, имеющий наибольший объем.

Исследовать функции на условный экстремум:

15.80. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

15.81. $z = x - y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

15.82. $z = xy^2$ при $x + 2y = 4$.

15.83. $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$.

15.84. $z = \sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}$ при $2x + 5y = 100$.

15.85. Найти высоту и радиус основания цилиндра наибольшего объема, если его полная поверхность равна 6π.

15.86. Прямоугольный параллелепипед вписан в полушар радиуса R. Найти такие длины сторон параллелепипеда, чтобы его объем был наибольшим.

15.87. Определить наружные размеры закрытого ящика с заданной толщиной стенок d и внутренней емкостью V так, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала.

15.4. Метод наименьших квадратов

Справочный материал

1. Постановка задачи. Производится n наблюдений $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ переменных x и y. Предполагая, что между x и y существует зависимость вида $y = f(x)$, найти значения параметров a и b, наилучшим образом согласованные с экспериментальными данными.

Согласно методу наименьших квадратов параметры функции $f(x)$ следует выбирать так, чтобы сумма квадратов невязок

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i\right)^2 \tag{15.14}$$

была наименьшей.

2. Если $f(x)$ — линейная функция, т.е. $y = ax + b$, то $S=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$, а неизвестные параметры a и b определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i.\end{cases} \quad (15.15)$$

3. Если $f(x)$ — квадратичная функция, т.е. $y = ax^2 + bx + c$, то $S=\sum_{i=1}^{n}(ax^2{}_i+bx_i+c-y_i)^2$, а неизвестные параметры a, b, c определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^4\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^3\right)b+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)c=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i,\\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^3\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)b+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)c=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)b+nc=\sum_{i=1}^{n}y_i.\end{cases} \quad (15.16)$$

15.88. Имеются следующие данные о величине пробега автомобиля x (тыс. км) и y — расходе масла (л/тыс. км):

x_i	50	70	90	110	130
y_i	0,2	0,5	0,8	1,1	1,3

Полагая, что между переменными x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу $y = ax + b$ методом наименьших квадратов.

Р е ш е н и е. Найдем необходимые для решения суммы $\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\sum_{i=1}^{n}y_i$, $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$. Промежуточные вычисления представлены в таблице:

i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
1	50	0,2	10	2500
2	70	0,5	35	4900
3	90	0,8	72	8100
4	110	1,1	121	12 100
5	130	1,3	169	16 900
Σ	**450**	**3,9**	**407**	**44 500**

Система нормальных уравнений (**15.15**) имеет вид:

$$\begin{cases} 44500a + 450b = 407, \\ 450a + 5b = 3{,}9. \end{cases}$$

Ее решения $a = 0{,}014$, $b = -0{,}48$. Таким образом, линейная зависимость имеет вид: $y = 0{,}014x - 0{,}48$. ▶

15.89. Имеется четыре измерения пары переменных (x, y), результаты которых приведены в таблице:

x	1	2	3	4
y	0,2	0,3	1,0	1,2

Методом наименьших квадратов построить линейную зависимость $y = ax + b$. Сравнить полученную зависимость с зависимостью $y = \frac{1}{8}x^2$.

Р е ш е н и е. Аналогично задаче **15.88** найдем уравнение линейной зависимости: $y = 0{,}37x - 0{,}25$.

Сравним величины $S = \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i) - y_i\right]^2$ для найденной линейной зависимости и зависимости $y = \frac{1}{8}x^2$. Промежуточные вычисления представим в таблице:

i	x_i	y_i	$\frac{1}{8}x_i^2$	$0{,}37x_i - 0{,}25$	$\left(\frac{1}{8}x_i^2 - y_i\right)^2$	$[0{,}37x_i - 0{,}25 - y_i]^2$
1	1	0,2	0,125	0,12	0,005625	0,0064
2	2	0,3	0,5	0,49	0,040000	0,0361
3	3	1,0	1,125	0,76	0,015625	0,0576
4	4	1,2	2	1,23	0,640000	0,0009
Σ	—	—	—	—	**0,701250**	**0,1010**

Как видно $S_{лин} < S_{кв}$, следовательно, линейная зависимость предпочтительнее. ▶

15.90. Имеются следующие данные о расходах на рекламу x (тыс. усл. ед.) и сбыте продукции y (тыс. ед.):

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,6	4,0	7,4	12,0	18,0

Предполагая, что между переменными x и y существует квадратичная зависимость вида $y = ax^2 + bx + c$, найти значения параметров a, b, c методом наименьших квадратов.

Р е ш е н и е. Найдем необходимые для решения суммы

$$\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^4,\ \sum_{i=1}^{n} y_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i\ .$$

Вычисления приведены в таблице:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	1	1,6	1	1	1	1,6	1,6
2	2	4,0	4	8	16	8,0	16,0
3	3	7,4	9	27	81	22,2	66,6
4	4	12,0	16	64	256	48,0	196,0
5	5	18,0	25	125	625	90,0	450,0
Σ	**15**	**43,0**	**55**	**225**	**979**	**169,8**	**680,2**

Система нормальных уравнений (**15.16**) имеет вид:

$$\begin{cases} 979a + 225b + 55c = 680{,}2, \\ 225a + 55b + 15c = 169{,}8, \\ 55a + 15b + 5c = 49{,}0. \end{cases}$$

Ее решение $a =$ 0,3; $b = 0{,}48$; $c = 5{,}06$. Таким образом, искомая зависимость имеет вид: $y = 0{,}3x^2 + 0{,}48x + 5{,}06$. ▶

Имеются следующие данные о переменных x и y. Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу $y = ax + b$ методом наименьших квадратов:

15.91. x — цена на товар (усл. ед.); y — уровень продаж (тыс. ед.):

x_i	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
y_i	200	160	120	90	80

15.92. x — уровень потребления электроэнергии на предприятии (млн кВт · ч); y — себестоимость единицы продукции:

x_i	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y_i	20,0	18,8	18,2	18,1	18,0

15.93. x — мощность двигателя (л.с.); y — средний срок его эксплуатации (мес.):

x_i	30	40	50	60	70
y_i	18	20	21	24	25

По экспериментальным данным построить методом наименьших квадратов линейную эмпирическую зависимость $y = ax + b$. Сравнить полученную зависимость с альтернативной и определить, какая из них лучше соответствует экспериментальным данным:

15.94.

x_i	2	2,5	3	3,5	4
y_i	4,2	5,5	6,9	8	9,5

Альтернативная зависимость $y = 2x + 0{,}1x^2$.

15.95.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,0	1,4	1,7	2,0	2,2

Альтернативная зависимость $y = \sqrt{x}$.

15.96.

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y_i	0,50	0,30	0,25	0,18	0,12

Альтернативная зависимость $y = 2^{-x}$.

15.97. Имеются следующие экспериментальные данные о количестве единиц произведенной продукции x и издержках y (тыс. усл. ед.):

x_i	10	20	30	40	50
y_i	2,0	5,9	12,0	20,0	30,0

Функция издержек (см. § **8.6**) ищется в виде $y = ax + bx^2$. Определить параметры a и b функции методом наименьших квадратов[1].

15.98. Имеются следующие экспериментальные данные о количестве произведенного товара x (тыс. ед.) и количестве реализованного товара $K(x)$ (тыс. ед.):

x_i	100	120	140	160	180	200
y_i	100	114	130	146	163	180

Зависимость ищется в виде $y = 100 + a(x - 100) - b\sqrt{x - 100}$.. Найти ее параметры a и b методом наименьших квадратов[1].

[1] *Указание.* Для решения задач **15.97—15.99** вначале необходимо получить свою систему нормальных уравнений, исходя из равенств: $S'_a = 0$, $S'_b = 0$, где S определяется по формуле **(15.14)**.

15.99. Имеются следующие экспериментальные данные о цене за единицу товара p (усл. ед.) и доле реализованного товара $w = \frac{K(x)}{x}$:

p_i	10	12	15	16	20
w_i	1,95	0,93	0,92	0,90	0,89

Функция $w(p)$ ищется в виде $w = 1 - ap - bp^2$. Найти ее параметры a и b методом наименьших квадратов[1].

15.5. Двойные интегралы

Справочный материал

1. Рассмотрим множество D на плоскости. Построим покрывающую это множество решетку (рис. **15.5**).

Пусть Δx_i и Δy_j — соответственно длина горизонтальной и вертикальной клетки Δ_{ij}. Выберем в каждой клетке Δ_{ij} точку (ξ_i, η_j).

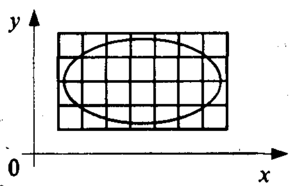


Рис. 15.5

Интегральной суммой функции $z = f(x, y)$ на множестве D называется сумма

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \Delta y_j.$$

2. Функция $z = f(x, y)$ называется *интегрируемой* на множестве D, если существует конечный предел I интегральной суммы этой функции на D при условии $d = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2} \to 0$. Само значение предела I называется *двойным интегралом функции* $z = f(x, y)$ на множестве D:

$$I = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j. \qquad (15.17)$$

3. Если область D имеет вид, изображенный на рис. **15.6**,

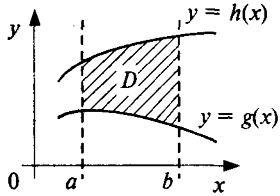


Рис. 15.6

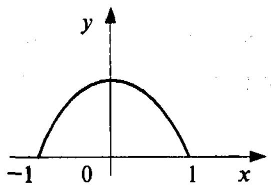


Рис. 15.7

[1] См. сноску на с. 367.

то имеет место равенство:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right] dx. \qquad \textbf{(15.18)}$$

15.100. Вычислить $I = \iint\limits_D x^2 y\,dx\,dy$, где D — полукруг, изображенный на рис. **15.7**.

Р е ш е н и е. Имеем $g(x) = 0$, $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ — функции, задающие нижнюю и верхнюю границы области.

По формуле (**15.18**):

$$I = \int\limits_{-1}^{1}\left[\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y\,dy\right] dx = \int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\right] dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{15}. ▶$$

15.101. Вычислить

$$I = \iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy,$$

где D — область, ограниченная параболами $y = 6 - x^2$, $y = 2 - x^2$, прямой $y = x$ и осью ординат.

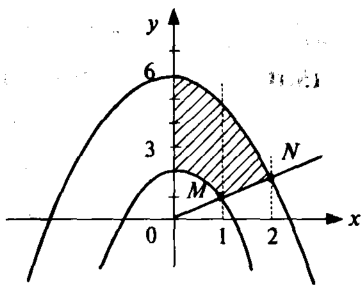


Рис. 15.8

Р е ш е н и е. Область D изображена на рис. **15.8**.

Разобьем область D на две области прямой, проходящей через точку M параллельно оси ординат. Точка M имеет абсциссу, равную 1, точка N — равную 2. Таким образом, имеем:

$$I = \int\limits_0^1\left[\int\limits_{2-x^2}^{6-x^2}(x+y)\,dy\right]dx + \int\limits_1^2\left[\int\limits_{x}^{6-x^2}(x+y)\,dy\right]dx =$$

$$= \int\limits_0^1\left[\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{2-x^2}^{6-x^2}\right]dx + \int\limits_1^2\left[\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x}^{6-x^2}\right]dx =$$

$$= \int_0^1 (-4x^2+4x+16)\,dx + \int_1^2 \left(\frac{x^4}{2} - x^3 - \frac{15x^2}{2} + 6x + 18\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 16x\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} - \frac{5}{2}x^3 + 3x^2 + 18x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1537}{60}. \blacktriangleright$$

Вычислить двойные интегралы:

15.102. $\iint\limits_D (x+y^2)\,dx\,dy$, где D ограничена прямыми $y = x$, $y = 2x$ и прямой $y = -x + 4$.

15.103. $\iint\limits_D \frac{x}{y}\,dx\,dy$, где D ограничена линиями $y = e^x$, $y = e^{2x}$ и прямой $x = 2$.

15.104. $\iint\limits_D e^{xy}\,dx\,dy$, где D ограничена гиперболой $xy = 1$, осью абсцисс и прямыми $x = 2$, $x = 3$.

15.105. $\iint\limits_D (\sqrt{x}+\sqrt{y})\,dx\,dy$, где D ограничена параболами $y = x^2$, $y = 4x^2$ и прямой $x = 2$.

15.106. $\iint\limits_D \sin(x-y)\,dx\,dy$, где D ограничена прямыми $y = x$, $y = 2x$ и прямой $x = \pi$.

15.6. Функции нескольких переменных в экономических задачах

Справочный материал

1. Производственной функцией называется зависимость результата производственной деятельности — выпуска продукции от обусловивших его факторов — затрат ресурсов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Производственная функция может быть задана как в натуральных, так и в денежных единицах. В последнем случае она представляет собой доход от использования ресурсов.

Производственная функция $K(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$ называется *функцией Кобба—Дугласа*. Параметры α и β представляют собой частные эластичности выпуска продукции по отношению к затратам труда x и капитала y (см. п. 3).

2. Функция полезности $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задает полезность для потребителя от приобретения x_1 единиц 1-го блага, x_2 единиц 2-го блага и т.д.

3. Частной эластичностью функции нескольких переменных $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно переменной x_i называется величина

$$F_{x_i}(z) = \lim_{\Delta x_i \to 0}\left(\frac{\Delta_{x_i} z}{z} : \frac{\Delta x_i}{x_i}\right) = \frac{x_i}{z} z'_{x_i}. \qquad \textbf{(15.19)}$$

Значение $E_{x_i}(z)$ показывает приближенно, на сколько процентов изменится переменная z при изменении переменной x_i на 1 %.

15.107. Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид $K(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ (x — количество единиц первого ресурса, y — второго). Стоимость единицы первого ресурса — 5, второго — 10 ден. ед. Найти максимальную прибыль при использовании ресурсов.

Р е ш е н и е. Производственная функция в денежном выражении равна доходу от использования ресурсов. Издержки при этом равны $C(x) = 5x + 10y$. Таким образом, функция прибыли равна

$$\pi(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 5x - 10y.$$

Требуется найти ее максимум.

Частные производные функции $\pi(x, y)$ равны $\pi'_x = 15x^{-1/2}y^{1/3} - 5;$ $\pi'_y = 10x^{1/2}y^{-2/3} - 10$. Приравнивая их к нулю, найдем решение $x = 81$, $y = 27$. Частные производные второго порядка имеют вид:

$$\pi''_{xx} = -\frac{15}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}, \quad \pi''_{xy} = \pi''_{yx} = 5x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}, \quad \pi''_{yy} = -\frac{20}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{3}}.$$

$$\Delta = \pi''_{xx}\pi''_{yy} - (\pi''_{xy})^2 = 25x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{4}{3}} > 0. \quad \pi''_{xx} < 0.$$

Таким образом, найденная критическая точка есть точка максимума. Соответствующее значение прибыли равно 135 (ден. ед.).▶

15.108. Производственная функция равна $\pi(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, стоимость единицы первого ресурса равна 5, второго — 10. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 ден. ед. В этих условиях найти оптимальное для производителя значение (x, y) количества используемых ресурсов.

Р е ш е н и е. Теперь следует максимизировать функцию $\pi(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 5x - 10y$, но при условии, что $5x + 10y \le 600$. В предыдущей задаче было найдено оптимальное распределение ресурсов в ситуации, когда ограничения отсутствовали. Оказалось, что оптимальные затраты на ресурсы равны $5 \cdot 81 + 10 \cdot 27 = 675 > 600$. Можно показать, что в этом случае в условиях наличия ограничений на ресурсы следует потратить всю возможную сумму.

Итак, имеем задачу максимизации функции

$$\pi(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 5x - 10y$$

при условии, что $5x + 10y = 600$, или $x + 2y = 120$.

Первый способ. В силу ограничений имеем $x = 120 - 2y$ и

$$\pi(y) = 30\sqrt{120-2y}\sqrt[3]{y} - 5(120-y) - 10y = 30\sqrt{120-2y}\sqrt[3]{y} - 600.$$

Производная функции $\pi'_y(y) = \dfrac{30\sqrt[3]{y}}{\sqrt{120-2y}} + \dfrac{10\sqrt{120-2y}}{\sqrt[3]{y}}$. Приравнивая ее к нулю, получим решение $y = 24$, откуда $x = 120 - 2{\cdot}24 = 72$. Максимальная прибыль при этом равна $30{\cdot}72{\cdot}24 - 5{\cdot}72 - 10{\cdot}24 =$ $= 51\,240$ (ден. ед.).

Второй способ. При условии, что $5x + 10y = 600$, функция прибыли имеет вид $\pi(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 600$. Очевидно, что если какое-то значение C достигается, то линия уровня функции $\pi\ (x, y) = C$ должна пересекаться с прямой $5x + 10y = 600$.

Уравнение линии уровня функции прибыли $30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 600 = C$ может быть записано как $y = \dfrac{A}{x^{3/2}}$, где $A = \dfrac{C+600}{30}$.

Легко видеть, что максимальное значение A, а следовательно, и уровня C достигается в том случае, если соответствующая линия уровня касается прямой $5x + 10y = 600$. Так как градиент в каждой точке ортогонален линии уровня, то из этого следует, что условие максимальности прибыли может быть сформулировано следующим образом: вектор (π'_x, π'_y) ортогонален прямой $5x + 10y = 600$. Эта прямая имеет угловой коэффициент, равный $-\dfrac{1}{2}$. Угловой коэффициент прямой, проходящей через вектор (π'_x, π'_y) равен $\dfrac{\pi'_y}{\pi'_x}$. По условию перпендикулярности прямых имеем $\dfrac{\pi'_y}{\pi'_x} = 2$, т.е.

$$\frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}} = 2,$$

или $x = 3y$. Подставляя полученное выражение в уравнение прямой $5x + 100y = 600$, находим $x = 72$, $y = 24$. ▶

З а м е ч а н и е. Оптимальное решение лежит на прямой ограничений (в данном случае на прямой $5x + 10y = 600$) только в том случае, если при оптимальном решении без ограничений сумма, затрачиваемая на ресурсы, больше ограничительной. В противном случае решение задачи с ограничениями просто совпадает с решением задачи без ограничений.

15.109. Функция полезности имеет вид: $U(x, y) = 2\ln(x-1) + 3\ln(y-1)$. Цена единицы первого блага равна 8, второго — 16. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равная 1000. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их приобретения была бы наибольшей?

Р е ш е н и е. Рассмотрим линии уровня функции полезности $U(x, y) = C$, т.е. $2\ln(x-1) + 3\ln(y-1) = C$. Используя свойства логарифмов, имеем:

$$\ln(x-1)^2(y-1)^3 = C, \text{ т.е. } (y-1)^3 = \frac{A}{(x-1)^2}, \text{ где } A = e^C.$$

Таким образом, линии уровня представляют собой графики функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{A}}{(x-1)^{2/3}} + 1$.

Используя рассуждения, приведенные в предыдущем примере, получаем, что в точке (x, y), в которой достигается максимальная полезность, линия уровня касается прямой $8x + 16y = 1000$, или $x + 2y = 125$. Значит, градиент функции полезности должен быть перпендикулярен этой линии. Градиент функции полезности имеет вид $\left(\dfrac{2}{x-1}; \dfrac{3}{y-1}\right)$. Угловой коэффициент прямой $k = -\dfrac{1}{2}$. Используя условие перпендикулярности прямых, имеем: $\dfrac{3(x-1)}{2(y-1)} = 2$, или $3x - 4y = -1$. Следовательно, оптимальное распределение потребления товаров находится как решение системы:

$$\begin{cases} x + 2y = 125, \\ 3x - 4y = -1, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad x = 49{,}5; \quad y = 37{,}75. ▶$$

Найти значения величин используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если заданы производственная функция $K(x, y)$ и цены p_1 и p_2 на единицу первого и второго ресурсов:

15.110. $K(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$; $\qquad p_1 = 4, \quad p_2 = \dfrac{1}{48}$.

15.111. $K(x,y)=10\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}$; $\qquad p_1=2,\quad p_2=\dfrac{2}{3}$.

Заданы производственная функция, цены на единицу первого и второго ресурсов, а также ограничения I в сумме, которая может быть потрачена на приобретение ресурсов (сумма $\le I$). Найти значения величин используемых ресурсов $(x,\ y)$, при которых фирма-производитель получит наибольшую прибыль:

15.112. $K(x,y)=10\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$; $\qquad p_1=2,\quad p_2=4,\quad I=12.$

15.113. $K(x,y)=24\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}$; $\qquad p_1=27, p_2=4,\quad I=6.$

Потребитель имеет возможность потратить сумму 1000 ден. ед. на приобретение x единиц первого товара и y единиц второго товара. Заданы функция полезности $U(x,\ y)$ и цены p_1, p_2 за единицу соответственно первого и второго товаров. Найти значения (x, y), при которых полезность для потребителя будет наибольшей:

15.114. $U=0{,}5\ln(x-2)+2\ln(y-1)$; $\qquad p_1=0{,}2,\qquad p_2=4.$

15.115. $U=2(x-1)^{1/4}+(y-1)^{1/3}$; $\qquad p_1=2,\qquad p_2=3.$

Идентифицированы функция издержек $C(x)$, а также функция $K(p,x)$ — количество реализованного товара при установленной цене за единицу, равной p $(p>p_0)$. Найти оптимальные значения x и p для монополиста-производителя:

15.116. $C(x)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{12}x^3$; $\qquad K(x,p)=\dfrac{x}{1+(p-p_0)^2}$.

15.117. $C(x)=10+x^2$; $\qquad K(x,p)=\dfrac{x}{1+\dfrac{p^2}{16}}$.

15.118. Решить задачу **15.108** с помощью функции Лагранжа.

15.119. Функция полезности имеет вид:

$$U(x,y)=\ln(x-1)+\frac{1}{4}\ln(y-2),$$

где x, y — количества приобретенных единиц 1-го и 2-го блага. Найти частные эластичности функции полезности по переменным x и y и пояснить их смысл.

15.120. Полезность от приобретения x единиц 1-го блага и y единиц 2-го блага имеет вид $U(x,\ y)=\ln x+\ln 2y$. Единица 1-го блага стоит 2 усл. ед., а 2-го — 3 усл. ед. На приобретение этих благ планируется потратить 100 усл. ед. Как следует распределить эту сумму, чтобы полезность была наибольшей?

Задачи для повторения

15.121. Найти область определения функции
$$z=\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{1-\sqrt{y}}.$$

Найти линии уровня функций:

15.122. $z=\dfrac{\operatorname{tg}(x-y^2)}{x}$. **15.123.** $z=x^y$.

Найти пределы функций:

15.124. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}=\dfrac{xy}{e^{xy}-1}$. **15.125.** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to-1}}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

15.126. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

Найти частные производные функций:

15.127. $z=(\ln x)^{\frac{1}{y}}$. **15.128.** $z=\sin(x\arcsin y)$.

Найти производные функции по заданному направлению:

15.129. $z=\dfrac{y}{x}$ по направлению, параллельному прямой $y=2x$.

15.130. $z=\dfrac{\ln x}{y}-\dfrac{\ln y}{x}$ в направлении вектора $(1;\,1)$.

15.131. Найти модуль градиента функции $z=\operatorname{arctg}(x^3+y^4)$ в точке $(1;\,1)$.

15.132. При каких $k>0$ градиент функции $z=(2x+ky)^2$ перпендикулярен прямой $x+y=2$.

Найти критические точки функций:

15.133. $z=e^{2x-y}-e^{2x+y}+y-y^2$. **15.134.** $z=\dfrac{x+2y}{x^2+2y^2}$.

Исследовать на экстремум функции:

15.135. $z=x^2+2y^2-4x-6y+2$.

15.136. $z=x^2-2y^2-4x-7y+2$.

15.137. Исследовать на условный экстремум функцию $z=2x+3y$ при условии $(x-1)^2+y^2=13$.

15.138. При каких значениях a, b сумма корней уравнения $x^2 + (a+2b)x + \dfrac{a^2+a}{2} + ab - b + 2b^2 - 1 = 0$ максимальна?

15.139. Найти минимальное значение функции $z = 2x + 3y$ на множестве, задаваемом неравенством $y - 2x^2 \geq 0$.

15.140. Имеются следующие данные о переменных x и y:

x_i	–1	1	3	5	7
y_i	–1,0	3,0	8,0	10,0	15,0

Предполагая что между x и y существует линейная зависимость, найти ее вид методом наименьших квадратов.

15.141. Имеются следующие экспериментальные данные о количестве единиц произведенной продукции и издержках (тыс. усл.ед.):

x_i	100	200	300	400	500
y_i	11,0	24,0	40,0	60,0	75,0

Функция издержек ищется в виде $S = ax + bx^2$. Найти значения a и b методом наименьших квадратов.

15.142. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy,$$

где D — область, ограниченная параболой $x^2 + y = 2$, прямой $x - y = 0$ и осью ординат.

Контрольные задания по главе 15
«Функции нескольких переменных»

<table>
<tr><th>№</th><th>Вариант 15.1</th><th>Вариант 15.2</th><th>Вариант 15.3</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td colspan="3">Найти значения частных производных функций в заданных точках:</td></tr>
<tr><td>а) $z = x^{y^3}$; (1; 0)
б) $\ln(x \ln y)$; (1; e)</td><td>а) $z = x^{\sqrt{y}}$; (1; 1)
б) $\ln \frac{x}{\sqrt{y}}$; (1; 4)</td><td>а) $z = x^{\frac{1}{y}}$; (1; 1)
б) $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$; (1; 1)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td colspan="3">Найти экстремумы функции:</td></tr>
<tr><td>$z = \sqrt{x}\sqrt[4]{y} - 2x - y$</td><td>$z = \sqrt[3]{x}\sqrt{y} - 2x - 3y$</td><td>$z = \sqrt[4]{x}\sqrt{y} - x - 2y$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td colspan="3">Найти наибольшее значение функции $z = f(x, y)$ в области, задаваемой системой неравенств:</td></tr>
<tr><td>$z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
$\begin{cases} 2x + y \le 1, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0 \end{cases}$</td><td>$z = \ln(x^2 + y^2)$;
$\begin{cases} x + 2y \le 1, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0 \end{cases}$</td><td>$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$;
$\begin{cases} 2x + 4y \le 1, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td colspan="3">Найти экстремальное значение функции при заданном ограничении:</td></tr>
<tr><td>$z = 2x + y - y^2 - x^2$
при $x + 2y = 1$</td><td>$z = 1 - 2x - (y - x)^2$
при $x + y = 2$</td><td>$z = 4 - x - y - x^2 - 2y^2$
при $2x + y = 4$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td colspan="3">Предполагая, что между переменными x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу $y = ax + b$ методом наименьших квадратов по следующим данным:</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>y_i</td><td>1,3</td><td>2</td><td>2,5</td><td>2,8</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>y_i</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>y_i</td><td>3</td><td>3,4</td><td>3,6</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td colspan="3">Вычислить двойной интеграл, если область D ограничена линиями $y = 1 - x^2$ и $y = 0$:</td></tr>
<tr><td>$\iint\limits_D (x + y^2)\,dx\,dy$</td><td>$\iint\limits_D (x + 2y)\,dx\,dy$</td><td>$\iint\limits_D xy\,dx\,dy$</td></tr>
</table>

Тест 15

1. Найти площадь фигуры, представляющей область определения функции $y=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Считать $\pi = 3{,}14$.

2. На рис. **15.9** изображена линия уровня функции $z = ax + by$. Найти a/b.

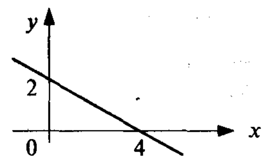


Рис. 15.9

3. Выяснить, на каком рисунке изображены линии уровня функции $z = xy$ (рис.**15.10**)

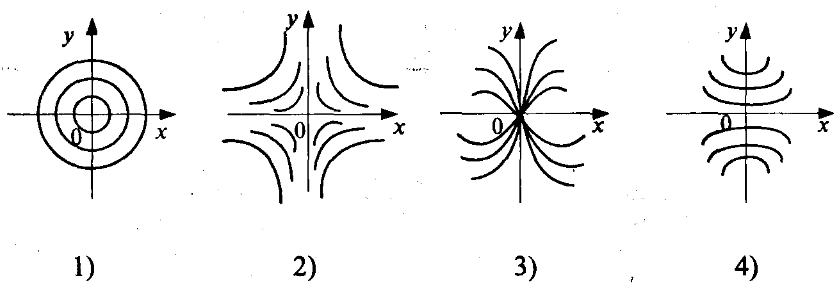


Рис. 15.10

4. Найти сумму частных производных функции $z = x^{2y}$ в точке (1; 1).

5. Найти длину вектора-градиента функции $z=x^3+\frac{9}{4}x^2\ln y$ в точке (2; 1).

6. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через вектор-градиент функции $z = x^2y^3 + 2x + y$ в точке (–1; 0).

7. Касательная к линии уровня функции $z = x^3y^4 + x^2y^3 + 2x$ в точке (1; 2) имеет угловой коэффициент $k = -\frac{a}{b}$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$.

(a и b — целые числа, а дробь $\frac{a}{b}$ — несократимая).

8. Найти координаты (x_0, y_0) критической точки функции

$$z = \frac{\ln x}{y} + x.$$

9. Функция $z = xy$:

1) имеет единственную точку максимума (0; 0);
2) имеет единственную точку минимума (0; 0);
3) имеет несколько точек экстремума;
4) не имеет точек экстремума;
5) имеет бесконечное множество точек экстремума.

10. Максимальное значение функции $z = 4 - x - x^2 - y - 4y^2$ равно: $\frac{a}{b}$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$ (a и b — целые числа, а дробь $\frac{a}{b}$ несократима).

11. В точке максимума функции градиент:

1) равен нулю;
2) достигает максимальной длины;
3) равен нулю или не существует;
4) не равен нулю и параллелен оси Oz;
5) может быть произвольным вектором.

12. Методом наименьших квадратов найти линейную зависимость $y = ax + b$ для функции, заданной следующей таблицей:

x_i	1	2	3	4
y_i	–1	0	2	3

Ответ: $a = \ldots$, $b = \ldots$.

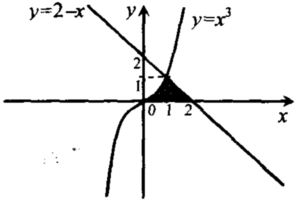
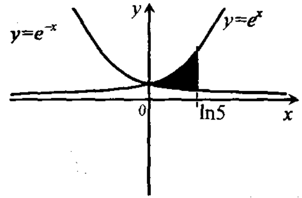
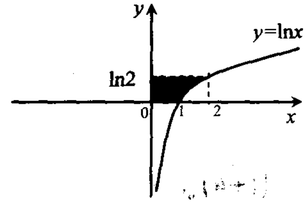
13. Производственная функция имеет вид $K(x,y)=10\sqrt{x}\sqrt[4]{y}$ (x — количество единиц первого ресурса, y — второго). Цена на единицу первого ресурса равна 1, на единицу второго — 2. Максимальное значение прибыли в этом случае составляет $\frac{a}{b}$, где $a=$ ..., $b=$ ... (a и b — целые числа, а дробь $\frac{a}{b}$ — несократима).

14. Производственная функция имеет вид $K(x,y)=100\sqrt{x}\sqrt[4]{y}$ (x — количество единиц первого ресурса, y — второго). Цена за единицу первого ресурса равна 8, за единицу второго — 4. На эти ресурсы может быть затрачена сумма не более 54 ден. ед. Чему равно оптимальное потребление ресурсов (x и y соответственно)?

Учебно-тренировочные тесты по дисциплине «Математический анализ», часть 2 (разделы IV – VI)

№	*Тест МА – 2.1*	*Тест МА – 2.2*	*Тест МА – 2.3*
1	Найти значение параметра a при котором функция $F(x)=\arcsin(ax)$, является первообразной для функции $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$	Указать функцию $f(x)$, для которой первообразной является функция $F(x)=(x^2+1)e^{x+5}$ ***Ответы***: 1) $f(x)=2xe^{x+5}$; 2) $f(x)=(x+1)^2e^{x+5}$; 3) $f(x)=2(x^2+5x)e^{x+4}$; 4) $f(x)=(x^2-2x+3)e^{x+5}$	Указать функцию $F(x)$, которая является первообразной для функции $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ ***Ответы***: 1) $F(x)=(x^2+1)+\ln(x^2+1)$; 2) $F(x)=\dfrac{1}{x+1}$; 3) $F(x)=\ln(x^2+1)$; 4) $F(x)=(x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)$
2	Найти $F(2)-F(1)$, если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)=2^{x-1}\cdot\ln 2$	Найти приращение первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$ на отрезке $[0;\pi]$	Найти ординату точки пересечения прямой $x=1$ с той первообразной для функции $f(x)=\dfrac{3}{x}$, которая проходит через точку $(e^2;7)$

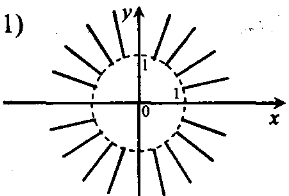
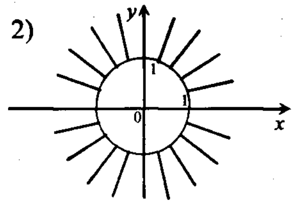
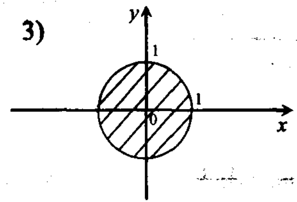
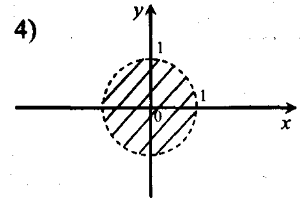
3	Указать замену переменной, которую необходимо выполнить в интеграле $\int x^5 e^{x^3} dx$ для его упрощения или сведения к табличному *Ответы*: 1) $t = x^5$; 2) $t = x^2 e^{x^3}$; 3) $t = x^3$; 4) $t = e^{x^3}$	Указать вид, который примет интеграл $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$ после замены переменной $t = \ln(x+1)$ *Ответы*: 1) $\int \frac{\ln t}{t} dt$; 2) $\int t dt$; 3) $\int \frac{dt}{t}$; 4) $\int \ln t dt$	Указать представление интеграла $\int x^2 \sin x\, dx$ в виде $\int u dv$, которое при интегрировании по частям приведет к табличному интегралу *Ответы*: 1) $u = \sin x,\ dv = x^2 dx$; 2) $u = x \sin x,\ dv = x\, dx$; 3) $u = x^2,\ dv = \sin x\, dx$; 4) $u = x,\ dv = x \sin x\, dx$
4	Найти значение параметра a, при котором верно равенство:		
	$\int \frac{12dx}{4x^2 - 1} = a \ln\left\|\frac{x-0,5}{x+0,5}\right\| + C$	$\int 8xe^{x^2+1} dx = ae^{x^2+1} + C$	$\int \frac{dx}{6\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{a} \ln\left\|2x + \sqrt{4x^2+1}\right\| + C$
5	Вычислить определенный интеграл:		
	$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos x^2 dx$	$\int_0^{\sqrt{e-1}} x \ln(x^2+1) dx$	$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$

6	Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке:		
			
7	Найти значение параметра a, при котором:		
	объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox заштрихованной фигуры (см. задачу 6), равен $V_x = \dfrac{a\pi}{21}$	площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $y=\sqrt{x}$ при $x\in[0;12]$, равна $S_x = a\pi$	объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy заштрихованной фигуры (см. задачу 6), равен $V_y = a\pi$
8	Найти значения параметра a, при которых сходится интеграл:		
	$\int_1^{\infty} e^{ax}dx$	$\int_0^1 \dfrac{dx}{x^{a+1}}$	$\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{a+1}}$
	Ответы: 1) при всех $a>0$; 2) при всех $a<0$; 3) при всех a; 4) ни при каких a		
9	Указать дифференциальные уравнения первого порядка:		
	линейные	однородные	с разделяющимися переменными
	Ответы: 1) $y' = \dfrac{2y+x^2}{3x+7}$; 2) $e^{x+y}y' = \dfrac{x}{y}$; 3) $y' = \dfrac{xy}{2x^2+3y^2}$; 4) $y' = \dfrac{y}{x+5}$		

10	Найти значение параметра a, при котором функция:		
	$y = ae^{2x}$ является решением уравнения $y'' - y' = e^{2x}$	$y = a\cos(x+5)$ является решением уравнения $y' = 2\sin(x+5)$	$y = ax\ln x + ax$ является решением уравнения $y'' = \dfrac{1}{2x}$
11	Найти ординату точки пересечения прямой $x = 2$ с интегральной кривой уравнения $y' - 2x = 0$, проходящей через точку $(1;\,3)$	Найти $f(3)$, если $y = f(x)$ – частное решение уравнения $y'' - 2x = 0$, удовлетворяющее условиям $f(1) = 1$, $f(0) = 0$	Найти $f(1)$, если $y = f(x)$ – решение уравнения $2xy' = 0$, удовлетворяющее условию $f(e) = 1$
12	Исследовать на сходимость ряды:		
	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+5}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+5}}$	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2+2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1)}{n^2+2}$	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^5+3}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{n^5+3}}$
	Ответы: 1) оба ряда сходятся; 2) ряд (1) сходится, ряд (2) расходится; 3) оба ряда расходятся; 4) ряд (1) расходится, ряд (2) сходится		
13	Указать вид сходимости рядов:		
	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3+3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot n^2}{n^3+3}$	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{n^5+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^5+1}}$	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1)}{2n^2+3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+3)}$
	Ответы: 1) оба ряда сходятся абсолютно; 2) ряд (1) сходится абсолютно, ряд (2) – условно; 3) оба ряда сходятся условно; 4) ряд (1) сходится условно, ряд (2) – абсолютно		

14	Указать ряды, для которых не выполнено необходимое условие сходимости	Указать ряды, исследование сходимости которых по признаку Даламбера приводит к однозначному ответу	Указать ряды, исследование сходимости которых по предельному признаку сравнения с помощью гармонического ряда приводит к однозначному ответу
	Ответы: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+3}$		
15	Найти длину интервала сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n$	Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{2^n}(x-3)^n$	Найти длину интервала сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^n \cdot x^{2n}$
16	Найти наибольшее целое значение x из области сходимости степенного ряда:		
	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n+2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2+2n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+2}$
17	Вычислить третий член разложения функции:		
	$f(x)=(1+x)^3$ в ряд Маклорена в точке $x=0,5$	$f(x)=e^x$ в ряд Маклорена в точке $x=0,5$	$f(x)=\ln x$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ в точке $x=0,7$
18	Указать рисунок, на котором изображена область определения функции:		
	$z=\sqrt[4]{x^2+y^2-1}$	$z=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$	$z=\arcsin\left(x^2+y^2\right)$

Ответы:

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Ответы:
1)  2)  3)  4) </td></tr>
<tr><td>19</td><td>Найти критические точки функции $z = 5x^3 + 4 - 2y^3 + 6y$</td><td>Найти точки экстремума функции $z = x^3 - 3x - 3y^2 + 6y$</td><td>Найти точки условного экстремума функции $z = 2x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 6y$ при $x + y = 0$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Ответы: 1) $(0;0)$; 2) $(0;1)$; 3) $(0;-1)$; 4) $(1;1)$; 5) $(-1;1)$; 6) $(1;-1)$; 7) $(1;0)$; 8) $(-1;0)$</td></tr>
<tr><td>20</td><td>Найти значение второй частной производной z''_x функции $z = xe^{xy}$ в точке $(0;2)$</td><td>Найти значение частной производной z'_y функции $z = y^{x^2}$ в точке $(1;2)$</td><td>Найти значение функции $z' = 4y^2 + 4 - x^2 + 3$ в критической точке</td></tr>
</table>

Итоговые контрольные задания по дисциплине «Математический анализ», часть 2 (разделы IV–VI)

№	*Вариант МА—2.1*	*Вариант МА—2.2*	*Вариант МА—2.3*	*Вариант МА—2.4*	*Вариант МА—2.5*
	Найти неопределенный интеграл				
1	$\int (x+3)e^{-2x}dx$	$\int \frac{dx}{x(\ln x+3)}$	$\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^3}dx$	$\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$	$\int \frac{e^x}{e^{2x}+9}dx$
	Вычислить определенный интеграл				
2	$\int_0^1 \frac{x^2-x+1}{1+x^2}dx$	$\int_0^1 (2-x)e^{-x}dx$	$\int_6^9 \frac{dx}{x^2-7x+10}$	$\int_0^3 (3x^2+1)\ln(x^2+1)dx$	$\int_2^5 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$
	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:			Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:	
3	кривой $y=\ln x$, касательной к ней в точке $x=e$ и осью Ox	$y=x^2+1$, $y=x$, $y=2$, $x=0$	$y=(x-4)^2$, $y=x^2$, $y=1$	$y=xe^x$, $x=1$, $y=0$, вокруг оси Ox	$xy=6$, $y=1$, $y=6$ вокруг оси Oy
	Решить дифференциальные уравнения:				
4	$dy-(2x-y+{}$ $+3)\,dx=0$	$y'=\frac{xy+y^2}{x^2}$	$2yy'-x^3\sqrt{5-x^4}=$ $=3y'$	$y'+2y=xe^{-x}$	$(x+3)dy-$ $-(x^2-5)e^{-2y}dx=0$
5	$y''+2y'-8y=1$	$y''-2y'=2+3e^x$	$y''+5y'+6y=x$	$y''+y'=\cos 2x$	$y''-2y'=e^x$

Окончание итоговых контрольных заданий

6	Исследовать сходимость ряда:				
	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n \cdot n^2}{n!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n+1}{n+3}\right)^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n^3+4}}{n^2+3n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(4n)^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n^2+5}$
7	Найти область сходимости степенного ряда:		Вычислить с точностью δ:		Разложить функцию $y=(x-\operatorname{tg}x)\cos x$ в ряд по степеням x
	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+7}{n^2-1}x^n$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n+3}x^n$	$\int\limits_0^1 x^2 e^{-x^2}dx;$ $\delta=0{,}01$	$\sqrt[3]{8{,}5},\ \delta=0{,}0001$	
8	Найти экстремумы функций двух переменных:				
	$z=2x^2+\frac{y^2}{x}-x$	$z=\sqrt{x}\sqrt[3]{y}-2x-4y$	$z=8x+10y-x^2-$ $-xy-y^2$	$z=8x^3-y^3-6xy$	$z=e^x(2x+y^2)$

Итоговый тест МА—2

1. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x) = 2x - 5$, удовлетворяющая условию $F(0) = 0$. Найти $F(5)$.

2. Пусть $f(x)$ — такая функция, что $F(x) = x^3 - 5x + 1$ является ее первообразной. Найти $f(2)$.

3. Найти все первообразные для функции $f(x) = 12e^{3x+2} + 24x^3$.

Ответ: $F(x) = ae^{3x+2} + bx^4 + dx + C$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$, $d = \ldots$ (a, b, d — целые числа).

4. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(2x-1)^2}$.

Ответ: $(ax + b)^{-1} + C$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$ (a, b — целые числа).

5. Найти неопределенный интеграл $\int (2-x)e^{-2x}dx$.

Ответ: $e^{-2x}(ax - 3)/b + C$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$ (a, b — целые числа).

6. Вычислить определенный интеграл $\int_2^{\sqrt{5}} 6x\sqrt{5-x^2}\,dx$.

7. Вычислить определенный интеграл $\int_1^e \sqrt{x}\ln x\,dx$.

Ответ: $(ae^{3/2} + 4)/b$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$ (a, b — целые числа).

8. Вычислить определенный интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+6x+5}$.

Ответ: $\frac{1}{a}\ln\frac{b}{7}$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$ (a, b — целые числа).

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4x - 3$, $y = 2x - 3$.

Ответ: a/b, где $a = \ldots$, $b = \ldots$ (a, b — целые числа, а дробь a/b несократима).

10. Найти площадь фигуры, ограниченной осями координат и линиями $y = x^2 + 1$, $x + y - 3 = 0$.

Ответ: a/b, где $a = \ldots$, $b = \ldots$ (a, b — целые числа, а дробь a/b несократима).

11. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$.

Ответ: $0{,}5\pi\ (e^a + b)$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$ (a, b — целые числа).

12. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x + y = 2$.

Ответ: $a\pi/b$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$ (a, b — целые числа, а дробь a/b несократима).

13. Пусть $y = y\,(x)$ — интегральная кривая дифференциального уравнения $(x + 1)y^2y' = 1$, проходящая через точку (0; 0). Найти $y\,(e^9 - 1)$.

14. Пусть $y = y(x)$ — решение дифференциального уравнения $e^{\,2x+y}dy + (3 - x^2e^{2x})\,dx = 0$, удовлетворяющее условию $y(0) = \ln 1{,}5$. Найти $y\,(1)$.

Ответ: $\ln\left(\dfrac{a}{2}e^{-2} + \dfrac{b}{3}\right)$, где $a = \ldots$, $b = \ldots$ (a, b — целые числа).

15. Найти целое значение параметра a, при котором интегральная кривая уравнения $y' + y = e^{5x}$, проходящая через точку (0; 7/6), проходит через точку ($\ln 2$, $a/6$).

16. Найти $y(\ln 2)$, где $y = y(x)$ — решение дифференциального уравнения $y'' = e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0{,}25$; $y'(0) = 0{,}5$.

17. Из данных рядов выбрать сходящиеся:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

18. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n^2+3}$ с помощью признака Даламбера. В ответе указать полученное значение l и выводы: в случае сходимости ряда — число 1; в случае расходимости ряда — число 2.

Ответ: $l = \ldots$. Вывод: …

19. Из данных рядов выбрать расходящиеся, условно сходящиеся, абсолютно сходящиеся:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{3n+7}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n^2+1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^2+3}$.

Ответ: расходящиеся … ; условно сходящиеся … ; абсолютно сходящиеся …

20. Перечислить ряды в порядке возрастания их радиусов сходимости:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n+4}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n+3}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n+4}$.

21. Дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{3n^3+1}x^n$. Выбрать верные высказывания:

1) ряд сходится при $x = 0{,}5$, при $x = 1$, при $x = -0{,}5$, при $x = -1$ и расходится при $x = 1{,}5$;

2) ряд сходится при $x = 1$ и расходится при $x = -0{,}5$, $x = 0{,}5$;

3) ряд сходится при $x = 0{,}5$, $x = -0{,}5$, $x = -1$ и расходится при $x = 1$, $x = 1{,}5$;

4) ряд сходится при $x = 0{,}5$, $x = -1$, $x = -1{,}5$ и расходится при $x = 1{,}5$, $x = -2$.

22. Вычислить $3\int_0^5 \ln(1+2x)\,dx$, взяв два первых члена разложения в ряд подынтегральной функции.

23. Найти наибольшее значение функции $z=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$ на круге единичного радиуса с центром в начале координат.

24. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 4y^2 - 2x$ в треугольнике, ограниченном осью ординат и прямыми $y = 2 - x$ и $y = -1$.

Раздел VII
Элементы высшей алгебры

Глава 16
Комплексные числа
Справочный материал

1. Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, i — мнимая единица. Число $x = \mathrm{Re}(z)$ называется *действительной частью* числа z, а число $y = \mathrm{Im}(z)$ — *мнимой частью* числа z.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ *равны*, если $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$.

$z = 0$, если $x = 0$, $y = 0$.

2. Арифметические операции над комплексными числами.

1. *Сложение (вычитание):*

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2). \qquad \textbf{(16.1)}$$

2. *Умножение:*

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \qquad \textbf{(16.2)}$$

В частности,

$$i^2 = -1. \qquad \textbf{(16.3)}$$

3. *Деление:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \qquad \textbf{(16.4)}$$

Все арифметические операции над комплексными числами проводятся по правилам действий над многочленами $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, считая $i^2 = -1$.

3. Тригонометрическая форма комплексного числа.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \textbf{(16.5)}$$

где:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \textbf{(16.6)}$$

— *модуль* комплексного числа; φ — *аргумент* комплексного числа ($\mathrm{Arg}\, z$) —

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad \textbf{(16.7)}$$

Из значений $\varphi = \operatorname{Arg} z$ выделяется главное значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \le \pi$.

4. Арифметические операции над комплексными числами в тригонометрической форме.

1. *Умножение:*

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]. \quad \textbf{(16.8)}$$

2. *Деление:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \quad \textbf{(16.9)}$$

3. *Возведение в степень. Формула Муавра:*

$$z^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad \textbf{(16.10)}$$

n — целое число.

4. *Извлечение корня:*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad \textbf{(16.11)}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

5. Показательная форма комплексного числа.

$$z = re^{i\varphi}, \quad \textbf{(16.12)}$$

где $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \quad \textbf{(16.13)}$$

16.1. Даны комплексные числа $z_1 = 15 + 8i$, $z_2 = 4 - 3i$.

Найти: *а*) $z_1 \pm z_2$; *б*) $z_1 z_2$; *в*) z_1/z_2.

Решение:

а) $z_1 + z_2 = (15+8i) + (4-3i) = 19 + 5i$;

$z_1 - z_2 = (15+8i) - (4-3i) = 11 + 11i$;

б) $z_1 z_2 = (15+8i)(4-3i) = 60 + 32i - 45i - 24i^2 = 84 - 13i$ (ибо $i^2 = -1$).

в) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{15+8i}{4-3i} = \frac{(15+8i)(4+3i)}{16-9i^2} = \frac{60+32i+45i+24i^2}{25} = \frac{36+77i}{25} = 1{,}44 + 3{,}08i.$$ ▶

16.2. Комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$ представить в тригонометрической форме и найти:

а) $z_1 z_2$; *б*) $\dfrac{z_1}{z_2}$; *в*) z_1^{28}; *г*) $\sqrt[3]{z_2}$.

Р е ш е н и е:

а) По формуле **(16.6)** найдем модуль комплексного числа z_1:

$r_1=|z_1|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, а из соотношений **(16.7)** $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\varphi=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ получим аргумент числа z_1 (берем его главное значение):

$\varphi_1=\arg z_1=-\dfrac{\pi}{4}$, т.е. $z_1=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

Аналогично $r_2=|z_2|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$; $\cos\varphi_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi_2=\dfrac{1}{2}$, т.е. $\varphi_2=\arg z_2=\dfrac{5\pi}{6}$ и $z_2=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Теперь по формуле **(16.8)**:

$$z_1z_2=\sqrt{2}\cdot 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

б) По формуле **(16.9)**:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{6}-i\sin\frac{13\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-i\right).$$

в) По формуле Муавра **(16.10)**:

$$z_1^{28}=(1-i)^{28}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{28}=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{28}\left[\cos\left(28\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)+i\sin\left(28\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]=$$

$$=16384\left[\cos(-7\pi)+i\sin(-7\pi)\right]=16384(-1+0i)=-16384.$$

г) По формуле **(16.11)**:

$$\sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{3}\right),$$

$k = 0, 1, 2$, откуда получаем три значения корня:

при $k = 0$ $\left(\sqrt[3]{z_2}\right)_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{18} + i\sin\frac{5\pi}{18}\right)$;

при $k = 1$ $\left(\sqrt[3]{z_2}\right)_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{18} + i\sin\frac{17\pi}{18}\right)$;

при $k = 2$ $\left(\sqrt[3]{z_2}\right)_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{18} + i\sin\frac{29\pi}{18}\right)$. ▶

16.3. Комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$ представить в показательной форме.

Р е ш е н и е. В задаче **16.2** было получено:

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right];$$

$$z_2 = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Следовательно, по формуле **(16.12)**

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},\ z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}. \blacktriangleright$$

16.4. Решить уравнение:

а) $x^2 + 9 = 0$; *б)* $x^2 - x + 1 = 0$; *в)* $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$; *г)* $x^6 - 1 = 0$.

Р е ш е н и е:

а) Перепишем уравнение в виде $x^2 = -9$, откуда $x_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$.

б) По формуле корней квадратного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

в) Полагая $x^2 = y$, получим уравнение

$$y^2 - 6y + 25 = 0,\ \text{откуда}\ y_{1,2} = 3 \pm \sqrt{-16} = 3 \pm 4i.$$

Теперь $x^2 = 3 + 4i$ и $x^2 = 3 - 4i$.

Первый способ. Решим первое уравнение. Приведем комплексное число $3 + 4i$ к тригонометрическому виду. Получим (аналогично **16.2**):

$$3 + 4i = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \text{где}\ \cos\varphi = \frac{3}{5},\ \sin\varphi = \frac{4}{5}.$$

Тогда $x^2 = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и по формуле **(16.11)**

$$x_{1,2} = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right), \quad k = 0,1.$$

При $k = 0$, $x_1 = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}i\right) = 2 + i,$

где учли, что

$$\cos\frac{\varphi}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

При $k = 1$ $x_2 = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{2}\right) =$

$$= \sqrt{5}\left(-\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = -2 - i.$$

Аналогично решением уравнения $x^2 = 3 - 4i$ будут $x_3 = 2 - i$ и $x_4 = -2 + i$.

Второй способ. Решим уравнение $x^2 = 3 + 4i$. Пусть комплексное число $x = u + iv$, где u и v — *действительные* числа. Тогда $(u + iv)^2 = 3 + 4i$ или $(u^2 - v^2) + 2uvi = 3 + 4i.$

Из условия равенства комплексных чисел получим систему:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 3, \\ 2uv = 4, \end{cases}$$

решая которую методом подстановки найдем: $\begin{cases} u_1 = 2, \\ v_1 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} u_2 = -2, \\ v_2 = -1, \end{cases}$

откуда $x_1 = 2 + i,$ $x_2 = -2 - i.$

Аналогично решениями уравнения $x^2 = 3 - 4i$ будут числа $x_3 = 2 - i$, $x_4 = -2 + i.$

г) Перепишем уравнение в виде $x^6 = 1$ и по формуле **(16.11)** найдем шесть корней уравнения (при $k = 0, 1; 2, 3, 4, 5$):

$$x_1 = 1;\ x_{2,3} = \pm\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ x_4 = -1;\ x_{5,6} = \mp\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

16.5. Построить на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих условиям:

а) $|z| \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$; б) $2 \le |z-1+i| \le 3,\ \ \mathrm{Re}(z) \ge 2$.

Р е ш е н и е. а) Неравенству $|z| \le 2$ соответствует круг радиуса 2 с центром в начале координат, а неравенству $\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ — угол AOB (рис. 16.1). Искомое множество точек выделено штриховкой.

б) Если произвольное число z изображается на комплексной плоскости радиусом-вектором этой точки $\overrightarrow{Oz}$, то число $z - z_0$, где $z_0 = 1 - i$, изображается вектором $\overrightarrow{O'z}$, где $O'(1;-1)$, ибо $\overrightarrow{O'z} = \overrightarrow{Oz} - \overrightarrow{OO'}$ (рис. 16.2). Поэтому неравенству $2 \le |z-(1-i)| \le 3$ соответствует кольцо, ограниченное окружностями радиусов 2 и 3 с центром в точке $O'(1;-1)$, а неравенству $\mathrm{Re}(z) \ge 2$ — правая полуплоскость $x \ge 2$ (см. рис. 16.2). Искомое множество точек выделено штриховкой.

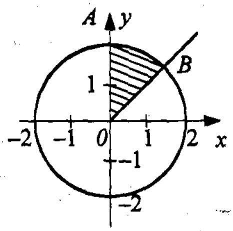


Рис. 16.1

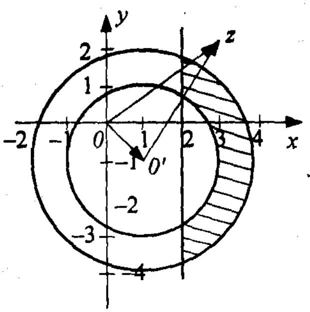


Рис. 16.2

Задачи для повторения

16.5. Вычислить: а) $\frac{(2+3i)(5-i)}{2+i}$; б) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{160}$.

16.7. Вычислить $(z_1 z_2)^{10}$ и $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$, если $z_1 = 2(\cos 15^\circ - i \sin 15^\circ)$ и $z_2 = \sin 30^\circ + i \cos 30^\circ$.

16.8. Решить уравнения: $z^2 - 8iz - 15 = 0$; б) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

16.9. Построить на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих условиям:

а) $\operatorname{Re}(z) \le 2$, $|\operatorname{Im}(z)| \le 1$; б) $1 \le |z+2i| \le 3$, $-2 \le \operatorname{Re}(z) \le 2{,}5$.

Контрольные задания
по главе 16 «Комплексные числа»

№	Вариант 16.1	Вариант 16.2	Вариант 16.3
1	Даны комплексные числа z_1 и z_2. Найти: *а)* z_1+z_2; *б)* z_1-z_2; *в)* z_1z_2; *г)* z_1/z_2:		
	$z_1=8+3i$, $z_2=8+6i$	$z_1=2-5i$, $z_2=6-8i$	$z_1=3+7i$, $z_2=-8+6i$
2	Комплексные числа z_1 и z_2 представить в тригонометрической форме. Найти: *а)* z_1z_2; *б)* z_1/z_2; *в)* z_1^{10}; *г)* $\sqrt[3]{z_1^2}$:		
	$z_1=-\sqrt{3}+i$, $z_2=1-i$	$z_1=1+i$, $z_2=\sqrt{3}-i$	$z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=-1+i$
3	Найти z:		
	$z=\dfrac{(1-i)^{100}}{(\sqrt{3}+i)^{50}}$	$z=\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{50}}{(1+i)^{100}}$	$z=\dfrac{(-1+i)^{50}}{(-\sqrt{3}+i)^{25}}$
4	Решить уравнения:		
	а) $3x^2+8=0$; *б)* $x^2-2x+2=0$; *в)* $x^4-10x^2+169=0$; *г)* $x^4+64=0$	*а)* $4x^2+5=0$; *б)* $x^2-6x+16=0$; *в)* $x^4-30x^2+289=0$; *г)* $x^4+4=0$	*а)* $2x^2+7=0$; *б)* $x^2+10x+28=0$; *в)* $x^4+6x^2+25=0$; *г)* $x^4+1=0$
5	Построить на комплексной плоскости множество точек:		
	а) $|z|=3$; *б)* $\arg z=\pi/3$; *в)* $|z|\le 4$; *г)* $|z-3|<5$	*а)* $|z|=7$; *б)* $\arg z=\pi/4$; *в)* $|z|\le 5$; *г)* $|z+4|\ge 6$	*а)* $|z|=1$; *б)* $\arg z=\pi/6$; *в)* $|z|>3$; *г)* $|z+1|\le 2$

Тест 16

1. Найти $|z|$, если $z = -\sqrt{3} + i$.

2. Найти (в градусах) $\varphi = \arg z$, если $z = -\sqrt{3} + i$, $-180^\circ < \varphi \le 180^\circ$.

3. Найти $|z|$, если $z = z_1 - z_2$, $z_1 = 13 - 5i$, $z_2 = 1 - 21i$.

4. Найти действительную часть $\mathrm{Re}(z)$, если $z = z_1 + z_2$,

$z_1 = 2(\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ)$, $z_2 = 3(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$.

5. Найти $|z|$, если $z = z_1 z_2$, $z_1 = 8 - 15i$, $z_2 = -6 + 8i$.

6. Найти (в градусах) $\varphi = \arg z$, если $z = z_1/z_2$

$z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$.

7. Найти $|z|$, если $z = (-8 + 6i)^6$.

8. Найти (в градусах) $\varphi = \arg z$, если $z = (1 - i\sqrt{3})^{20}$, $-180^\circ < \varphi \le 180^\circ$.

9. Из всех десяти значений $\sqrt[10]{-1}$ взято комплексное число, имеющее наибольший $\arg z = \varphi$ $(-180^\circ < \varphi \le 180^\circ)$. Найти это φ.

10. На рис. **16.1** выделены множества точек $z = x + iy$ комплексной плоскости.

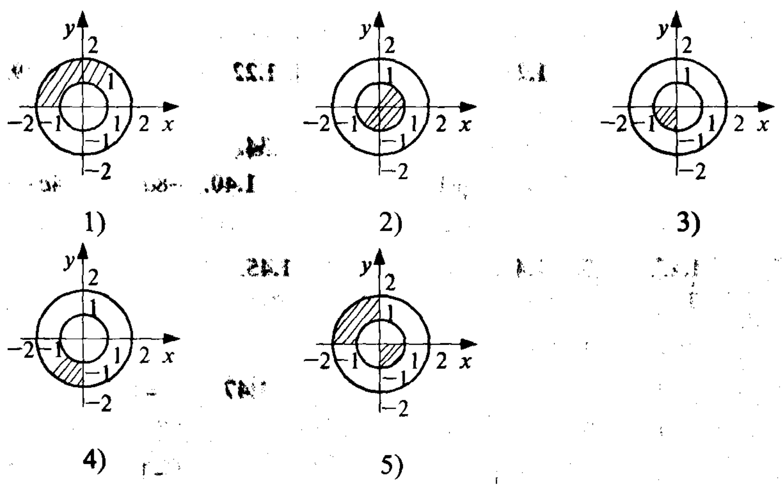


Рис.16.1

Для каких множеств точек одновременно выполняются условия $1 \le |z| \le 2$, $-\pi < \arg z \le -\pi/2$?

Ответы

Глава 1

1.6. $C=\begin{pmatrix} 1 & -18 \\ -21 & 1 \end{pmatrix}$. **1.7.** $C=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & -5 \\ 0 & -10 & -3 \end{pmatrix}$. **1.8.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

1.9. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$. **1.10.** $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$. **1.11.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1.12. $AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 13 \end{pmatrix}$. **1.13.** $BA=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **1.14.** $BA=A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.15. $AB=\begin{pmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. **1.16.** $B=\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$; $\operatorname{tr} B=-9$.

1.17. $B=\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$; $\operatorname{tr} B=242$. **1.18.** $\operatorname{tr} C=16$. **1.19.** $\operatorname{tr} C=\operatorname{tr} D=16$.

1.20. $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$. **1.21.** $\begin{pmatrix} -12 & -12 & 8 \\ -4 & -4 & 2 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$. **1.22.** Нет. **1.23.** Да. **1.29.** 11.

1.30. 13. **1.31.** $\sin(\alpha-\beta)$. **1.32.** 0. **1.33.** 1. **1.34.** 8. **1.37.** $x_1=0$, $x_2=1$. **1.38.** $x_1=2$, $x_2=3$. **1.39.** $8a+15b+12c-19d$. **1.40.** $-8a+2b+4c-14d$.

1.41. 8. **1.42.** –180. **1.43.** –10. **1.44.** –2. **1.45.** $A^{-1}=\begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.46. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.47.** $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.48. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & 1/3 \\ 7/3 & -4/3 & 1/3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **1.49.** $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1/4 & -9/4 & 3/2 \\ 1/4 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$.

1.50. $\begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -23/2 & -1 & 2 & 7/2 \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **1.54.** 3. **1.55.** 3. **1.56.** 2. **1.57.** 3. **1.58.** 3.

1.59. 3. **1.60.** 2. **1.61.** 3. **1.62.** Нет. **1.63.** Да. **1.64.** 3. **1.65.** 2.

1.71. *а*) $\begin{pmatrix} 5 & 12 & 6 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 4 \\ 13 & 13 & 12 & 9 \end{pmatrix}$; *б*) $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.72. C = (250; 180; 150); 1-й регион. **1.73.** $(680 \quad 2040 \quad 540 \quad 1020)'$.

1.74. 1) $S = (700 \ 1000 \ 900)'$; 2) $C = 63\,000$.

1.75. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ -200 & 0 & 200 & 200 & 200 & 200 \\ -300 & -100 & 100 & 300 & 300 & 300 \\ -400 & -200 & 0 & 200 & 400 & 400 \\ -500 & -300 & -100 & 100 & 300 & 500 \end{pmatrix}$. **1.76.** Через 1 год: 17 % — малый ремонт; 56 % — средний; 27 % — сложный ремонт. Через 2 года: 29,1 % — малый ремонт; 49,0 % — средний; 21,9 % — сложный ремонт. Через 3 года: 25,85 % — малый ремонт; 50,72 % — средний; 23,43 % — сложный ремонт. **1.77.** $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 21 & 13 \end{pmatrix}$; –30. **1.78.** $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 17 \\ 6 & 5 & 30 \end{pmatrix}$; 345; 41.

1.79. 203. **1.80.** $a \neq 1$; $a \neq 6$. **1.81.** $\begin{pmatrix} 2 & -1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -3/4 & -1/4 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. **1.82.** 3. **1.83.** 1.

1.84. –1. **1.85.** Через 1 год: а) 31%; б) 47%; в) 22%. Через 2 года: а) 34,7%; б) 35,9%; в) 29,4%. **Контрольные задания.** *Вариант 1.1.* **1.** $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** $C^{-1} = \dfrac{1}{345}\begin{pmatrix} 141 & -15 & -27 \\ -10 & 50 & -25 \\ -46 & -115 & 92 \end{pmatrix}$. **3.** 0. **4.** 2. **5.** 1) $\begin{pmatrix} 50 \\ 80 \end{pmatrix}$; 2) 410.

6. (0,68; 0,32). *Вариант 1.2.* **1.** $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 11 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $C^{-1} = \dfrac{1}{135}\begin{pmatrix} 34 & -11 & -3 \\ -22 & 23 & -6 \\ -3 & -3 & 36 \end{pmatrix}$. **3.** 0. **4.** 3. **5.** 1) $\begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$; 2) 320. **6.** (0,65; 0,35).

Вариант 1.3. **1.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** $C^{-1} = \dfrac{1}{324}\begin{pmatrix} 78 & -7 & -13 \\ -12 & 26 & 2 \\ -96 & -62 & 70 \end{pmatrix}$. **3.** 0. **4.** 2.

5. 1) $\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix}$; 2) 260. **6.** (0,62; 0,38). **Тест 1. 1.** 4; 6; 9. **2.** 10. **3.** $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$; $d = 32$. **4.** 81. **5.** 3. **6.** 9. **7.** 9. **8.** 2; 1; 3; 4. **9.** 2. **10.** 41.

Глава 2

2.6. (16; 7). **2.7.** (2; 3). **2.8.** (1; 3; 5). **2.9.** (3; 1; –1). **2.10.** (–3; 2; 1). **2.11.** (–1; 1; –2). **2.12.** (2; –1; 1). **2.13.** (2; –1; 1). **2.14.** (10; 5; 7). **2.15.** Система несовместна. **2.16.** (1; –1; 1). **2.17.** (–3; 2; 5). **2.18.** (0; 1; 2; –3). **2.19.** (1; 2; 3; 4).**2.20.** Система несовместна. **2.21.** (–2; 3; 5; 2). **2.22.** (9; 0; 8). **2.23.** (5; –2; 4). **2.24.** (2; –3; 1). **2.25.** (0; –3; 6).

2.26. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.27.** $\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$. **2.28.** $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.29.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. **230.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.31. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **2.32.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. **2.33.** 7 компьютеров, 10 столов, 13 стульев.**2.34.** Себестоимость костюма — 1,8 тыс. усл. ед., плаща — 2,6 тыс. усл. ед., куртки — 2 тыс. усл. ед. **2.37.** $x_1 = c/5 + 2$, $x_2 = 4c/5 + 2, x_3 = c$; (2; 2; 0), (1,5; 0; –2,5), (0; –6; –10). **2.38.** $x_1 = c$, $x_2 = 2c - 1, x_3 = -6$; (0,5; 0; –6), (0; –1; –6). **2.39.** $x_1 = -2c - 2$, $x_2 = c + 5$, $x_3 = c$; (0; 4; –1), (8; 0; –5), (–2; 5; 0). **2.40.** $x_1 = -c_1/4 - 9c_2/4 + 2$, $x_2 = -5c_1/4 - c_2/4$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$; (2; 0; 0; 0), (0; 0; $-2/11$; 10/11), (0;–2/9; 0; 8/9), (0; –10; 8; 0). **2.41.** $x_1 = 5c_1 - c_2 + 1$; $x_2 = -3c_1/2 - 2c_2 + 1$; $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$; (1; 1; 0; 0), (0; –1; 0; 1), (0,5; 0; 0; 0,5), (13/3; 0; 2/3; 0), (0; 1,3; –0,2; 0), (0; 0; $-2/23$; 13/23). **2.42.** $x_1 = 3c_1/2 - c_2/12 - 7/12$, $x_2 = c_1$, $x_3 = -5c_2/6 + 1/6$, $x_4 = c_2$; ($-7/12$; 0; 1/6; 0), (–0,6; 0; 0; 0,2), (0; 7/18; 1/6; 0), (0; 0,4; 0; 0,2), (0; 0; 6; –7). **2.43.** $x_1 = 2c_1 - 15c_2 + 17$, $x_2 = -c_1 + 3c_2 - 3$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$; (17; –3; 0; 0), (11; 0; –3; 0), (2; 0; 0; 1), (0; 5,5; –8,5; 0), (0; 2/5; 0; 17/15), (0; 0; 2/3; 11/9). **2.44.** $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 13$, $x_4 = -3c_1 - 2c_2 + 19$, $x_5 = -34$; (19/3; 0; 13; 0; –34), (0; 9,5; 13; 0; –34), (0; 0; 13; 19; –34). **2.45.** При $\alpha = -4$ система несовместна; при $\alpha \neq -4$ $x_1 = (\alpha+3)/(2\alpha+8)$, $x_2 = (\alpha+1)/(2\alpha+8)$, $x_3 = -1/(\alpha+4)$. **2.46.** При $\alpha = 0$ система несовместна; при $\alpha \neq 0$ $x_1 = 1/\alpha$, $x_2 = (2\alpha-3)/(8\alpha)$, $x_3 = (2\alpha+1)/(4\alpha)$. **2.47.** При $\alpha = 0$ $x_1 = 3-2c$, $x_2 = 2-5c$, $x_3 = c$; при $\alpha \neq 0$ $x_1 = 2{,}2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}4$. **2.48.** При $\alpha \neq 0$ система несовместна; при $\alpha = 0$ $x_1 = 2-5c$, $x_2 = -3c$, $x_3 = c$. **2.50.** (1; 2; 3). **2.51.** $x_1 = -2/11 + c_1/11 - 9c_2/11$, $x_2 = 10/11 - 5c_1/11 + c_2/11$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$. **2.52.** $x_1 = c$, $x_2 = 3c - 13$, $x_3 = -7$, $x_4 = 0$. **2.53.** Система несовместна. **2.55.** (8; –6; 1; 0), (–7; 5; 0; 1). **2.56.** (–9; –3; 11; 0; 0), (3; 1; 0; 11; 0), (–10; 4; 0; 0; 11). **2.57.** (–7; 5; 1; 0), (7; –5; 0; 2). **2.58.** (–9; 3; 4; 0; 0), (–3; 1; 0; 2; 0), (–2; 1; 0; 0; 1). **2.59.** Система имеет только нулевое решение. **2.60.** (0; 1; 3; 0; 0), (0; –2; 0; 0; 3). **2.62.** *а*) нет; *б*) да; *в*) да; *г*) нет. **2.63.** $X = (1000;\ 1000)'$, $\Delta X = (184;\ 132)'$. **2.64.** $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}55 & 0{,}1 \end{pmatrix}$. **2.65.** $A = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}4 \\ 0{,}14 & 0{,}1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1{,}29 & 0{,}57 \\ 0{,}2 & 1{,}2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 622{,}5 \\ 430 \end{pmatrix}$. **2.66.** $\Delta X = (23;\ 56;\ 27)'$, $\Delta Y = (3{,}6;\ -11{,}6;\ 18{,}6)'$. **2.67.** (1; 3; 2). **2.68.** (–1; 2; 1). **2.69.** (1; 0; –2). **2.70.** $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$. **2.71.** Куплено 5 акций первой группы, 10 — второй и 20 — третьей. **2.72.** $x_1 = \frac{c_1}{7} - \frac{2c_2}{7} + \frac{5}{7}$, $x_2 = -\frac{3c_2}{7} + \frac{13c_2}{7} - \frac{1}{7}$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, 6 базисных решений: $\left(\frac{5}{7}; -\frac{1}{7}; 0; 0\right)$, $\left(\frac{2}{3}; 0; -\frac{1}{3}; 0\right)$, $\left(\frac{9}{13}; 0; 0; \frac{1}{13}\right)$, (0; 2; –5; 0), (0; 0; –9; –2). **2.73.** $x_1 = 0{,}76 - 0{,}02c$, $x_2 = c$, $x_3 = 0{,}64 + 2{,}22c$, $x_4 = -0{,}48 - 0{,}54c$. **2.74.** При $a = -0{,}1$ система несовместна; при $a \neq -0{,}1$ $x_1 = \frac{-9}{10a+1}$, $x_2 = \frac{17a-1}{10a+1}$, $x_3 = \frac{11a+2}{10a+1}$. **2.75.** (7; 13; 5; 0), (–9; –16; 0; 5). **2.76.** Матрица продуктивна. **2.77.** а) $S = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}25 \\ \frac{5}{6} & \frac{25}{12} \end{pmatrix}$, б) $X = \begin{pmatrix} 4050 \\ 2750 \end{pmatrix}$, в) $\Delta Y = \begin{pmatrix} 450 \\ 300 \end{pmatrix}$.

Контрольные задания. *Вариант 2.1.* **1.** (–1; 3; 4). **2.** $X=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. **3.** (1; 5; 3; 2). **4.** $x_1=2c-3$, $x_2=6c-7$, $x_3=5c-7$, $x_4=c$; 4 базисных решения: (–3; –7; –7; 0), или (–0,2; 1,4; 0; 1,4), или $(-2/3; 0; -7/6; 7/6)$, или (0; 2; 0,5; 1,5). **5.** (4; 1; –2; 0), (–4; 0; 0; 1). **6.** $\Delta Y=(120; 10)'$, $\Delta X=(130; 180)'$. *Вариант 2.2.* **1.** (–2; –1; 2). **2.** $X=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **3.** (1; –3; 2; 1). **4.** $x_1=6c-11$, $x_2=-c-1$, $x_3=c$, $x_4=-3c+7$; 4 базисных решения: (0; –17/6; 11/6; 3/2), или (–17; 0; –1; 10), или (–11; –1; 0; 7), или (3; –10/3; 7/3; 0). **5.** (–3; –5; 1; 0), (–2; 1; 0; 1). **6.** $\Delta Y=(86; 10)'$, $\Delta X=(160; 230)'$. *Вариант 2.3.* **1.** (1; 2; –1). **2.** $X=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **3.** (–1; 2; 0; 4). **4.** $x_1=0{,}75c-1$, $x_2=-0{,}25c+2$, $x_3=c$, $x_4=4-2c$; 4 базисных решения: (–1; 2; 0; 4), или (0,5; 1,5; 2; 0), или (5; 0; 8; –12), или (0; 5/3; 4/3; 4/3). **5.** (11; 7; 1; 0), (0; –2; 0; 1). **6.** $\Delta Y=(44; 36)'$, $\Delta X=(250, 360)'$. **Тест 2.** **1.** $x_1=1$, $x_2=-1$, $\Delta_3=7$. **2.** $x_1=5$, $x_3=-2$, $a_{12}=10$. **3.** (–1; 0; 1). **4.** 3. **5.** 3; 5. **6.** 3. **7.** 3. **8.** 1; 4. **9.** $y_1=270$, $y_2=470$. **10.** $x_1=100$, $x_2=100$.

Глава 3

3.5. 120°. **3.6.** $\sqrt{17}$. **3.7.** 90°. **3.8.** $\sqrt{74}/2$; $\sqrt{2}/2$. **3.9.** 20. **3.10.** *а*) $\alpha=4$, $\beta=-1$; *б*) $\alpha=c, \beta=c+9$, где c — любое действительное число. **3.12.** $\vec{c}=2\vec{b}-2\vec{a}$. **3.13.** $\vec{p}=(4; 1)$; $\vec{p}=-3\vec{a}+5\vec{b}$. **3.14.** $\vec{a}=(3\vec{b}-\vec{c}+\vec{d})/2$. **3.15.** $|\vec{a}|=7$; $\cos\alpha=2/7$, $\cos\beta=3/7$, $\cos\gamma=-6/7$. **3.16.** 45° или 135°. **3.17.** $|M_1M_2|=9$; $\cos\alpha=-1/3$, $\cos\beta=2/3$; $\cos\gamma=-2/3$. **3.18.** 45°. **3.19.** $m=-6$. **3.20.** $4\sqrt{2}/3$. **3.21.** $5/\sqrt{89}$. **3.22.** $\vec{d}=-(3/2)\vec{i}+(3/4)\vec{j}+(3/2)\vec{k}$.

3.30. *а*) да; *б*) нет; *в*) нет. **3.31.** *а*) да; *б*) да; *в*) нет; *г*) да. **3.32.** Да. **3.33.** $a=0$. **3.37.** Да. **3.38.** При любом m. **3.39.** $m=5/3$. **3.40.** Линейно зависимы. **3.41.** Линейно независимы. **3.42.** *б*) $\vec{a}_3=(8/5; -1/5)$. **3.43.** Нет. **3.44.** Да. **3.45.** $x=(-4; -8; 8)$. **3.46.** $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **3.47.** $e_1=(5/13; -3/13)$, $e_2=(1/13; 2/13)$. **3.48.** $e_1=(1; 1/3; 0)$, $e_2=(-1/2; -1/3; 1/2)$, $e_3=(0; 1/3; 0)$.

3.49. $e_2^* = (2;\ 1;\ 0)$. **3.50.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **3.51.** 3450 усл. ед.; 80 усл. ед.

3.52. $(x, y) = -90$; $|x| = 2\sqrt{26}$, $|y| = \sqrt{105}$. **3.53.** $\arccos\sqrt{5/42} \approx 70^\circ$. **3.58.** Да. **3.59.** Нет. **3.60.** Нет. **3.61.** Да. **3.62.** Да. **3.63.** Да. **3.64.** $y = (2;\ 3)$. **3.65.** $y = (1;\ 3;\ 4)$.

3.66. $y = (-3;\ 3)$. **3.67.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. **3.68.** $A = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 7 \\ -4 & 14 & 8 \\ 5 & -15 & -8 \end{pmatrix}$. **3.69.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.70. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -9 & -24 \\ 1 & 7 & 0 \\ -1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$. **3.74.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$; $(4c_1;\ -c_1)$, $(c_2;\ -c_2)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. **3.75.** $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$; $(-2c_1;\ c_1)$, $(c_2;\ c_2)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. **3.76.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$; $(-2c_1;\ c_1;\ c_1)$, $(0;\ c_2;\ c_2)$, $(6c_3;\ -7c_3;\ 5c_3)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$. **3.77.** $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$; $(-2c_1;\ 0;\ c_1)$, $(0;\ c_2;\ 0)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. **3.78.** $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$; $(3c_1;\ -5c_1;\ c_1)$, $(4c_2;\ 0;\ c_2)$, $(2c_3;\ 0;\ -c_3)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$. **3.79.** $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -1$; $(0;\ c_1;\ 0)$, $(3c_2;\ 5c_2;\ -c_2)$, $(2c_3;\ 0;\ c_3)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$. **3.80.** $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$; $(-c_1;\ 0;\ c_1;\ 0)$, $(c_2;\ 0;\ 0;\ 0)$, $(0;\ c_3;\ 0;\ 0)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$. **3.81.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 2$; $(40c_1;\ -c_1;\ -8c_1;\ 9c_1)$, $(0;\ c_2;\ -2(c_2 + c_3);\ c_3)$; $(0;\ 2c_4;\ c_4;\ 2c_4)$, $c_1 \neq 0$, $c_2^2 + c_3^2 \neq 0$, $c_4 \neq 0$. **3.82.** $(-c_1;\ c_1)$, $(c_2;\ 2c_2)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. **3.83.** $(c_1;\ -2c_1)$, $(c_2;\ c_2)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. **3.84.** $(c_1;\ 2c_1;\ 2c_1)$, $(2c_2;\ c_2;\ -2c_2)$, $(2c_3;\ -2c_3;\ c_3)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$. **3.85.** $A^* = \mathrm{diag}(1;\ 5)$. **3.86.** Не приводится. **3.87.** $A^* = \mathrm{diag}(-6;\ 2;\ 3)$. **3.88.** Не приводится.

3.94. $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. **3.95.** $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

3.96. $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 3 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. **3.97.** 2. **3.98.** 2. **3.99.** 2. **3.100.** $L_1 = 19y_1^2 - 2y_2^2 - 10y_1y_2$. **3.101.** $L_1 = 22y_1^2 + 12y_2^2 + 3y_3^2 + 11y_1y_2 +$

$+17y_1y_3+8y_2y_3$. **3.102.** $L_1=5y_1^2+7y_2^2+4y_3^2+4y_1y_2+5y_1y_3-7y_2y_3$.

3.103. $L=2y_1^2-2y_2^2-3y_3^2$, если $y_1=x_1-x_2+x_3$, $y_2=x_2+x_3$, $y_3=x_3$.

3.104. $L=y_1^2-y_2^2+y_3^2$, если $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_2-x_3$, $y_3=x_3$.

3.105. $L=y_1^2-4y_2^2+y_3^2$, если $y_1=x_1$, $y_2=x_2$, $y_3=-2x_2+x_3$.

3.106. $L=y_1^2+2y_2^2+y_3^2$, если $y_1=x_1+x_2+x_3$, $y_2=x_2+x_3$, $y_3=x_3$.

3.107. Положительно определенная. **3.108.** Отрицательно определенная. **3.109.** Не является знакоопределенной. **3.110.** Не является знакоопределенной. **3.111.** Ни при каком m не является отрицательно определенной; при $m>4$ — положительно определенная. **3.112.** Ни при каком m не является знакоопределенной. **3.113.** Ни при каком m не является знакоопределенной. **3.114.** $m>1$. **3.115.** $m>0{,}5$. **3.116.** $m>1$. **3.117.** Таких значений m нет. **3.118.** Таких значений m нет. **3.119.** $m<-2$. **3.120.** Таких значений m нет. **3.121.** $m<-2{,}5$. **3.123.** 2 : 4 : 3. **3.124.** 140 : 146 : 220 : 121. **3.125.** 134 усл. ед., 201 усл. ед., 67 усл. ед. **3.126.** 198 усл. ед., 114 усл. ед., 90 усл. ед. **3.127.** 90 усл. ед., 114 усл. ед., 198 усл. ед. **3.128.** 134 усл. ед., 67 усл. ед., 201 усл. ед.

3.129. $\vec{c}=5\vec{a}+2\vec{b}$. **3.130.** $\vec{c}=(1;\ 0;\ -1)$ или $\vec{c}=(-1/3;\ 4/3;\ 1/3)$.

3.131. $|\vec{a}+\vec{b}|=15$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{593}$. **3.132.** $\overrightarrow{A_1A_2}=(0;\ -3;\ -6)$, $\varphi=\arccos(6/5\sqrt{26})\approx 76°$.

3.133. $\vec{d}=(-6;\ 3;\ 6)$. **3.134.** $\vec{c}=(2/3)\vec{a}-(1/3)\vec{b}$. **3.135.** Любое, кроме $t=3$.

3.136. $\vec{c}=(440;\ 190;\ 165;\ 180;\ 265;\ 260;\ 305)$. **3.137.** $\boldsymbol{d}=(2;\ -2;\ 1)$. **3.138.** $m=1$.

3.139. $(-17/25;\ -3/25;\ 9/25)$. **3.140.** $\boldsymbol{y}=(2;\ 1;\ -1;\ 1)$. **3.141.** $A^*=\begin{pmatrix}-1 & 18 & -3\\ -1 & 8 & 0\\ -2 & 10 & 2\end{pmatrix}$.

3.142. а) $\lambda_1=1$; $\lambda_2=-4$; $(c_1;\ 2c_1)$, $(-2c_2,\ c_2)$, где $c_1\neq 0$, $c_2\neq 0$; б) $\lambda_1=2$; $\lambda_{2,3}=3$; $(c_1;\ c_1;\ c_1)$, $(c_2+c_3+;\ c_2;\ c_3)$, где $c_1\neq 0$, $c_2^2+c_3^2\neq 0$. **3.143.** Не приводится.

3.144. $L=y_1^2+y_2^2+5y_3^2$, где $y_1=x_1+x_2+x_3$, $y_2=x_2+x_3$, $y_3=x_3$.

3.145. $L=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 1 & -5 & 1\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$; $\lambda_1=-2<0$, $\lambda_2=-3<0$, $\lambda_3=-6<0$,

т.е. квадратичная форма L — отрицательно определенная. **3.146.** $\Delta_1=-3<0$, $\Delta_2=14>0$, $\Delta_3=-36<0$, т.е. квадратичная форма L — отрицательно определенная. **3.147.** Квадратичная форма L знакоопределенная, если дискриминант $D=b^2-4ac<0$. **3.148.** 24 : 7 : 21.

Контрольные задания. *Вариант 3.1.* **1.** *а*) $\arccos\sqrt{12/37}\approx 55°$; *б*) $\sqrt{7}$.

2. Линейно зависимы. **3.** $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3$. **4.** $(-c_1;\ -c_1;\ c_1)$, $(c_3;\ -c_3;\ c_3)$,

$c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$; $A^* = \text{diag}(1; 1; 3)$. **5.** $L = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, если $y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$, $y_2 = 2x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$; $r(L) = 3$; не является знакоопределенной. **6.** 15 : 11 : 9. *Вариант 3.2.* **1.** *а*) $\arccos(6/\sqrt{39}) \approx 16°$; *б*) $-19/2\sqrt{7}$. **2.** Линейно независимы. **3.** $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 5\boldsymbol{a}_3$. **4.** $(-c_1; -c_1; c_1)$, $(c_3; -c_2; c_2)$, $c_1 \neq 0$, $c_2^2 + c_3^2 \neq 0$; $A^* = \text{diag}(1; 3; 3)$. **5.** $L = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, если $y_1 = 2x_1 + x_2 + 2x_3$, $y_2 = 2x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$; $r(L) = 3$; не является знакоопределенной. **6.** 45 : 29 : 23. *Вариант 3.3.* **1.** *а*) $\arccos(2/\sqrt{7}) \approx 41°$; *б*) $-9/2\sqrt{13}$. **2.** Линейно зависимы. **3.** $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$. **4.** $(c_1; c_1; c_1)$, $(c_3; -c_2; c_2)$, $c_1 \neq 0$, $c_2^2 + c_3^2 \neq 0$; $A^* = \text{diag}(3; 5; 5)$. **5.** $L = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, если $y_1 = 2x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 + 2x_3$, $y_3 = x_3$; $r(L) = 3$; не является знакоопределенной. **6.** 23 : 11 : 9. **Тест 3. 1.** 1 — *б*, 2 — *а*, 3 — *г*, 4 — *в*. **2.** 12. **3.** –1,5. **4.** 4,7. **5.** 3; 5. **6.** $\alpha = 2$; $\beta = -3$. **7.** 2; 4. **8.** $a = 0{,}4$; $b = -0{,}2$. **9.** $a = 1{,}5$; $b = -0{,}5$. **10.** 0,44. **11.** $y = (2; 3)$. **12.** $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$; $a = 2$, $b = 1$. **13.** $a = 2$; $b = 3$. **14.** 1. **15.** 47.

Глава 4

4.8. (–6; 0) и (10; 0). **4.9.** (8; 0) и (0; 8). **4.10.** (2; –1) и (3; 1). **4.11.** $D(-3; 1)$. **4.12.** (0; –3), (–4; 5) и (8; 1). **4.13.** 26/3. **4.14.** (2; 1). **4.15.** 16/3. **4.16.** $3x + y - 1 = 0$. **4.17.** $x^2/5 + y^2 = 1$. **4.18.** $y = x^2/4 - x + 2$. **4.19.** $y^2 = 8(x-2)$. **4.20.** $x^2 + y^2 = 4$. **4.21.** 400 км. **4.22.** $y = 60x + 5$; 1205. **4.23.** Лежат. **4.24.** $y = x - 6$. **4.25.** $y - 1 = 0$, $x + 4 = 0$. **4.26.** $3x + 7y - 2 = 0$. **4.27.** 90°. **4.28.** $3x + 7y - 27 = 0$, $7x - 3y - 5 = 0$. **4.29.** *а*) $2x + 5y - 13 = 0$; *б*) $5x - 2y + 11 = 0$. **4.30.** $3x + 4y - 16 = 0$, $5x + 3y - 1 = 0$, $2x - y - 7 = 0$. **4.31.** $3x - y + 5 = 0$. **4.32.** 49 кв. ед. **4.33.** $x/4 + y/10 = 1$ или $5x - 2y - 20 = 0$. **4.34.** $4x + 9y - 22 = 0$; $x + 5y = 0$; $3x + 4y = 0$. **4.35.** $x + 3y - 2 = 0$. **4.36.** $11x + 22y - 74 = 0$. **4.37.** $4x - 8y + 1 = 0$. **4.38.** *а*) AB: $5x + 4y - 7 = 0$, BC: $5x - 2y - 19 = 0$, AC: $y - 3 = 0$; *б*) $5x + y - 13 = 0$; *в*) $4x - 5y - 5 = 0$. **4.39.** $x + y - 5 = 0$ и $x - 4y - 20 = 0$. **4.40.** $3x - 4y + 10 = 0$; $4x + 3y + 5 = 0$. **4.41.** $5x + y - 9 = 0$, $x - 5y - 7 = 0$. **4.42.** $x - y + 2 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$, $2x + y - 8 = 0$. **4.43.** AB: $x + y + 1 = 0$; BC: $7x - 2y - 29 = 0$. AC: $2x + 3y + 1 = 0$. **4.44.** $x - 7y + 6 = 0$ и $7x + y + 4 = 0$. **4.45.** $6x + 7y + 25 = 0$. **4.46.** $A(4/3; 2/3)$, $B(6; 0)$, $C(2; -4)$. **4.55.** (1; –4/3); $R = 5/3$. **4.56.** (2; 1); $R = 5$. **4.57.** $(x-16)^2 + (y-8)^2 = 100$ и $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 100$. **4.58.** $(x-2)^2 +$

$+(y+1)^2=25$. **4.59.** $(x-3)^2+y^2=9$. **4.60.** $(x-2)^2+(y-4)^2=10$. **4.61.** $x+y+8=0$. **4.62.** $x^2+(y-4)^2=16$. **4.63.** $a=2$, $b=\sqrt{3}$; $F_1(-1;\ 0)$, $F_2(1;\ 0)$; $\varepsilon=0{,}5$. **4.64.** $\varepsilon=2\sqrt{2}/3$. **4.65.** $x^2/144+y^2/108=1$; $2c=12$. **4.66.** $x^2/16+y^2/4=1$; $\varepsilon=\sqrt{3}/2$; $z_1=4-\sqrt{3}$, $z_2=4+\sqrt{3}$. **4.67.** $(-15/4;\pm\sqrt{63}/4)$. **4.68.** $\varepsilon=\sqrt{0{,}4}$. **4.69.** $x^2/36+y^2/4=1$. **4.70.** $x^2/16-y^2/9=1$; $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$; $A_1(-4;\ 0)$, $A_2(4;\ 0)$, $B_1(0;\ -3)$, $B_2(0;\ 3)$; $\varepsilon=5/4$; асимптоты $y=\pm 3x/4$. **4.71.** $x^2/2-y^2/1=1$. **4.72.** $x^2/12-y^2/4=1$; $r_1=6\sqrt{3}$, $r_2=2\sqrt{3}$. **4.73.** $d=b$; $\varphi=2\mathrm{arctg}(b/a)$. **4.74.** $x^2/16-y^2/9=1$. **4.75.** $y+2=\pm\sqrt{2}\,x/2$. **4.76.** $y=8/x$ или $y=-8/x$. **4.77.** $x=3, y=2$; $(6;\ 5)$, $(0;\ -1)$. **4.78.** $x-y-4=0$ и $x+y+2=0$. **4.79.** $y^2=-9x/2$; $F(-9/8;\ 0)$; $x=9/8$. **4.80.** *а*) $y^2=9x$; *б*) $x^2=-y$. **4.81.** $y=x^2/2-2x+2$. **4.82.** $4\sqrt{17}$. **4.83.** $8x+10y-46=0$. **4.84.** $(x-p/2)^2+\ +y^2=p^2$; $(p/2;\pm p)$. **4.85.** $y=-x^2/2$; $y=0{,}5$. **4.86.** $y^2=px$. **4.93.** *а*) $3y+z=0$; *б*) $x+2z=0$. **4.94.** $y+4=0$. **4.95.** $x/1+y/(-1)+z/2=1$ или $2x-2y+z-2=0$. **4.96.** $3x+2y-z-5=0$. **4.97.** $x+3y=0$ и $3x-y=0$. **4.98.** $x-4y+5z+15=0$. **4.99.** $x+y-z+2=0$. **4.100.** $9x-y+7z-40=0$. **4.101.** $3x-4y-3z+4=0$. **4.102.** $3x+3y+z-8=0$. **4.103.** $(x+1)/1=(y-1)/(-3)=(z+3)/4$. **4.104.** $(x-2)/1=(y+1)/4=(z+1)/0$. **4.105.** $(x-1)/\sqrt{2}=(y+5)/1=(z-3)/(-1)$. **4.106.** $(x-1)/(-2)=(y+3)/4=$ $=(z-5)/5$. **4.107.** $(x-3)/5=(y+2)/3=(z-4)/(-7)$. **4.108.** $(5;\ -1;\ 0)$. **4.109.** $(-1/2;\ -1/2;\ 2)$. **4.110.** $\sqrt{82}$. **4.111.** $x^2/5+y^2/1=1$. **4.112.** $x-3y-11=0$. **4.113.** $(2;\ 6)$. **4.114.** 26. **4.115.** $(2;\ 4)$. **4.116.** $x+y-6=0$. **4.117.** $\sqrt{149}/32$. **4.118.** $5x-3y-2=0$, $7x+6y+4=0$, $\varphi=\mathrm{arctg}\,3$. **4.119.** $(2;\ 1)$ и $(5;\ 2)$ или $(0;\ 7)$ и $(3;\ 8)$. **4.120.** $(-3;\ 2)$; $R=5$. **4.121.** $(\pm 4\sqrt{6}/3;\ \pm 2\sqrt{3}/3)$. **4.122.** $(-11/13;\ 8\sqrt{3}/13)$; $(-11/13;\ -8\sqrt{3}/13)$. **4.123.** $(8/\sqrt{15};\ 1/\sqrt{15})$; $(\sqrt{15}-2)/\sqrt{5}$. **4.124.** $x^2/2{,}25-y^2/6{,}75=1$. **4.125.** $x^2=2y$. **4.126.** 2. **4.127.** $2x+3y-z-14=0$. **4.128.** $3y-8z+13=0$. **4.129.** $x-z=0$. **4.130.** $(x-3)/1=(y+2)/2=z/0$. **4.131.** $(1;\ -2;\ 3)$. **4.132.** $7x-8y-2z-23=0$. **4.133.** $(5;\ 0;\ 7)$. **Контрольные задания.** *Вариант 4.1.* **1.** Парабола $y^2=-4(x-3)$. **2.** *а*) m_a: $y-1=0$; h_a: $7x+24y-45=0$; *б*) $13x-9y+\ +70=0$. **3.** $(x+7/2)^2+(y-7/2)^2=25/2$. **4.** $7x-5y+6z-31=0$. **5.** $(x-5)/5=$ $=(y-2)/(-9)=(z-2)/6$. *Вариант 4.2.* **1.** Прямая $14x+4y+3=0$.

2. *а*) m_a: $22x+104y-11=0$; h_a: $4x+3y-99=0$; *б*) $11x+2y-26=0$. **3.** 3. **4.** $2x-19y+10z+45=0$. **5.** $(x+6)/1=(y-1)/(-1)=(z-3)/0$. *Вариант 4.3.* **1.** Окружность $3x^2+3y^2+32x+4y+60=0$ или $(x+16/3)^2+(y+2/3)^2=80/9$. **2.** *а*) m_a: $y-3=0$; h_a: $7x+24y-58=0$; *б*) $13x-9y+153=0$. **3.** $x^2/4+$ $+y^2/8=1$. **4.** $11x-2y+12z-13=0$. **5.** $(x-6)/4=(y-1)/(-4)=(z-2)/5$. **Тест 4. 1.** 2. **2.** $x_0=2, y_0=1$. **3.** $45°$. **4.** 1; 3; 5. **5.** $B=-7$, $C=37$. **6.** 7,2. **7.** $x_0=5$, $y_0=4$; $R=3$. **8.** $d_1=8$; $d_2=20$. **9.** 5.**10.** 1 — *б*, 2 — *а*, 3 — *в*, 4 — *г*. **11.** $B=-2$; $C=5$; $D=3$. **12.** $x_0=1$, $y_0=-2$, $z_0=3$. **Учебно-тренировочные тесты.** *Тест ЛА-1.* **1.** 2; 5. **2.** 24. **3.** 1. **4.** 2. **5.** $x_1=-3$; $x_2=x_3=2$. **6.** 1; 4. **7.** 1. **8.** 5. **9.** 2. **10.** –2. **11.** 1. **12.** 2. **13.** 3. **14.** 3. **15.** –6. **16.** 5. **17.** 3. **18.** 3. **19.** 3. **20.** 0,7. *Тест ЛА-2.* **1.** 3. **2.** 6. **3.** 6. **4.** 1. **5.** $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=0$. **6.** 2. **7.** –1. **8.** 6. **9.** 3. **10.** –1. **11.** –2. **12.** 3. **13.** 2. **14.** –2. **15.** –2. **16.** 5. **17.** 4. **18.** 4. **19.** 1. **20.** 4. *Тест ЛА-3.* **1.** 1. **2.** 2. **3.** 3. **4.** –3. **5.** $x_1=2$; $x_2=-1$; $x_3=0$. **6.** 1; 3. **7.** –3. **8.** 3; 4. **9.** 2. **10.** 6. **11.** –1. **12.** 2. **13.** 1. **14.** –8. **15.** 0,75. **16.** 3. **17.** 1. **18.** 1. **19.** 2. **20.** 12.

Глава 5

5.12. $x\in(-1;\,1)\cup(1;\,10]$. **5.13.** $x\in[-4;\,0)\cup(0;\,1)\cup(1;\,2)\cup(2;\,4]$. **5.14.** $x\in[-2;\,-\pi/2)\cup(-\pi/2;\,\pi/2)\cup(\pi/2;\,2]$. **5.15.** $x\in(0;\,1)\cup(1;\,2)$. **5.16.** $x\in(1;\,2)\cup(2;\,5\pi/2]$. **5.17.** $y\in[-\sqrt{29};\,\sqrt{29}]$. **5.18.** $y\in(0;\,1]$. **5.19.** $y\in[-1{,}5;\,1{,}5]$. **5.20.** $y\in[0{,}75;\,1{,}5]$. **5.21.** $y\in(-\infty;\,1]$. **5.22.** Нечетная. **5.23.** Четная. **5.24.** Четная. **5.25.** Общего вида. **5.26.** Нечетная. **5.27.** $2\pi/3$. **5.28.** $\pi/4$. **5.29.** π. **5.30.** Непериодическая. **5.31.** Непериодическая. **5.32.** $\frac{3}{x-1}$. **5.33.** $\frac{1}{x}$. **5.34.** $\frac{5(x-1)}{x+1}$. **5.35.** $-0{,}5\log_3 x$. **5.38.** 89,25 тыс. руб. **5.39.** 1,8. **5.40.** *а*) ≈ 11576,25 руб.; *б*) ≈ 8227 руб.
5.40. $x\in(-5;\,2)\cup(2;\,3)\cup(3;\,4)\cup(4;\,5)$. **5.41.** $x\in[-5;\,-4]$. **5.42.** $y\in[-5;\,5]$. **5.43.** $y\in[-\sqrt{2}/4;\sqrt{2}/4]$. **5.44.** Нечетная. **5.45.** Четная. **5.46.** $\pi/3$. **5.47.** x. **5.48.** $0{,}5\lg x$. **5.49.** а) 120 000 руб.; б) 8 лет. **Контрольные задания.** *Вариант 5.1.* **1.** $x\in(-5;\,5)$. **2.** $x\in\{1\}$. **3.** Четная. **4.** Общего вида. **5.** $y\in[-2;\,1]$. **6.** $\pi/4$.

Вариант 5.2. **1.** $x \in [0;\ 2) \cup (2;\ 3)$. **2.** $x \in \varnothing$. **3.** Нечетная. **4.** Общего вида. **5.** $y \in [-10;\ 10]$. **6.** 4π. *Вариант 5.3.* **1.** $x \in [-2;\ 4)$.
2. $x \in [-1;\ -\pi/5) \cup (-\pi/5;\ 0) \cup (0;\ \pi/5) \cup (\pi/5;\ 1]$. **3.** Общего вида. **4.** Нечетная. **5.** $y \in (0;\ 2]$. **6.** π. **Тест 5. 1.** 1; 4. **2.** 2; 3. **3.** 1; 4. **4.** 2; 3; 4. **5.** 1; 3. **6.** 1; 2; 5; 7. **7.** 4. **8.** 18. **9.** 72°. **10.** 2. **11.** 2. **12.** 11.

Глава 6

6.18. –3,5. **6.19.** 0. **6.20.** ∞. **6.21.** 0,5. **6.22.** –1, при $x \to +\infty$; 5, при $x \to -\infty$. **6.23.** –1. **6.24.** 320. **6.25.** 1/3, при $x \to +\infty$; –2, при $x \to -\infty$. **6.26.** 3. **6.27.** 1/3. **6.28.** 1,875. **6.29.** 0,2. **6.30.** ∞. **6.31.** 0, при $x \to +\infty$; $+\infty$, при $x \to -\infty$. **6.32.** –0,5. **6.33.** –0,25. **6.34.** ∞, при $x \to +\infty$, –1,5, при $x \to -\infty$. **6.35.** 1. **6.36.** 1. **6.37.** $\sqrt{2}$. **6.38.** –0,5. **6.39.** 1. **6.40.** 1. **6.41.** 2. **6.42.** 3. **6.43.** 0,8. **6.44.** –5. **6.47.** –1/3. **6.48.** 2,5. **6.49.** ∞. **6.50.** 0,375. **6.51.** 4. **6.52.** –4,5. **6.53.** $28\sqrt{7}$. **6.54.** 0. **6.55.** 1,5. **6.56.** 0,5. **6.57.** –6. **6.58.** $3\sqrt{2}/2$. **6.59.** 0. **6.60.** 0. **6.61.** –1/3. **6.62.** 0. **6.63.** –1. **6.64.** ∞. **6.65.** 4. **6.66.** 0. **6.67.** 0,6. **6.70.** ∞. **6.71.** –1. **6.72.** 0,5. **6.73.** 1/6. **6.74.** 0. **6.75.** 0,5. **6.76.** –9. **6.77.** ∞. **6.78.** ∞. **6.79.** 0. **6.80.** 4. **6.81.** 0. **6.82.** 1. **6.83.** –5. **6.84.** ∞. **6.85.** ∞. **6.86.** 0,5, при $x \to +\infty$, –0,5, при $x \to -\infty$. **6.87.** 0. **6.88.** 0. **6.89.** ∞. **6.90.** 0. **6.91.** 1,75. **6.92.** 0,25. **6.93.** $-\sqrt{3}/2$. **6.94.** $7\sqrt{2}/4$. **6.95.** 2,5, при $x \to +\infty$; ∞, при $x \to -\infty$. **6.96.** 0,25. **6.100.** e^4. **6.101.** e^{-14}. **6.102.** $e^{3,75}$. **6.103.** 1. **6.104.** e^{-6}. **6.105.** $e^{3,6}$. **6.106.** $e^{7,5}$. **6.107.** $e^{10/7}$. **6.108.** e^{10}. **6.109.** 1. **6.110.** e^{-3}. **6.111.** $1/e$. **6.112.** –1/15. **6.113.** 0,05. **6.114.** 0,125. **6.115.** –0,1. **6.116.** 0. **6.117.** ∞. **6.118.** 0. **6.119.** ∞, при $x \to +\infty$; 0, при $x \to -\infty$. **6.120.** 2 (сделать замену $y = e^{4x} - 1$). **6.124.** 2. **6.125.** 4/3. **6.126.** 6,4. **6.127.** ∞. **6.128.** 0. **6.129.** 1,5. **6.130.** 0,75. **6.131.** 8/7. **6.132.** 4/9. **6.133.** 0,125. **6.134.** –1/6. **6.135.** 0,3. **6.136.** 4/9. **6.137.** 1. **6.138.** 8/27. **6.139.** 1,25. **6.140.** –0,4. **6.141.** 7. **6.142.** 0. **6.143.** –1 (сделать замену $y = x - \dfrac{\pi}{2}$). **6.144.** 0,5. **6.148.** –1,5. **6.149.** 0,6. **6.150.** 0. **6.151.** ∞. **6.152.** 30. **6.153.** $\ln 5$. **6.154.** 6. **6.155.** 5/7. **6.156.** 4,5. **6.157.** 5. **6.158.** 64. **6.159.** 0,5. **6.160.** 0,25. **6.161.** –6. **6.162.** 9. **6.163.** 2. **6.164.** ±4. **6.165.** 2. **6.166.** 8. **6.167.** 0,125. **6.170.** $x = 0$ — разрыв I рода устранимый. **6.171.** Функция непрерывна. **6.172.** Функция непрерывна. **6.173.** $x = 2$ — разрыв II рода. **6.174.** $x = 2$ — разрыв I рода устранимый. **6.175.** –3. **6.176.** ∞. **6.177.** –2. **6.178.** 0, при $x \to +\infty$; –1, при $x \to -\infty$. **6.179.** ∞, при $x \to +\infty$; 0, при $x \to -\infty$. **6.180.** 1. **6.181.** –0,2, при $x \to +\infty$; 0,25, при $x \to -\infty$. **6.182.** 0,125. **6.183.** 0,625.

184. 0,375. **6.185.** 2/3. **6.186.** –0,75. **6.187.** 1/216. **6.188.** ∞, при $x \to -1+0$; при $x \to -1-0$. **6.189.** 1. **6.190.** 2. **6.191.** 1. **6.192.** 1,5. **6.193.** e^{27}. **6.194.** e^8. 195. 2/9. **6.196.** 1,75. **6.197.** 0,25. **6.198.** e^{-1}. **6.199.** 1. **6.200.** 0. **6.201.** –3. 202. 0,25. **6.203.** 18. **6.204.** 6. **6.205.** $x = -1$, $x = 1$ — точки разрыва I рода странимого и неустранимого); $x = 4$ — точка разрыва II рода. **Контрольные задания.** *Вариант 6.1.* **1.** –0,4. **2.** 1,2. **3.** 0,5. **4.** $e^{8/7}$. **5.** 1/24. **6.** 0,5. *а*) функция непрерывна, *б*) $x = -1$ — разрыв I рода неустранимый. *Вариант 6.2.* **1.** 2. **2.** –12. **3.** 0. **4.** e^3. **5.** 1/3. **6.** 0,5. **7.** *а*) функция непрерывна, *б*) $x = 1$ — разрыв I рода неустранимый. *Вариант 6.3.* **1.** 0,5. **2.** 0. **3.** ∞. **4.** e. **5.** 8. **6.** 1. **7.** функция непрерывна, *б*) $x = 2$ — разрыв I рода неустранимый. **Тест 6.** 3. **2.** 2; 3. **3.** 1; 3; 4. **4.** 3. **5.** 2; 4; 5. **6.** 100. **7.** 1, 5. **8.** 2. **9.** 2. **10.** 0. **11.** 10. **12.** 16.

Глава 7

21. $7x^6 - 10x^4 + 24x^{-4} + \sqrt[5]{x}$. **7.22.** $\frac{1}{\sqrt{x}} + 4\sin x + 2\cos x + \frac{1}{x\ln 3}$.

23. $5^x \ln 5 - \frac{7}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{1}{1+x^2}$. **7.24.** $e^x - \frac{4}{7\sqrt[7]{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}$.

25. $-x^2e^{-x}$. **7.26.** $9x^2 \ln x$. **7.27.** $x^2 \cos x$. **7.28.** $\frac{5}{(2x+3)^2}$.

29. $-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$. **7.30.** $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$. **7.31.** $\frac{1+x+\ln x}{(1+x)^2}$. **7.32.** $\frac{3-2\sin x}{(2-3\sin x)^2}$.

33. $\frac{x-(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)}$. **7.34.** $\frac{10(1+x^4)}{x(5+2x^3)}$. **7.35.** $-\frac{6x^3}{\sqrt{2-3x^4}}$.

36. $-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$. **7.37.** $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}$. **7.38.** $\frac{2}{\cos^6 2x}$. **7.39.** $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **7.40.** $\frac{4}{\sin 4x}$.

41. $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$. **7.42.** $\frac{1}{x\ln x}$. **7.43.** $\frac{1}{\sqrt{x^2-5\ln 2}}$. **7.44.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+6x-7}}$.

45. $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$. **7.46.** $-\frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$. **7.47.** $\frac{-\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x-1}}$. **7.48.** $e^{\sqrt{2x}}$.

49. $2\cos 2x e^{\sin 2x}$. **7.50.** $-3^{\arccos 2x}\frac{2\ln 3}{\sqrt{1-4x^2}}$. **7.51.** $\frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}$.

52. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cos e^{\sqrt{x}}$. **7.53.** $-\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x}$. **7.54.** $\frac{2e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-4x}}\left(1+e^{-2x}\right)}$. **7.55.** $\arcsin\frac{x}{2}$.

7.56. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\arcsin\sqrt{x}$. **7.57.** $\frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}$. **7.58.** $\frac{1}{\sqrt{7-x^2}}$. **7.59.** $\frac{1}{1+x^2}$.

7.60. $\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$. **7.61.** $2\sqrt{9-x^2}$. **7.62.** $-\frac{1}{2\sqrt{16-x^2}}$. **7.63.** $\arccos\frac{x}{3}$.

7.64. $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. **7.65.** $\frac{4x}{1+x^4}$. **7.66.** $e^x \operatorname{arctg} e^x$. **7.67.** $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

7.68. $\frac{3}{2}x^{\sqrt{\ln x}-1}\cdot\sqrt{\ln x}$. **7.69.** $-x^{-x}e^{-2x}(\ln x+3)$. **7.70.** $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\left(1+\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}\right)$.

7.71. $\frac{1}{1+\sin x}$. **7.72.** $\frac{1}{3x^2+2}$. **7.73.** $\frac{1}{2(x+3\sin 2x)}$.

7.74. $\frac{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{2^x\left(2\ln 2\cdot\sqrt{x}(1-\sqrt{x})\ln(1-\sqrt{x})-1\right)}$. **7.75.** $\frac{(x+5)^2}{6}$. **7.76.** -2.

7.77. $-\frac{y}{x}\frac{x\ln y+y}{x+\ln x}$. **7.78.** $\frac{\cos y-y\cos x}{\sin x+x\sin y}$. **7.79.** $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. **7.80.** $\frac{y}{x}\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$.

7.81. $(x+y)^2$. **7.82.** $\frac{y}{x-y}$. **7.83.** $\frac{y-x}{y+x}$. **7.84.** $\frac{y}{x}\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$. **7.85.** $-\frac{e^x-ye^{xy}}{e^y-xe^{xy}}$.

7.86. $\frac{3t^2}{2}$. **7.87.** -1. **7.88.** $\operatorname{tg} t$. **7.89.** -1. **7.90.** $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$. **7.91.** $-\operatorname{tg}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$.

7.92. $-\operatorname{tg} 3t$. **7.93.** -1. **7.94.** $6x-8$. **7.95.** $\frac{6x^4-9x^2+2}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$. **7.96.** $\frac{x+2}{(x+1)^2}$.

7.97. $18\cos 6x$. **7.98.** $-\frac{4}{(2x+3)^3}$. **7.99.** $-4\sqrt{t-t^2}$. **7.100.** $e^x(x+n)$.

7.101. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. **7.102.** $\left(5^x+(-1)^n 5^{-x}\right)\ln^n 5$. **7.103.** $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$.

7.104. $\frac{(-1)^n n!3^n}{(3x+5)^{n+1}}$. **7.105.** $\frac{(-1)^n}{t}$. **7.113.** $y-3x+19=0$; $3y+x+37=0$.
7.114. $y-x=0$; $y+x=0$. **7.115.** $y+8x+3=0$; $8y-x+24=0$. **7.116.** $2y-x+3=0$; $y+2x-11=0$. **7.117.** $y-x-2+\pi/2=0$; $y+x-\pi/2=0$. **7.118.** $y+x-1=0$; $y-x=0$. **7.119.** $y+8x-17=0$; $8y-x-6=0$. **7.120.** $4y-x+5=0$; $y+4x-3=0$. **7.121.** *a)* $\pi/4$; $y-x+1=0$;

б) $3\pi/4$; $y+x=0$. **7.122.** $y-3x-1=0$. **7.123.** $y-5x-3=0$; $y-5x+1=0$. **7.124.** $y-x+2=0$. **7.125.** *а*) $y-4x+14=0$, $y-4x+6=0$; *б*) $y-x+3=0$, $y-x-1=0$. **7.126.** *а*) $y+x-1=0$; *б*) $e^{-2}y+x+1=0$. **7.127.** $5y-x-4=0$. **7.128.** *а*) $\operatorname{arctg}(1/3)$; *б*) $\pi/4$; *в*) $\operatorname{arctg}(5\sqrt{2}/7)$. **7.129.** *а*) 3, 8; *б*) 0,05; –0,01. **7.130.** $v_0=9$; $a_0=-4$, $h_{\max}=10{,}125$. **7.137.** 45; 35. **7.138.** *а*) 95; 90; *б*) 70; 40. **7.139.** 80; 40. **7.140.** 2,06; 0,58. **7.141.** $y'(2)=5$; $T_{x=2}\approx 0{,}04$; $y'(7)=-20$. $T_{x=7}\approx -0{,}24$. **7.142.** $y'(20)=-0{,}1$; $T_{x=20}\approx -0{,}0167$; $y'(40)=0{,}3$; $T_{x=40}=0{,}0375$. **7.143.** *а*) 0,398; *б*) 0,602. **7.144.** *а*) $\approx -1{,}62$; *б*) $\approx -0{,}62$. **7.145.** 0,75. **7.146.** $x=4$; $E_1=1$, $E_2=0$. **7.147.** 1,2. **7.148.** $\approx -0{,}23$. **7.149.** $\approx -0{,}31$. **7.150.** *а*) –1,5; *б*) –0,75; *в*) –0,5; –6. **7.151.** *а*) (3; 6); *б*) (100; 225); *в*) $(60\sqrt{3/5};\ 60)$. **7.152.** *а*) 4; *б*) $-2/3$; 2; *в*) $\approx 1{,}5\%$. **7.153.** *а*) 5; *б*) $-0{,}1$; $\approx 0{,}17$; *в*) $\approx 4{,}5\%$. **7.155.** $\ln x(\ln x+2)$. **7.156.** $\dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{(1+2x^3)^2}}$. **7.157.** $-\sqrt{2}\sin x$.

7.158. $\dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}}$. **7.159.** $\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}(e^{2x}+1)}$. **7.160.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{16-x^2}}$;

7.161. $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **7.162.** $\dfrac{4x}{1+x^4}$, $|x|<1$; $-\dfrac{4x}{1+x^4}$, $|x|>1$. **7.163.** $\dfrac{e^{\sqrt{1-x}}\sin e^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$.

7.164. $\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **7.165.** $e^x\operatorname{arctg}e^x$. **7.166.** $\ln^2\sin\dfrac{x}{3}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$.

7.167. $x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$. **7.168.** $(\operatorname{tg}x)^{\sin x}\left(\cos x\ln\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{\cos x}\right)$. **7.169.** $\dfrac{\sqrt{1+e^{4x}}}{2e^{4x}}$. **7.170.** $x\sqrt{x^2-1}$; **7.171.** $-\dfrac{x}{y}$. **7.172.** $\dfrac{\sqrt{y}e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}e^{\sqrt{y}}}$. **7.173.** $\dfrac{\cos t-t\sin t}{\sin t+t\cos t}$.

7.174. $\dfrac{2t^2-1}{t}$. **7.175.** $2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)$. **7.176.** $-\dfrac{1}{a\cos^3 2t}$. **7.177.** $-4e^x\cos x$.

7.178. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}n\right)$. **7.179.** $2^n e^{2t}$. **7.181.** $5x+6y-13=0$; $6x-5y+21=0$. **7.182.** *а*) $4x+y-17=0$; $4x+y-1=0$; *б*) $x+y+1=0$; $x+y-7=0$. **7.183.** $x-y+2=0$; $5x-y-2=0$. **7.184.** $\approx 52{,}36$; $\approx -1{,}76$; $\approx 633{,}33$. **7.185.** $\approx 0{,}38$; $\approx 0{,}82$. **7.186.** а) e; *б*) $\approx -0{,}07$; $\approx 0{,}07$; *в*) $\approx 9{,}2\%$. **Контрольные задания.** *Вариант 7.1.* **1.** а) $3\ln\left(\sqrt{1+4x^2}+2x\right)+\dfrac{2(3x-1)}{\sqrt{1+4x^2}}$. б) $\dfrac{2}{1+x^2}$. **3.** e^{4t}.

4. $\frac{(-1)^n \cdot n!\, 2^n}{(2x-3)^{n+1}}$. **5.** $y-x-1=0$, $y-x-5=0$. **6.** (10; 20). *Вариант 7.2.*

1. а) $5\ln\left(\sqrt{1+9x^2}-3x\right)-\frac{3(5x-4)}{\sqrt{1+9x^2}}$. б) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **3.** $-e^{-4t}$. **4.** $\frac{n!3^n}{(1-3x)^{n+1}}$.

5. $y-2x-13=0$, $y-2x-5=0$. **6.** (5; 10). *Вариант 7.3.*

1. а) $-\ln\left(\sqrt{1+25x^2}+5x\right)+\frac{5(2-x)}{\sqrt{1+25x^2}}$. б) $-\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. **3.** $-e^{-6t}$.

4. $\frac{(-1)^n n!\, 5^n}{(5x+2)^{n+1}}$. **5.** $y+3x-4=0$. **6.** (10; 20). **Тест 7. 1.** 2; 3. **2.** 1, 3, 5. **3.** 0.

4. 1 — *б*, 2 — *в*, 3 — *а*. **5.** 6. **6.** 2. **7.** 0. **8.** –0,5. **9.** 0,15. **10.** 0,3. **11.** 1,25. **12.** –2; 9. **13.** 1. **14.** 90; –100. **15.** 5625.

Глава 8

8.4. Не противоречит, так как $y(0)$ не существует. **8.5.** На промежутке (0; 1) можно. **8.6.** Теорема Лагранжа может быть применена. **8.7.** $a=2$. **8.8.** Не может. **8.15.** 0. **8.16.** 1. **8.17.** 3.2. **8.18.** 1. **8.19.** 0 **8.20.** 2,5. **8.21.** –0,5. **8.22.** ∞. **8.23.** $\sqrt{2}$. **8.24.** 1. **8.25.** $\sqrt{3}/(2-6\ln 3)$. **8.26.** 2. **8.27.** 1. **8.28.** 1. **8.29.** 1. **8.30.** ∞. **8.31.** 1. **8.32.** $-1/\pi$. **8.33.** 1. **8.34.** ∞. **8.41.** $y_{\min}(-2)=-8/3$; $y_{\min}(1)=-13/12$; $y_{\max}(0)=0$: функция возрастает на $(-2;\ 0)$ и $(1;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-2)$ и $(0;\ 1)$. **8.42.** $y_{\min}(e)=e$; функция возрастает на $(e;+\infty)$, убывает на $(0;1)$ и $(1;e)$. **8.43.** $y_{\max}(3/2)=4e^{-3/4}$; функция возрастает на $(-\infty;\ 3/2)$, убывает на $(3/2;+\infty)$. **8.44.** $y_{\min}(-3/2)=-27/20$; функция возрастает на $(-3/2;-1)$ и $(-1;\infty)$, убывает на $(-\infty;\ -3/2)$. **8.45.** $y_{\min}(3/4)=-27/256$; функция возрастает на $(3/4;+\infty)$, убывает на $(-\infty;\ 3/4)$. **8.46.** Функция возрастает на всей числовой оси; экстремумов нет. **8.47.** $y_{\min}(-1/2)=2/e$; функция возрастает на $(-1/2;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-1)$ и $(-1;\ -1/2)$. **8.48.** $y_{\min}(1/2)=-1{,}25e^{-1/5}$; $y_{\max}(2)=5e^{-4/5}$; функция возрастает на $(1/2;2)$, убывает на $(-\infty;1/2)$ и $(2;+\infty)$. **8.49.** $y_{\min}(-1)=-e^{-3/2}$; $y_{\max}(1)=e^{3/2}$; функция возрастает на $(-1;\ 1)$, убывает на $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$. **8.50.** $y_{\min}(-1/3)=\sqrt{1-1/(3e)}$; функция возрастает на $(-1/3;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-1/3)$. **8.51.** Экстремумов нет; функция убывает на $(-\infty;\ 0)$ и возрастает на $(4;+\infty)$. **8.52.** $y_{\min}(e^2)=-e^2$; функция возрастает на $(e^2;+\infty)$, убывает на $(0;\ e^2)$. **8.53.** $y_{\max}(2\pi n)=\ln 3$; функция возрастает

на $(-2\pi/3+2\pi n;2\pi n)$, убывает на $(2\pi n;2\pi/3+2\pi n)$. **8.54.** $y_{\max}(e)=\operatorname{arctg}(1/e)$; функция возрастает на $(0;\ e)$, убывает на $(e;\ +\infty)$. **8.55.** $y_{\min}(1/\sqrt{e})=-1/e$; функция возрастает на $\left(1/\sqrt{e};\ +\infty\right)$, убывает на $\left(0;\ 1/\sqrt{e}\right)$. **8.56.** $y_{\min}(\sqrt{e})=2e$; функция возрастает на $(e;\ +\infty)$, убывает на $(0;\ e)$. **8.57.** $y_{\max}(1)=1/2$; функция возрастает на $(0;\ 1)$, убывает на $(1;\ +\infty)$. **8.58.** $y_{\min}\left(e^{2\pi n}\right)=-1$; $y_{\max}(e^{2\pi n+\pi})=1$; функция возрастает на $\left(e^{2\pi n};e^{2\pi n+\pi}\right)$, убывает на $\left(e^{2\pi n-\pi};e^{2\pi n}\right)$. **8.59.** $y_{\max}(e^2)=1/4$; функция возрастает на $(1;\ e^2)$, убывает на $(0;\ 1)$ и $(e^2;+\infty)$. **8.60.** $y_{\min}(2\pi n)=2$; функция возрастает на $(-\pi/6+\pi n;\ \pi n)$, убывает на $(\pi n;\ \pi/6+\pi n)$.
8.61. $f_{\text{наим}}(-1)=f_{\text{наим}}(2)=4$; $f_{\text{наиб}}(4)=16$. **8.62.** $f_{\text{наим}}(1/e)=-1/e$; $f_{\text{наиб}}(1)=0$. **8.63.** $f_{\text{наим}}(0)=0$; $f_{\text{наиб}}(1)=1/3$. **8.64.** $f_{\text{наим}}(\pi/4)=3/\sqrt{2}$; $f_{\text{наиб}}(\pi/12)=3\sin(\pi/12)+4\cos^2(\pi/12)$. **8.65.** $f_{\text{наим}}(-1)=0$; $f_{\text{наиб}}(0)=1$.
8.66. $f_{\text{наим}}(-1)=-1$; $f_{\text{наиб}}(0)=-1/2$. **8.67.** $f_{\text{наим}}(\pi/4)=2$; $f_{\text{наиб}}=$ $=\left(0{,}5\operatorname{arctg}(2/3)\right)=\sqrt{13}$. **8.68.** $f_{\text{наим}}\left(-\sqrt[4]{1/3}\right)=-\sqrt[4]{27}/2$; $f_{\text{наиб}}(1/2)=16/17$.
8.69. $f_{\text{наим}}(0)=0$; $f_{\text{наиб}}(1)=f_{\text{наиб}}(-1)=3$. **8.70.** $f_{\text{наим}}$ не существует; $f_{\text{наиб}}(1)=1{,}2$.
8.71. $f_{\text{наим}}(0)=2$; $f_{\text{наиб}}$ не существует. **8.72.** $f_{\text{наим}}(0)=0$; $f_{\text{наиб}}$ не существует.
8.73. $f_{\text{наим}}(1/2)=3/5$; $f_{\text{наиб}}$ не существует. **8.74.** Не существует ни наибольшего, ни наименьшего значения. **8.75.** $(2;\ 2;\ 1)$; $V=4$. **8.76.** $\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{V},\ \sqrt{2}\sqrt[4]{V},\ \sqrt{V}/2\right)$.

8.77. $R=\dfrac{\sqrt{3}(2+\pi)}{18\pi+\sqrt{3}(2+\pi)^2}p$; $a=\dfrac{6\pi}{18\pi+\sqrt{3}(2+\pi)^2}p$. **8.78.** $S=ah/4$.

8.82. $(0;\ 0)$ и $(\pm\sqrt{3/2};\ \mp 7\sqrt{3}/8\sqrt{2})$ — точки перегиба; функция выпукла вверх на $(-\infty;\ -\sqrt{3/2})$ и $(0;\ \sqrt{3/2})$ выпукла вниз на $(-\infty;\ 0)$ и $(3/2;\ +\infty)$.
8.83. $(0;\ 0)$ — точка перегиба; функция выпукла вверх на $(-\infty;\ -\sqrt{3/2})$ и $(0;\ \sqrt{3/2})$ выпукла вниз на $(-\sqrt{3/2};\ 0)$ и $(\sqrt{3/2};\ +\infty)$.
8.84. $(0;\ 0)$ и $(2;\ 0)$ — точки перегиба; функция выпукла вверх на $(-\infty;\ 0)$ и $(2;\ +\infty)$, выпукла вниз на $(0;\ 2)$. **8.85.** $(0;\ 1)$ и $(1;\ 0)$ — точки перегиба; функция выпукла вверх на $(0;\ 1)$, выпукла вниз на $(-\infty;\ 0)$ и $(1;\ +\infty)$. **8.86.** $(1;\ \pi/2)$ — точка перегиба; функция выпукла вверх на $(1;\ +\infty)$, выпукла вниз на $(-\infty;\ 1)$. **8.87.** $(0;\ 0)$, $(\pm 1;\ \pm e^{-1/2})$ и $(\pm\sqrt{6};\ \pm 6\sqrt{6}e^{-3})$ — точки перегиба; функция выпукла вверх на $(-\infty;\ -\sqrt{6})$, $(-1;\ 0)$ и $(1;\ \sqrt{6})$, выпукла вниз на $(-\sqrt{6};\ -1)$, $(0;\ 1)$ и $(\sqrt{6};\ +\infty)$. **8.88.** $\left(e^{5/6};\ 5/(6e^{5/3})\right)$ — точка перегиба;

функция выпукла вверх на $\left(-\infty;\, e^{5/6}\right)$, выпукла вниз на $\left(e^{5/6};\, +\infty\right)$. **8.89.** Точек перегиба нет; функция выпукла вверх на $(-\infty;\, 0)$ и $(0;\, +\infty)$. **8.90.** $\left(e^{-5/6};\, -5/6e^{-5/2}+1\right)$ — точка перегиба; функция выпукла вверх на $\left(0;\, e^{-5/6}\right)$, выпукла вниз на $\left(e^{-5/6};\, +\infty\right)$. **8.91.** $\left(-\sqrt{2};\, 2/\sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{2};\, 2/\sqrt{3}\right)$ — точки перегиба; функция выпукла вверх на $(-\infty;\, -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2};\, +\infty)$, выпукла вниз на $(-\sqrt{2};\, \sqrt{2})$. **8.92.** $(1;\, 49/36)$ и $(2;\, 44/9-(8/3)\ln 2)$ — точки перегиба; функция выпукла вверх на $(1;\, 2)$, выпукла вниз на $(0;\, 1)$ и $(2;\, +\infty)$. **8.93.** $(-3;\, 1)$ — точка перегиба; функция выпукла вверх на $(-\infty;\, -3)$, выпукла вниз на $(-3;\, -2)$ и $(-2;\, +\infty)$. **8.100.** $x=2$; $y=1/3$. **8.101.** $y=x$ — правосторонняя; $y=2/3$ — левосторонняя асимптоты. **8.102.** $x=0$; $y=0$ — правосторонняя асимптота. **8.103.** $y=0$ — двусторонняя асимптота. **8.104.** $x=\pm\sqrt{\pi}/2$. **8.105.** Асимптоты отсутствуют. **8.106.** $x=0$, $y=0$ — правосторонняя асимптота. **8.107.** $y=0$ — двусторонняя асимптота. **8.108.** Функция нечетная. $y=0$ — двусторонняя горизонтальная асимптота. $y_{\max}(1)=1$; $y_{\min}(-1)=-1$. Функция возрастает на $(-1;\, 1)$, убывает на $(-\infty;\, -1)$ и $(1;\, +\infty)$. $(0;\, 0)$, $(\pm\sqrt{3};\, \pm\sqrt{3}/2)$ — точки перегиба. Функция выпукла вверх на $(-\infty;\, -\sqrt{3})$ и $(0;\, \sqrt{3})$, выпукла вниз на $(-\sqrt{3};\, 0)$ и $(\sqrt{3};\, +\infty)$. $(0;\, 0)$ — точка пересечения графика с осями координат. **8.109.** Асимптот нет. $y_{\max}(2)=16$; $y_{\min}(0)=0$; $y_{\min}(4)=0$. Функция возрастает на $(0;\, 2)$ и $(4;\, +\infty)$; убывает на $(-\infty;\, 0)$ и $(2;\, 4)$. $(2\pm 2\sqrt{3}/3;\, 64/9)$ — точки перегиба. Функция выпукла вверх на $(2-2\sqrt{3}/3;\, 2+2\sqrt{3}/3)$, выпукла вниз на $(-\infty;\, -2\sqrt{3}/3)$ и $(2+2\sqrt{3}/3;\, +\infty)$. $(0;\, 0)$ и $(4;\, 0)$ — точки пересечения графика с осями координат. **8.110.** $x=-\sqrt[3]{2}$ — вертикальная асимптота; $y=0$ — двусторонняя горизонтальная асимптота. $y_{\max}(1)=2/3$. Функция возрастает на $\left(-\infty;\, -\sqrt[3]{2}\right)$ и $\left(-\sqrt[3]{2};\, 1\right)$, убывает на $(1;\, +\infty)$. $\left(\sqrt[3]{4},\, \sqrt[3]{4}/3\right)$ — точка перегиба. Функция выпукла вверх на $\left(-\sqrt[3]{2};\, \sqrt[3]{4}\right)$, выпукла вниз на $\left(-\infty;\, -\sqrt[3]{2}\right)$ и $\left(\sqrt[3]{4};\, +\infty\right)$. $(0;\, 0)$ — точка пересечения графика с осями координат. **8.111.** $y=0$ — правосторонняя горизонтальная асимптота. $y_{\max}(0)=1$. Функция возрастает на $(-\infty;\, 0)$, убывает на $(0;\, +\infty)$. $(1;\, 2e)$ — точка перегиба. Функция выпукла вверх на $(-\infty;\, 1)$, выпукла вниз на $(1;\, +\infty)$. $(-1;\, 0)$ и $(0;\, 1)$ — точки пересечения графика с осями координат. **8.112.** Функция нечетная. $y=0$ — двусторонняя горизонтальная асимптота. $y_{\max}(1)=1/\sqrt{e}$; $y_{\min}(-1)=-1/\sqrt{e}$.

Функция возрастает на $(-1;\ 1)$, убывает на $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$. $(0;\ 0)$, $\left(\pm\sqrt{3};\ \pm 3e^{-3/2}\right)$ — точки перегиба. Функция выпукла вверх на $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(0;\ \sqrt{3})$, выпукла вниз на $(-\sqrt{3};\ 0)$ и $(\sqrt{3};+\infty)$. $(0;0)$ — точка пересечения графика с осями координат. **8.113.** Функция определена на $(0;+\infty)$ $y=0$ — правосторонняя горизонтальная асимптота. $y_{\max}(e)=1/e$. Функция возрастает на $(0;\ e)$, убывает на $(e;+\infty)$. $\left(e^{3/2};\ (3/2)e^{-3/2}\right)$ — точка перегиба. Функция выпукла вверх на $(-\infty;-3)$ и $(0;\ 3)$, выпукла вниз на $(-3;\ 0)$ и $(3;+\infty)$. $(0;\ 0)$ — точка пересечения графика с осями координат. **8.114.** Функция нечетная. $y=1$ — правосторонняя горизонтальная асимптота; $y=-1$ — левосторонняя горизонтальная асимптота. Экстремумов нет, функция возрастает на всей числовой оси. $(0;\ 0)$ — точка перегиба. Функция выпукла вверх на $(0;+\infty)$, выпукла вниз на $(-\infty;0)$. $(0;0)$ — точка пересечения графика с осями координат. **8.115.** Функция определена на $(0;+\infty)$. $x=0$ — правосторонняя вертикальная асимптота. Экстремумов нет, функция убывает на $(0;+\infty)$. $(e^{1/3};\ \sqrt[3]{2/3})$ и $(e;\ 0)$ — точки перегиба. Функция выпукла вверх на $(e^{1/3};\ e)$, выпукла вниз на $(0;\ e^{1/3})$ и $(e;+\infty)$. $(e;0)$ — точка пересечения графика с осью абсцисс. **8.116.** $x=0$ — правосторонняя вертикальная асимптота. $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0$. $y=1$ — двусторонняя горизонтальная асимптота. Экстремумов нет. Функция убывает на $(-\infty;\ 0)$ и $(0;+\infty)$. $(-1/2;\ e^2)$ — точка перегиба. Функция выпукла вверх на $(-\infty;\ -1/2)$, выпукла вниз на $(-1/2;\ 0)$ и $(0;+\infty)$. **8.117.** $x=0$ — правосторонняя вертикальная асимптота. $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0$. $y=x$ — двусторонняя асимптота. $y_{\min}(1)=e$. Функция возрастает на $(-\infty;\ 0)$ и $(1;+\infty)$, убывает на $(0;\ 1)$. Функция выпукла вверх на $(-\infty;\ 0)$, выпукла вниз на $(0;+\infty)$. **8.118.** $x=0$ — вертикальная асимптота; $y=1$ — левосторонняя горизонтальная асимптота; $y=0$ — правосторонняя горизонтальная асимптота. Экстремумов нет. Функция возрастает на $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$. Точек перегиба нет. Функция выпукла вверх на $(0;+\infty)$, выпукла вниз на $(-\infty;0)$. **8.119.** $y_{\max}(\pi/6+2\pi n)=$ $=y_{\max}(5\pi/6+2\pi n)=5/4$. $y_{\min}(-\pi/2+2\pi n)=-1$; $y_{\min}(\pi/2+2\pi n)=1$. Функция возрастает на $(-\pi/2+2\pi n;\ \pi/6+2\pi n)$ и $(\pi/2+2\pi n;\ 5\pi/6+2\pi n)$; убывает на $(\pi/6+2\pi n;\ \pi/2+2\pi n)$. $X=\pi n+(-1)^n \arcsin\left((1+\sqrt{33})/8\right)$ — точки перегиба. **8.120.** Функция возрастает на всей числовой оси. $(0;\ 0)$ — точка перегиба. **8.121.** Функция возрастает на всей числовой оси. $(0;\ 0)$ — точка перегиба. **8.122.** $y_{\max}(5\pi/4+2\pi n)=-2$. $y_{\min}(\pi/4+2\pi n)=1/2$. Функция возрастает на $(\pi/4+2\pi n; 3\pi/4+2\pi n)$ и $(3\pi/4+2\pi n; 5\pi/4+2\pi n)$; убывает на $(-3\pi/4+2\pi n; -\pi/4+2\pi n)$ и $(-\pi/4+2\pi n; \pi/4+2\pi n)$. Функция выпукла вверх на $(-3\pi/4+2\pi n; \pi/4+2\pi n)$ и $(-\pi/4+2\pi n; \pi/4+2\pi n)$, выпукла вниз на $(\pi/4+2\pi n; 3\pi/4+2\pi n)$ и $(3\pi/4+2\pi n; 5\pi/4+2\pi n)$. **8.123.** Функция четная. $y = 0$ — двусторонняя горизонтальная асимптота. $y_{max}(0)=2$. Функция возрастает на $(-\infty; 0)$, убывает на $(0; +\infty)$. $(\pm 1; \sqrt{2})$ — точки перегиба. Функция выпукла вверх на $(-1; 1)$, выпукла вниз на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$. $(0; 2)$ — точка пересечения графика с осью ординат. **8.124.** Функция нечетная. $x=\pm 1$ — вертикальные асимптоты. $y = 0$ — двусторонняя горизонтальная асимптота. Экстремумов нет. Функция убывает на $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ и $(1; +\infty)$. $(0; 0)$ — точка перегиба. Функция выпукла вверх на $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$, выпукла вниз на $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$. $(0; 0)$ — точка пересечения графика с осями координат. **8.127.** 30. **8.128.** 2. **8.129.** 196. **8.130.** $4\log_2 \ln 2$. **8.131.** 90. **8.132.** 0. **8.133.** $76(\ln 1920-1)$. **8.134.** 4. **8.135.** 4. **8.136.** 4. **8.137.** 5. **8.138.** $p = 1$. **8.139.** $p=1-p_0$. **8.140.** На 5 единиц. Средние издержки увеличатся на 125/14. **8.141.** 1000. **8.142.** $[2; +\infty)$. **8.143.** 1 млн руб. **8.144.** $p_0/2$. **8.145.** 400. **8.146.** 245. **8.147.** 625. **8.148.** $33\frac{1}{3}$. **8.149.** $p>1/4$. **8.150.** а) нет; б) да. **8.151.** $x=0$. **8.152.** 17. **8.153.** $-\infty$. **8.154.** 0. **8.155.** 1. **8.156.** 0. **8.157.** $y_{max}(-1)=e^2$. Функция возрастает на $(-\infty; -1)$, убывает на $(-1; +\infty)$. **8.158.** $y_{min}(-7)=-14$; $y_{min}(1)=2$. Функция возрастает на $(-7; -3)$ и $(1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -7)$ и $(-3; 1)$. **8.159.** $y_{max}(1)=2$. Функция возрастает на $(1/e; 1)$, убывает на $(1; e)$. **8.160.** $y_{min}(1/\sqrt{e})=e^{-1/(2e)}$. Функция возрастает на $(1/\sqrt{e}; +\infty)$, убывает на $(0; \sqrt{e})$. **8.161.** $y_{max}(0)=\ln(\pi/4)$. Функция возрастает на $(-\infty; 0)$, убывает на $(0; +\infty)$. **8.162.** $y_{наиб}(2)=10$; $y_{наим}(1)=-5/2$. **8.163.** $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим}(0) = 0$. **8.164.** $y_{наиб}(1) = 1$, $y_{наим}$ не существует. **8.165.** Не существует ни наибольшего, ни наименьшего значения. **8.166.** $y(0) = 0$; $y(1) = 0$ — точки перегиба; функция выпукла вниз на $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$, выпукла вверх на $(0; 1)$. **8.167.** $y(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}e^{-3/2}$; $y(0)=0$; $y(\sqrt{3})=\sqrt{3}e^{-3/2}$ — точки перегиба; функция выпукла вверх на $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(0; \sqrt{3})$; выпукла вниз на $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$. **8.168.** $x=1/(e^2)$, $y-1$. **8.169.** $x=1$, $y=-x-1$. **8.170.** $y=0$. **8.171.** Функция четная. $y_{min}(-1)=y_{min}(1)=0$, $y_{max}(1)=1$. Функция возрастает на $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1)$ и $(0, 1)$, $y(\pm 1/\sqrt{3})=4/9$ — точки перегиба. Функция выпукла вверх на $(-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$, выпукла вниз на $(-\infty; -1/\sqrt{3})$ и

$(1/\sqrt{3};+\infty)$. **8.172.** $D(f)=[-1;\,1]$. Функция четная. $y_{\max}(0)=1$. Функция выпукла вверх на $[-1;\,1]$. **8.173.** $D(f)=(-\infty;\,0)$ и $(0;\,+\infty)$. $x=0$ — левосторонняя вертикальная асимптота, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$; $y=x-1$ — двусторонняя наклонная асмптота. $y_{\max}(-2)=-4/\sqrt{e}$; $y_{\min}(1)=-1/e$. Функция возрастает на $(-\infty;\,-2)$ и $(1;\,+\infty)$, убывает на $(-2;\,0)$ и $(0;\,1)$. $y\,(2/5)=(-8/5)e^{-5/2}$ — точка перегиба. Функция выпукла вверх на $(-\infty;\,0)$ и $(0;\,2/5)$, выпукла вниз на $(2/5;\,+\infty)$. **174.** $D(f)=[0;\,+\infty)$. $y_{\max}((3/4)^{12})=(3/4)^3-(3/4)^4\approx 0{,}105$. Функция возрастает на $(0;\,(3/4)^{12})$, убывает на $((3/4)^{12};\,+\infty)$; $y\,((81/32)^{12})=(81/32)^3-(81/32)^4\approx -24{,}83$ — точка перегиба. Функция выпукла вверх на $(0;\,(81/32)^{12})$, выпукла из $((81/32)^{12};\,+\infty)$. **Контрольные задания.** *Вариант 8.1.* **1.** $4/(1+8\ln 6{,}75)$. **2.** 1. **3.** Функция четная. $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=0$ — двусторонняя горизонтальная асимптота. Экстремумов нет. Функция возрастает на $(-\infty;\,0)$ и убывает на $(0;\,+\infty)$. Точек перегиба нет, функция выпукла вниз на $(-\infty;\,0)$ и $(0;\,+\infty)$. **4.** $y=\sqrt[3]{2}(x-1)$ — двусторонняя асимптота. $y_{\max}(0)=0$; $y_{\min}(-1)=-2$. Функция возрастает на $(-\infty;\,0)$ и $(2;\,+\infty)$. $(3;\,0)$ — точка перегиба. Функция выпукла вверх на $(3;\,+\infty)$ и выпукла вниз на $(-\infty;\,3)$. $(3;\,0)$ и $(0;\,0)$ — точки пересечения графика с осями координат. **5.** 37. *Вариант 8.2.* **1.** –6. **2.** e. **3.** Функция нечетная. $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=0$ — двусторонняя горизонтальная асимптота. Экстремумов нет. Функция убывает на $(-\infty;\,0)$ и на $(0;\,+\infty)$. Точек перегиба нет, функция выпукла вверх на $(-\infty;\,0)$ и выпукла вниз на $(0;\,+\infty)$. **4.** $y=x-1$ — двусторонняя асимптота. $y_{\max}(-2)=\sqrt[3]{4}$; $y_{\min}(0)=0$. Функция возрастает на $(-3;\,-2)$ и $(0;\,+\infty)$. $(-3;\,0)$ — точка перегиба. Функция выпукла вверх на $(-\infty;\,0)$ и выпукла вниз на $(-3;\,\infty)$. $(-3;\,0)$ и $(0;\,0)$ — точки пересечения графика с осями координат. **5.** 28. *Вариант 8.3.* **1.** 0. **2.** e. **3.** $x=0$ — правосторонняя вертикальная асимптота, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0$. $y=0$ — двусторонняя горизонтальная асимптота. $y_{\max}(-1/2)=4/e^2$. Функция возрастает на $(-\infty;\,-1/2)$, убывает на $(-1/2;\,0)$ и $(0;\,+\infty)$. $x=-1/2\pm\sqrt{3}/6$ — точки перегиба. Функция выпукла вверх на $(-1/2-\sqrt{3}/6;\,-1/2+\sqrt{3}/6)$; выпукла вниз на $(-\infty;\,-1/2-\sqrt{3}/6)$, $(-1/2+\sqrt{3}/6)$ и $(0;\,+\infty)$. **4.** $y=2x-1$ — двусторонняя асимптота. $y_{\max}(0)=0$; $y_{\min}(1)=-\sqrt[3]{4}$. Функция возрастает на $(-\infty;\,0)$ и $(1;\,+\infty)$. $(3/2;\,0)$ — точка перегиба. Функция выпукла вверх на $(3/2;\,+\infty)$ и выпукла вниз на $(-\infty;\,3/2)$. $(3/2;\,0)$ и $(0;\,0)$ — точки пересечения графика с осями координат. **5.** 156. **Тест 8. 1.** 3. **2.** 1. **3.** 1. **4.** 3. **5.** 2 **6.** 2. **7.** 2. **8.** 3. **9.** 3. **10.** 2. **11.** 2. **12.** $f_{\text{наиб.}}(2)=12$; $f_{\text{наим.}}(-1)=f_{\text{наим.}}(0)=0$. **13.** $a=20$; $b=30$. **14.** 1. **15.** $p=2{,}7$.

Глава 9

9.7. $\Delta y=1{,}712$; $dy=1{,}6$. **9.8.** $\Delta y=0{,}009001$; $dy=0{,}009$. **9.9.** $\Delta y=19/27$; $dy=1$.

9.10. $1/2700\approx 0{,}00037$. **9.11.** $\pi/45\approx 0{,}0698$. **9.12.** 0,01. **9.13.** $\dfrac{(49-x)dx}{\sqrt{49-x^2}}$.

9.14. $dx\big/(x^2-36)$. **9.15.** $2x\,dx\big/\sqrt{1-x^4}$. **9.16.** $(3x^2-6x+3)dx$.

9.17. $(4x^3-6x)dx$. **9.18.** $3\sin 2x\sin 4x\,dx$. **9.19.** $\operatorname{ctg}\sqrt{x}\,dx\big/(2\sqrt{x})$.

9.20. $-\operatorname{tg} x e^{-1/\cos x}dx\big/\cos x$. **9.21.** $-dx\big/(x^2+1)$. **9.22.** $-a^3dx\big/(x^2(a^2+x^2))$.

9.23. $(\ln x+1)dx$. **9.24.** $dx\Big/\left(2\sqrt{x(1-x)}\right)$. **9.25.** $(3x^2+1{,}5\sqrt{x})dx$.

9.26. $2x\,dx\big/(2+2x^2+x^4)$. **9.27.** $(4x\sqrt{x}\sin x+x^2\cos\sqrt{x})dx\big/(2\sqrt{x})$.

9.28. $(x-2)dx\Big/\left(2(x-1)^{3/2}\right)$. **9.29.** $2e^{2x}dx\big/(1+e^{4x})$. **9.30.** $dx\big/(1-x)^2$.

9.31. $-2dx\big/(1-x^2)$. **9.32.** $\ln x\,dx$. **9.33.** $(80x^3-14)dx^2$. **9.34.** $-4\cos 2x\,dx^2$.

9.35. $4^{-x^2}\cdot 2\ln 4(2x^2\ln 4-1)dx^2$. **9.36.** $-4\sin 2x\,dx^2$. **9.37.** $8\operatorname{tg}2x\,dx^2\big/\cos^2 2x$.

9.38. $-0{,}25dx^2\big/(x-1)^{3/2}$. **9.39.** $(2\ln x+3)dx^2$. **9.40.** $(2\cos x-x\sin x)dx^2$.

9.41. 1,2. **9.42.** 0,02. **9.43.** 2,03. **9.44.** 0,57. **9.45.** 1,007. **9.46.** –0,8747. **9.47.** 0,4849. **9.48.** 0,8104. **9.49.** 1,043. **9.51.** 14 лет.

9.52. $vw\,du+uw\,dv+uv\,dw$. **9.53.** $u\,d^2v+2du\,dv+v\,d^2u$. **9.54.** $\Delta y=0{,}27$ м; $dy=0{,}2704$ м. **9.55.** а) $-7dx/x^8$; б) $(1/\cos^2 x+2x\cos x-x^2\sin x)dx$; в) $-0{,}5dx/(5-\sqrt{x})\sqrt{x}$; г) $-(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))dx/x$.

9.56. а) $(2\operatorname{arctg}x+2x(1+x^2))dx^2$; б) $2\operatorname{ctg}x\,dx^2/\sin^2 z$; в) $x\,dx^2(1-x^2)^{3/2}$; г) $4x^2e^{-x^4}(4x^4-3)dx^2$.

9.57. а) $3^ne^{3x}dx^n$; б) $(-1)^n2^{n-1}\sin 2x\,dx^n$; в) $(-1)^{n-1}(n-1)!dx^n/x^n$. **9.58.** 1,006. **9.59.** 1080. **9.60.** 0,3174 $м^3$ и 2,6%.

Контрольные задания. *Вариант 9.1.* **1.** $\Delta y=0{,}007001$; $dy=0{,}007$. **2.** $dy=(2-x)xe^{-x}dx$; $d^2y=(x^2-4x+2)e^{-x}dx^2$. **3.** *а)* 2,02; *б)* 1,015. **4.** 0,004. **5.** 1,5 %. **6.** 20 лет. *Вариант 9.2.* **1.** $\Delta y=0{,}018004$; $dy=0{,}018$. **2.** $dy=-x\,dx\big/\sqrt{1-x^2}$; $d^2y=-dx^2\big/(1-x^2)^{3/2}$. **3.** *а)* 2,99; *б)* –0,01. **4.** 0,001. **5.** 2,25 %. **6.** 14 лет. *Вариант 9.3.* **1.** $\Delta y=0{,}015009$; $dy=0{,}015$.

2. $dy=(x\cos x\ln x+\sin x)dx/x$; $d^2y=(-\sin x\ln x+2\cos x/x-\sin x/x^2)dx^2$. **3.** *а*) 2,001; *б*) –0,01. **4.** 0,0005. **5.** 0,75 %. **6.** 7 лет. **Тест 9. 1.** $\Delta y=2{,}63$; $dy=2{,}6$. **2.** 3. **3.** 2. **4.** 0,1. **5.** 0,05. **6.** 2,16. **7.** 2 %. **8.** 0,05. **9.** 2. **10.** 0,5625. **Учебно-тренировочные тесты.** *Тест МА-1.1.* **1.** 5. **2.** –3. **3.** 2. **4.** 1; 3. **5.** *b*. **6.** 1; 2; 6. **7.** 2; 3. **8.** 1; 4. **9.** 1. **10.** 2; 3. **11.** 1,75. **12.** –0,2. **13.** 3. **14.** 1. **15.** $x_{наим}=2$; $y_{наим}=-1$; $x_{наиб}=y_{наиб}=0$. **16.** 2. **17.** 0,6. **18.** *a*. **19.** 4. **20.** 3. *Тест МА-1.2.* **1.** 8. **2.** 2. **3.** 3. **4.** 4; 6. **5.** *f*. **6.** 1; 4; 6. **7.** 2; 3; 4. **8.** 1. **9.** 4. **10.** 1; 3. **11.** 2. **12.** 45. **13.** 0. **14.** –3. **15.** $x_{наим}=1$; $y_{наим}=0$; $x_{наиб}$ и $y_{наиб}$ не существует. **16.** 1; 3. **17.** 3. **18.** *f*. **19.** 3. **20.** 2. *Тест МА-1.3.* **1.** 2. **2.** 1. **3.** 1. **4.** 2; 5. **5.** *f*. **6.** 1; 3; 4; 6. **7.** 2; 4. **8.** 2; 4. **9.** 5. **10.** 1; 4. **11.** 1. **12.** 1,5. **13.** 0,2. **14.** 0. **15.** $x_{наим}=3$; $y_{наим}=0$; $x_{наиб}=1$; $y_{наиб}=4$. **16.** 3. **17.** 1. **18.** *h*. **19.** 1. **20.** 4.

Глава 10

10.2. $4x^{3/4}/3+C$. **10.3.** $(2/9)x^9+2^xe^x(1+\ln 2)^{-1}+C$. **10.4.** $(1/3)\operatorname{arctg}3x+C$. **10.5.** $\operatorname{tg}x-x+C$. **10.6.** $(1/2)\arcsin 2x+C$. **10.7.** $x^4/2-x^3+4^{2x+1}/\ln 16+$ $+C$. **10.8.** $4x^3/3+x^6+2x+3x^4/4+C$. **10.9.** $2x^{3/2}/3-8x^{5/4}/5+4x+C$. **10.10.** $8x+24x^{1/2}+6\ln|x|-2x^{-1/2}+C$. **10.11.** $-0{,}5\cos x+C$. **10.12.** $-\operatorname{ctg}x-$ $-\operatorname{tg}x+C$. **10.13.** $0{,}25x^4-\operatorname{arctg}x+C$. **10.14.** $0{,}5x^2+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$.

10.15. $\arcsin x-\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$. **10.16.** $-0{,}5\ln|\cos x|+C$.

10.17. $0{,}25(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)+C$. **10.18.** $3x-x^{-1}+0{,}5\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$. **10.21.** $e^{-1/x}+C$.

10.22. $2x^{3/2}/3-x+4x^{1/2}-$ $-4\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$. **10.23.** $-3\ln|\cos x/3|+C$.

10.24. $-\ln(1+e^{-x})+C$. **10.25.** $\ln\left|x/(1+\sqrt{x^2+1}\right|+C$.

10.26. $-0{,}5x\sqrt{1-x^2}+0{,}5\arcsin x+C$. **10.27.** $\sqrt{x^2+1}-\ln\left|(1+\sqrt{x^2+1})/x\right|+C$.

10.28. $-0{,}5e^{1-2x}+C$. **10.29.** $5(3x+2)^{6/5}/18+C$. **10.30.** $-(4x+3)^{-4}/16+C$.

10.31. $(1/3)\ln|3x+1|+C$. **10.32.** $-2\sqrt{2-x}+C$. **10.33.** $\sqrt{x^2+2}+C$.

10.34. $(1/6)\ln\left|2x^3+5\right|+C$. **10.35.** $-0{,}25\cos(2x^2+x)+C$.

10.36. $-0{,}25(2+\cos 3x)^{4/3}+C$. **10.37.** $-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2x}}+C$.

10.38. $2(2+5e^x)^{3/2}/15+C$. **10.39.** $2{,}5\sin(0{,}4x+0{,}2)+C$. **10.40.** $-\cos\ln x+C$.

10.41. $0{,}25(\operatorname{arctg} x/3)^{4/3}+C$. **10.42.** $(\sqrt{2}/2)\operatorname{arctg}(x\sqrt{2})+C$.

10.43. $(\sqrt{2}/2)\ln\left|x\sqrt{2}+\sqrt{3+2x^2}\right|+C$. **10.44.** $0{,}5\ln\left|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$.

10.45. $0{,}5x^2-x+2\ln|x+1|+C$. **10.46.** $-\left(x^3/3+x^2/2+x+\ln|x-1|\right)+C$.

10.47. $x-\ln|2x+1|+C$. **10.48.** $(1/2\sqrt{15})\ln\left|(x\sqrt{3}-\sqrt{5})/(x\sqrt{3}+\sqrt{5})\right|+C$.

10.49. $0{,}5\arcsin(x^2/4)+C$. **10.50.** $(1/3)\ln\left|x^3+\sqrt{x^6+1}\right|+C$.

10.51. $(1/3)\ln(3x^2+2)+(1/\sqrt{6})\operatorname{arctg}(\sqrt{1{,}5}x)+C$.

10.52. $2\sqrt{x^2+1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$. **10.53.** $2\sqrt{x}+(1/3)\ln^3 x+C$.

10.54. $x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}(x/\sqrt{3})+C$. **10.55.** $x+\ln(x^2+1)+C$.

10.56. $\left((1/9)3^{4{,}5x}+3^{-x/2}\right)2/\ln 3+C$. **10.57.** $0{,}5(\arcsin x)^2-\sqrt{1-x^2}+C$.

10.58. $2(x^2+9)^{3/2}/3-17(x^2+9)^{1/2}+C$. **10.59.** $0{,}5\ln\left|x^2-2\right|+C$.

10.60. $0{,}5\ln|x/(x+2)|+C$. **10.61.** $\arcsin\dfrac{x-3}{2}+C$. **10.62.** $2\sqrt{x^2+4x+5}-$

$-7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$. **10.63.** $0{,}25\ln|(x-1)/(x+3)|+C$.

10.64. $0{,}25\operatorname{arctg}(x+1{,}5)+C$. **10.65.** $-2\arcsin(0{,}5x+1)-\sqrt{-x^2-4x}+C$.

10.66. $-2\sqrt{2+\cos^2 x}+C$. **10.67.** $3x/8-0{,}5\sin x+(\sin 2x)/16+C$.

10.68. $0{,}5\ln|\operatorname{tg} x|+C$. **10.69.** $2\ln|\sin(0{,}5x+1{,}5)|+C$.

10.70. $(4/3)\sin^3 x-0{,}8\sin^5 x+C$. **10.71.** $(-2/3)(1+\cos^2 x)^{3/2}+C$.

10.72. $(-2/3)(\operatorname{ctg} x)^{3/2}+C$. **10.75.** $0{,}04e^{5x}(5x-1)+C$.

10.76. $-2e^{-x/2}(x^2+4x+8)+C$. **10.77.** $(1/8)(4x^3-6x^2+6x-3)e^{2x}+C$.

10.78. $(x-1)\ln(1-x)-x+C$. **10.79.** $(x^3/3-3x^2/2)\ln x-x^3/9+3x^2/4+C$.

10.80. $(\ln^2 x-(2/3)\ln x+2/9)x^3/3+C$. **10.81.** $2\sqrt{x}\ln(1-x)-4\sqrt{x}-$

$-2\ln\left|(\sqrt{x}-1)/(\sqrt{x}+1)\right|+C$. **10.82.** $(-1/3)x\cos 3x+(1/9)\sin 3x+C$.

10.83. $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$. **10.84.** $0{,}5x\sqrt{x^2-4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$.

10.85. $0{,}5x\sqrt{2-x^2}+\arcsin(x/\sqrt{2})+C.$

10.86. $0{,}25x^2+0{,}25x\sin 2x+(1/8)\cos 2x+C.$

10.87. $x\,\mathrm{arctg}\sqrt{7x-1}-\sqrt{7x-1}/7+C.$

10.88. $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C.$ **10.89.** $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C.$

10.90. $0{,}4e^x(2\sin 0{,}5x-\cos 0{,}5x)+C.$ **10.91.** $0{,}5x(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.$

10.92. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C.$ **10.93.** $x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-0{,}5x+0{,}5\arcsin x+C.$

10.94. $-x/\sin x+\ln|\mathrm{tg}\, x/2|+C.$ **10.95.** $0{,}5x\,\mathrm{tg}\, 2x+0{,}25\ln|\cos 2x|-0{,}5x^2+C.$

10.96. $0{,}5(x^2-1)\ln|(1-x)/(1+x)|-x+C.$ **10.97.** $0{,}5x+0{,}1x\cos(2\ln x)+$ $+0{,}2x\sin(2\ln x)+C$ **10.98.** $(x^3/3)\mathrm{arctg}\, 3x-x^2/18+(1/162)\ln(9x^2+1)+C.$

10.99. $-x^{-1}\arcsin x+\ln\left|x/\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\right|+C.$ **10.100.** $x(\arcsin x)^2+$ $+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$ **10.101.** $3^x(\sin x+\cos x\ln 3)/(1+\ln^2 3).$

10.102. $e^{3x}(3\sin 2x-2\cos 2x)/13+C.$ **10.103.** $x\ln(x^2+1)-2x+2\mathrm{arctg}\ x+C.$

10.104. $(x\ln x)/(x+1)-\ln(x+1)+C.$ **10.107.** $(1/3)\ln|(x-2)/(x+1)|+C.$

10.108. $0{,}5(1-x)^{-2}+2(x-1)^{-1}-\ln|1-x|+C.$ **10.109.** $x^{-1}+$ $+\ln|(x-1)/x|+C.$ **10.110.** $\ln\left(|x|/\sqrt{x^2+1}\right)+C.$

10.111. $(1/3)\ln(1+x)-(1/6)\ln(x^2-x+1)+(1/\sqrt{3})\mathrm{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

10.112. $(1/3)\ln\left(|x-1|/\sqrt{x^2+x+1}\right)+\left(1/\sqrt{3}\right)\cdot\mathrm{arctg}\left((2x+1)/\sqrt{3}\right)+C.$

10.113. $(1+x)^{-1}+\ln|x/(x+1)|+C.$

10.114. $(1/6)\ln|x-1|-(1/2)\ln|x+1|+(1/3)\ln|x+2|+C.$

10.115. $1{,}5(x+1)^{-1}+0{,}25\ln|(x+1)(x-1)^3|+C.$ **10.116.** $0{,}2\ln|x-1|+$ $+0{,}8\ln|x+4|+C.$ **10.117.** $x+2{,}5\ln|x^2-6x+10|+$ $+5\mathrm{arctg}(x-3)+C.$

10.118. $x+(1/6)\ln|x|-4{,}5\ln|x-2|+(28/3)\ln|x-3|+C.$

10.119. $2\ln|x|+\ln|x+2|+10(x+2)^{-1}+C.$ **10.120.** $x^3/3+x^2-x+$ $+(4/\sqrt{3})\mathrm{arctg}\left((2x+1)/\sqrt{3}\right)+C.$ **10.121.** $-x^{-1}-\mathrm{arctg}\, x+C.$

10.122. $2^{-2,5}\ln\left((x^2+x\sqrt{2}+1)/(x^2-x\sqrt{2}+1)\right)+2^{-1,5}\mathrm{arctg}\left(x\sqrt{2}(1-x^2)^{-1}\right)+C.$

10.123. $0{,}5(2x-1)(x^2+2x+2)^{-1}+\mathrm{arctg}(x+1)+C.$

10.124. $0{,}25\ln\left((x^2+x+1)/(x^2-x+1)\right)+0{,}5\cdot 3^{-1/2}\operatorname{arctg} x\sqrt{3}/(1-x^2)+C.$

10.125. $x(4+x^2)^{-1}/8+16^{-1}\operatorname{arctg}(x/2)+C.$ **10.126.** $0{,}5\ln(x^2+5)+$ $+0{,}1(25-3x)(x^2+5)^{-1}-\left(3/(10\sqrt{5})\right)\operatorname{arctg}(x/\sqrt{5})+C.$

10.127. $0{,}25\ln|(x-1)/(x+1)|-0{,}5\operatorname{arctg} x+C.$ **10.128.** $(x-1)^{-1}+$ $+\ln|(x-2)/(x-1)|+C.$ **10.129.** $-6{,}5(x-4)^{-2}+3(x-4)^{-1}+$ $+2\ln|(x-4)/(x-2)|+C.$ **10.130.** $-0{,}2x^{-5}+x^{-3}/3-x^{-1}-\operatorname{arctg} x+C.$

10.133. $2\sqrt{x-1}\left((x-1)^3/7+3(x-1)^2/5+x\right)+C.$ **10.134.** $0{,}5x-3\sqrt{x}/2+$ $+2{,}25\ln\left|2\sqrt{x}+3\right|+C.$ **10.135.** $6\left(x^{7/6}/7-x^{5/6}/5+x^{1/2}/3-x^{1/6}+\operatorname{arctg} x^{1/6}\right)+C.$

10.136. $0{,}075\left(2(2x+1)^{5/3}-5(2x+1)^{2/3}\right)+C.$ **10.137.** $6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$

10.138. $2\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}\right)\Big/3+C.$ **10.139.** $(0{,}25x^{-4}+3x^{-2}/8)\sqrt{x^2-1}-$ $-(3/8)\arcsin x^{-1}+C.$ **10.140.** $0{,}5\sqrt{x^2-1}(x-2)+0{,}5\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$

10.141. $-2\sqrt{(x-2)/x}-\ln\left(|x|(1-\sqrt{(x-2)/x})^2\right)+C.$

10.142. $\ln\left|(\sqrt{x+1}-1)^2/(x+2+\sqrt{x+1})\right|-(2/\sqrt{3})\operatorname{arctg}\left((2\sqrt{x+1}+1)/\sqrt{3}\right)+C.$

10.146. $-\cos x+(\cos^3 x)/3+C.$ **10.147.** $\sin x-\sin^3 x+0{,}6\sin^5 x-$ $-(\sin^7 x)/7+C.$ **10.148.** $0{,}2\cos^5 x-(\cos^3 x)/3+C.$ **10.149.** $-2(1+\operatorname{tg} x/2)^{-1}+C.$

10.150. $2^{-1/2}\ln\left|(\operatorname{tg} x/2+1-\sqrt{2})/(\operatorname{tg} x/2+1+\sqrt{2})\right|+C.$

10.151. $0{,}25\ln|\operatorname{tg} x/2|+0{,}125\operatorname{tg}^2 x/2+C.$

10.152. $15^{-1/2}\operatorname{arctg}(\sqrt{0{,}6}\operatorname{tg} x)+C.$ **10.153.** $x-\operatorname{tg} 0{,}5x+C.$

10.154. $-0{,}5(1-\cos x)^{-2}+C.$ **10.155.** $\ln|(\operatorname{tg} 0{,}5x-5)/(\operatorname{tg} 0{,}5x-3)|+C.$

10.156. $-\ln|\cos x-\sin x|+C.$

10.157. $2\cdot 3^{-1/2}\operatorname{arctg}(3^{-1/2}\operatorname{tg} 0{,}5x)-2^{-1/2}\operatorname{arctg}(2^{-1/2}\operatorname{tg} 0{,}5x)+C.$

10.158. $\operatorname{tg}^2(x/2+\pi/4)+2\ln|\cos(x/2+\pi/4)|+C.$

10.159. $0{,}6\sin(5x/6)+3\sin(x/6)+C.$ **10.160.** $0{,}0625\sin 8x-0{,}05\sin 10x+C.$

10.161. $(\cos 6x)/24-(\cos 4x)/16-(\cos 2x)/8+C.$

10.162. $2^{-1/2}\left(\ln|\operatorname{tg} 0{,}5x|+\ln|\operatorname{tg}(0{,}5x+\pi/4)|\right)+C.$

10.163. $-3(\cos x)^{4/3}/4+3(\cos x)^{10/3}/5-3(\cos x)^{16/3}/16+C.$

10.164. $x^3/6-x^2/8+x/8+(7/16)\ln|2x+1|+C.$

10.165. $(1/\sqrt{10})\operatorname{arctg}((\sqrt{10}/5)\sin x)+C$.

10.166. $2x^{3/2}e^{\sqrt{x}}-6xe^{\sqrt{x}}+12\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-12e^{\sqrt{x}}+C$.

10.167. $0{,}5\ln(x^2+1)+\ln(1+x^{2/3})-0{,}5\ln|x^{4/3}-x^{2/3}+1|+C$.

10.168. $(2+3\sin x)^{-1}+C$. **10.169.** $-x/2+(2x+1)^{3/2}/6+C$.

10.170. $2x^{3/2}/3+10x^{1/2}+C$. **10.171.** $0{,}5(x^2+1)\ln(x^2+1)-0{,}5x^2+C$.

10.172. $1{,}25\ln|x-2|-0{,}25\ln|x+2|+C$.

10.173. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}(\operatorname{tg}x/2))+C$. **10.174.** $(2/3)\ln^3(1+\sqrt{x})+C$.

10.175. $-(1/4)\sin^3 x\cos x-(3/8)\cos x\sin x+3x/8+C$.

10.176. $\ln x-0{,}5\ln(x^2+1)+2\operatorname{arctg}x+C$.

10.177. $2\left(\frac{x}{x+3}\right)^{3/2}+C$. **10.178.** $-0{,}2\ln(1+e^{5x})+x+C$.

10.179. $5xe^x+2e^x+C$. **10.180.** $0{,}5\operatorname{tg}(x/2)+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3(x/2)+C$.

10.181. $-0{,}5\ln|x+1|+2\ln|x+2|-1{,}5\ln|x+3|+C$.

10.182. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C$. **10.183.** $0{,}5x^2e^{x^2}+0{,}5e^{x^2}+C$.

10.184. $x^3-2{,}5x^2-7x+C$. **10.185.** $-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$.

10.186. $\ln|x|+\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-\ln|x+1|+C$.

10.187. $0{,}5\ln|1+\operatorname{tg}x|-0{,}25\ln|1+\operatorname{tg}^2x|+0{,}5x+C$.

10.188. $-x(1-x^2)^{3/2}/4+x\sqrt{1-x^2}/8+(1/8)\arcsin x+C$.

10.189. $0{,}5\ln|x|-1{,}5\ln|\sqrt[3]{x}+2|+C$.

10.190. $2\ln|\sqrt{x}-1|+4\ln|\sqrt{x}+2|+C$.

10.191. $-x/8+(1/16)\sin 2x+(13/24)\sin^2 x\sin 2x-(7/6)\sin^4 x\sin 2x+\sin^6 x\sin 2x+C$.

10.192. $-\ln|x|+4\ln|x-2|+C$.

10.193. $(1/3)x^3\arcsin x+x^2\sqrt{1-x^2}/9+2\sqrt{1-x^2}/9+C$.

10.194. $2\sin x+0{,}5\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|+C$.

10.195. $0{,}5x^2-5x+(216/7)\ln|x+6|+(1/7)\ln|x-1|+C$.

10.196. $-1/(2\ln^2\sin x)+C$.

10.197. $(1/26)e^x\cos(5x+6)+(5/26)e^x\sin(5x+6)+C$.

10.198. $\operatorname{arctg} e^{\sqrt{x}}+C$. **Контрольные задания.** *Вариант 10.1.*

1. $\sqrt{2x}-0{,}6\sqrt[6]{(2x)^5}+C$. **2.** $4\sqrt{\sqrt{x}+x}+C$. **3.** $e^{2x}(x+1)+C$. **4.** $-0{,}5x+(1/3)\ln|e^x-1|+(1/6)\ln(e^x+2)+C$.

5. $26\arcsin(0{,}5x-1{,}5)-5\sqrt{6x-x^2-5}+C$. **6.** $2\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$. **7.** $0{,}25x^4\arcsin x^{-1}+(x^2+2)\sqrt{x^2-1}/12+C$. *Вариант 10.2.* **1.** $3x^4\sqrt[3]{x}/13-3x^2\sqrt[3]{x}/7-6\sqrt[3]{x}+C$. **2.** $(88-30x)\sqrt{1-3x}/27+C$. **3.** $(x^3/3+1{,}5x^2+2x)\ln x-x^3/9-3x^2/4-2x+C$. **4.** $2\sqrt{e^x+1}+\ln\left((\sqrt{e^x+1}-1)/(\sqrt{e^x+1}+1)\right)+C$.

5. $x+3\ln(x^2-6x+10)+8\operatorname{arctg}(x-3)+C$. **6.** $\operatorname{tg}x-(\operatorname{tg}^3x)/3+C$.

7. $-0{,}5x(\sin x)^{-2}-0{,}5\operatorname{ctg}x+C$. *Вариант 10.3.* **1.** $\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-x^3/3+C$.

2. $2(2\ln x+x)^{3/2}/3+C$. **3.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

4. $0{,}5\ln\left|x^2-2x-15\right|+0{,}25\ln\left|(x-5)/(x+3)\right|+C$. **5.** $\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-0{,}5x+C$.

6. $e^x-0{,}5\ln(e^{2x}+e^x+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left((2e^x+1)/\sqrt{3}\right)+C$.

7. $0{,}2(-x^2+3x+0{,}08)\cos 5x+0{,}04(2x-3)\sin 5x+C$. **Тест 10.** **1.** $a=4$, $b=3$. **2.** $a=6$, $b=3$, $c=1$. **3.** $a=-6$, $b=-3$, $c=2$. **4.** $a=1$, $b=8$, $d=4$. **5.** $a=-8$, $b=-2$, $d=4$. **6.** $a=2$, $b=13$, $d=8$. **7.** $a=1$, $b=2$, $d=-3$. **8.** $a=-16$, $b=4$, $d=4$. **9.** $a=4$, $b=-3$, $d=1$. **10.** $a=1$, $b=1$, $d=2$.

Глава 11

11.2. 9. **11.3.** 100/27. **11.4.** $2+2\ln 3$. **11.5.** $7+2\ln 2$. **11.6.** 4. **11.7.** 2. **11.8.** 6. **11.9.** 2. **11.10.** $\ln 4-1$. **11.11.** $(e^2+1)/4$. **11.12.** $e-2$. **11.13.** $\pi/\sqrt{3}-\ln 2$. **11.14.** $(e^2-5)/e$. **11.15.** $0{,}5(e^{\pi}+1)$. **11.16.** 4. **11.17.** $-\pi/2$. **11.18.** 0,25. **11.19.** 0. **11.20.** 2/3. **11.21.** $2-\pi/2$. **11.22.** $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$. **11.23.** $\pi/\sqrt{5}$. **11.24.** $\ln[(7+2\sqrt{7})/9]$. **11.25.** $\pi/6+1-\sqrt{3}/2$. **11.26.** $0{,}5\ln 1{,}5$. **11.27.** $1{,}5(\ln 4-1)$. **11.28.** $0{,}5-0{,}5\ln 2$. **11.29.** $81\pi/8$. **11.36.** e^2+1. **11.37.** $16\sqrt{2}/15$. **11.38.** 4,5. **11.39.** $4\ln 2-2/3$. **11.40.** 7/12. **11.41.** 7/6. **11.42.** 0,5. **11.43.** 44/15. **11.44.** $1/3+\ln 3$. **11.45.** $3/\ln 2-4/3$. **11.46.** 0,5. **11.47.** 19/3. **11.48.** 1/3. **11.49.** 3. **11.50.** 17/12. **11.51.** 9. **11.52.** 2π. **11.53.** $3\pi/8$. **11.54.** $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

11.55. $1+0{,}5\ln 1{,}5$. **11.56.** $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$. **11.57.** 8. **11.58.** $7\pi/27$. **11.59.** 3π. **11.60.** 18π. **11.61.** $6\pi/5$. **11.62.** $1024\pi/21$; $256\pi/15$. **11.63.** $\pi^2/2$; $2\pi^2$. **11.64.** 12π; 24π. **11.65.** $128\pi/15$; $64\pi/3$. **11.66.** $112\pi/5$; 40π. **11.67.** $544\pi/15$; 8π. **11.68.** $\pi(e-2)$; $\pi(e^2+1)/2$. **11.69.** $32\sqrt{2}\,\pi/3$; 4π. **11.70.** $52\pi/3$; $\left(\frac{128}{3}-\frac{112\sqrt{3}}{5}\right)\pi$. **11.71.** $\frac{397}{30}\pi$; $\frac{148}{15}\pi$. **11.72.** $\frac{16}{3}\pi$; $\frac{8}{5}\pi$. **11.75.** 1/24. **11.76.** Расходится. **11.77.** 1/4. **11.78.** $\pi/\sqrt{5}$. **11.79.** 0,5. **11.80.** Расходится. **11.81.** Расходится. **11.82.** 1. **11.83.** $\pi/2$. **11.84.** 4. **11.85.** Расходится. **11.86.** 1. **11.87.** 1,5. **11.88.** $0{,}5\ln 3$. **11.89.** $6\pi\sqrt[3]{2}$. **11.90.** 2π. **11.92.** 0,6956. **11.93.** 21,44; 0,1064. **11.94.** 37,8183; 0,1817. **11.95.** 13. **11.100.** 40. **11.101.** 42 381. **11.102.** 11,392 т. **11.103.** $2{,}529\cdot 10^6$. **11.104.** *а)* 0,0235; 0,283; *б)* 0,073; 0,114; *в)* 0,0037; 0,45. **11.105.** 341,3. **11.106.** 112,8. **11.107.** *а)* $C = 2250$, $P = 37{,}5$; *б)* $C = 667$, $P = 767$. **11.108.** $\pi/6$. **11.109.** $(5/3)\ln 2-(2/5)\ln 5$.

11.110. $\sqrt{2}/2+0{,}5\ln(\sqrt{2}-1)$. **11.111.** $\pi\sqrt{3}/9-0{,}5\ln 3$. **11.112.** $2+4\ln 1{,}5$.

11.113. $\pi e^{\pi}/5-3e^{\pi}/25-4/25$. **11.114.** 0,5. **11.115.** 4/3. **11.116.** $3-2\ln 2$.

11.117. 7/6. **11.118.** 2. **11.119.** $2-\ln 1{,}5$. **11.120.** $\sqrt{2}/2-0{,}5\ln(\sqrt{2}-1)$.

11.121. $16\pi(4-\sqrt{2})/3$. **11.122.** $1{,}5\pi e^4+\pi/2$; $6\pi(e^2-1)$.

11.123. $11\pi/16$; $8\pi/3$. **11.124.** $-1/6$. **11.125.** Расходится. **11.126.** 0.

11.127. 1. **11.128.** $-1/3$. **11.129.** $\ln 2-1$. **11.130.** Расходится. **Контрольные задания.** *Вариант 11.1.* **1.** $\ln(1+\sqrt{e+1})$. **2.** $\sqrt{3}/2+\ln(2-\sqrt{3})$.

3. $-135e^{-1}+54$. **4.** $1{,}5\ln 1/3-\ln 3/4$. **5.** 14/3. **6.** 16π. **7.** 2. *Вариант 11.2.*

1. $e-\sqrt{e}$. **2.** 4π. **3.** $-468/7$ **4.** $\frac{1}{3}\ln 8/5$. **5.** $e^2-2\ln 2$. **6.** 30π. **7.** $1/20\sqrt{3}$.

Вариант 11.3. **1.** $\frac{141}{20}\sqrt[3]{7^5}$. **2.** $(5e^3-2)/27$. **3.** $0{,}5\ln 1{,}5$. **4.** $\frac{1}{3}\ln 14$. **5.** 1,5. **6.** $5{,}5\pi$. **7.** 6. **Тест 11.** **1.** $a = 15$; $b = 32$. **2.** $a = 1$; $b = 1$. **3.** $a = 2$; $b = 2$. **4.** $a = -7$; $b = 16$. **5.** $a = 3$; $b = 64$. **6.** $a = 14$; $b = 3$. **7.** $a = 112$. **8.** 74. **9.** 1. **10.** $-0{,}5$.

Глава 12

12.9. -1. **12.10.** 1/6. **12.11.** $y' = y$. **12.12.** $x^2y'-xy = yy'$.

12.13. $y' = \cos\left(x\sqrt{1-(y')^2}/y\right)$. **12.14.** $(y')^2+2yy'' = 0$.

12.17. $e^{1/y}=C\sqrt[3]{3x-1}$. **12.18.** $y=Ce^{\sqrt{4-x^3}}$. **12.19.** $x^2y=Ce^{2y}$. **12.20.** $y^3/3-$ $-y=0{,}5e^{2x-1}+C$. **12.21.** $y=x+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$. **12.22.** $e^x-e^{-y}(y+1)=C$.

12.23. $\operatorname{arctg}(x+y)=x+C$. **12.24.** $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=C$.

12.25. $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln\left(\sqrt{4x+2y-1}+2\right)=x+C$. **12.26.** $y=e^x(x-2)+C$. **12.27.** $x^{-2}+y^{-2}=2(1+\ln|x/y|)$. **12.28.** $2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=0$. **12.29.** $xy^2=x^2-1$. **12.30.** $y=-2\cos x$. **12.33.** $y=Ce^{y/x}$. **12.34.** $y^3=3x^3\ln|Cx|$. **12.35.** $y=xe^{Cx+1}$. **12.36.** $0{,}5\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}(y/x)=C$. **12.37.** $y=Cx^2/2-$ $-\frac{1}{2C}$; $x=0$. **12.38.** $(x^2+y^2)^3(x+y)^2=C$. **12.39.** $3x+y+$ $+2\ln|x+y-1|=C$. **12.40.** $(y+2)^2=C(x+y-1)$; $y=1-x$. **12.41.** $\ln\frac{y+x}{x+3}=$ $=1+\frac{C}{x+y}$. **12.42.** $\sin\frac{y-2x}{x+1}=C(x+1)$. **12.43.** $y=C(x^2+y^2)$. **12.44.** $x^2+y^2=Cx$. **12.48.** $y=Ce^{2x}+xe^{2x}$. **12.49.** $y=(x-4+8/x)e^{x/2}+$ $+C/x$. **12.50.** $60y^4(x+1)^2=10x^6+24x^5+15x^4+C$. **12.51.** $x=Ce^y-2y^2-$ $-4y-4$. **12.52.** $x=Ce^{y^2}-0{,}5(1+y^2)$. **12.53.** $y=x^4(0{,}5\ln|x|+C)^2$. **12.54.** $y^2=x\ln(C/x)$. **12.55.** $y^3\left(3+Ce^{\cos x}\right)=x$. **12.56.** $y^{-2}=x^4(2e^x+C)$; $y=0$. **12.57.** $xy(C-\ln^2 y)=1$. **12.58.** $y^2+x+ay=0$.

12.59. $x^2+y^2-Cy+1=0$. **12.62.** $y=\pm0{,}5\left(x\sqrt{C_1^2-x^2}+C_1^2\arcsin\frac{x}{C_1}\right)+C_2$. **12.63.** $y=C_1+C_2\ln|x|$. **12.64.** $y=\left(C_1x-C_1^2\right)e^{x/C_1+1}+C_2$; $y=ex^2/2+C$. **12.65.** $y=C_1e^{C_2x}+1/C_2$. **12.66.** $y=C_1e^{C_2x}$. **12.67.** $y=C_1x(x-C_1)+C_2$; $y=x^3/3+C$. **12.68.** $y=C_3-(x+C_1)\ln C_2(x+C_1)$; $y=C_1x+C_2$. **12.69.** $2y=C_1\cos 2x+(1+2C_1)x^2+C_2x+C_3$. **12.70.** $225(y-1)^2=$ $=8(x-1)^3(3x+2)^2$. **12.71.** $y^3-y=3x$. **12.78.** $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$. **12.79.** $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **12.80.** $y=e^x(C_1+C_2x+x^2)$. **12.81.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x(0{,}1x-0{,}04)e^{2x}$. **12.82.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+$ $+0{,}5x\sin x$. **12.83.** $y=C_1+C_2e^{-x}+0{,}5x+0{,}05(2\cos 2x-\sin 2x)$. **12.84.** $y=C_1+$ $+C_2e^{3x}-0{,}1(\cos x+3\sin x)-x^2/6-x/9$. **12.85.** $y=\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)\ln\left(e^x+1\right)+$ $+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$. **12.86.** $y=e^{-2x}-e^x$. **12.87.** $y=\sin x-2x\cos x$.

12.88. $y = e^{-x}(x - \sin x)$. **12.89.** $y = xe^x + xe^x \ln|x|$. **12.94.** 29,8.
12.95. $y = \ln(3{,}32e^{1{,}2t} - 0{,}6)$. **12.96.** 29.91. **12.97.** 863. **12.98.** *а)* $py^2 = 20$; *б)* $p\sqrt[3]{y} = 6$. **12.99.** *а)* $p = 100 - y$; *б)* $p = 20 - 2y$. **12.100.** *а)* $p = 15e^{4t} - 5$; *б)* не является. **12.101.** *а)* $p = 5 + 2e^{-0{,}4t}$; *б)* является.
12.102. $(1 - y^3)^{-1/3} = C(1 + x^2)^{1/2}$, $y = 1$. **12.103.** $y = (x + C)/x^2$, $x = 0$.
12.104. $2\ln|y/x| + y/x = -\ln|x| + C$, $y = 0$, $x = 0$.
12.105. $y = (x+1)(e^x + C)$. **12.106.** $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + e^{4x}/5$.
12.107. $0{,}5\ln|y| - y = -\ln|x| + C$, $y = 0$, $x = 0$. **12.108.** $x = C\ln((x+y)/x)$.
12.109. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (0{,}1x - 0{,}12)\cos x - (0{,}3x + 0{,}34)\sin x$.
12.110. $1 + e^y = C(1 + x^2)$. **12.111.** $y = x^4 + Cx^2$, $x = 0$.
12.112. $y = e^x(x\ln|x| + C_1x + C_2)$. **12.113.** $y = e^x\ln|x| + Ce^x$, $x = 0$.
12.114. $y = -x^{-1} \cdot \ln|x|$ **12.115.** $y = -1{,}5e^x - 0{,}5e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$.
12.116. $-\ln|x| = -x^3/y^3 + \ln|y/x| + 1$. **12.117.** $x = y^2 - y^{-1}$.
12.118. $y = (7 - 3x)e^{x-2}$. **12.119.** $y = Cx^2$. **12.120.** $y = \log_2((15 \cdot 2^{2{,}8t} - 1)/7)$.
Контрольные задания. *Вариант 12.1.* **1.** $(Cx+1)y = Cx - 1; y = 1$. **2.** $y\ln Cx = -x; y = 0$. **3.** $0{,}5y^2 + y + \ln|y-1| = -x^{-1} + C$. **4.** $e^y + C_1 = (x + C_2)^2$. **5.** $x = Ce^y + y^2 + 2y + 2$. **6.** $\sqrt{y-x} - \sqrt{x} = 1$. **7.** $y = -1 + e^{2x} + 0{,}25(x - x^2) - x^3/6$. *Вариант 12.2.* **1.** $y = x\,\mathrm{tg}\ln Cx; x = 0$. **2.** $y^2 = C(x^2 - 1)$; $x = \pm 1$. **3.** $y = Cx + x^3$; $x = 0$. **4.** $x + y = \mathrm{tg}(y - C)$. **5.** $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$. **6.** $-\cos 2x + \sin 2x$. **7.** $y = e^x - (x+1)y = x^2 + x\ln|x|$.
Вариант 12.3. **1.** $y = Cx^2e^{-3/x}$. **2.** $y^2 = C(xy - 1)$; $xy = 1$.
3. $C_1x + C_1^2y = \ln|C_1x + 1| + C_2$; $2y = x^2 + C, y = C$. **4.** $y(x + C) = x + 1; y = 0$.
5. $\ln(x^2 + y^2) + \mathrm{arctg}(y/x) = C$. **6.** $x = y^2(1 - 2\ln|y|)$.
7. $y = 3\sin 2x - 7\cos 3x - 2\sin 3x$. **Тест 12. 1.** 1—*в*, 2—*а*, 3—б. **2.** $a = 4; b = 1$. **3.** $a = -1; b = 1; d = -3$. **4.** 10. **5.** 0. **6.** 10. **7.** $a = -1; b = 3$. **8.** 1,4. **9.** –0,75. **10.** 21.

Глава 13

13.4. $S_n = 3(1 - (0{,}5)^n)$, $S = 3$. **13.5.** $S_n = 1/3 - 1/(n+3)$, $S = 1/3$.
13.6. $S_n = 1/12 - 1/\left(3(3n+2)^2\right)$, $S = 1/12$. **13.7.** $S_n = \ln(2/(5n+2))$; расходится. **13.8.** 3/4; расходится. **13.9.** 0; дополнительное исследование. **13.10.** 2/5; расходится. **13.11.** e^2; расходится. **13.12.** 0; дополнительное исследова-

ние. **13.13.** $1/3$; расходится. **13.17.** $\alpha = 2$; сходится. **13.18.** $\alpha = 3$; сходится. **13.19.** $\alpha = 1/2$; расходится. **13.20.** $\alpha = 1/3$; расходится. **13.21.** $\alpha = 1$; расходится. **13.22.** $\alpha = 4$; сходится. **13.23.** $\alpha = 1$; расходится. **13.24.** $\alpha = 1$; расходится. **13.25.** $\alpha = 3$; сходится. **13.26.** $\alpha = 1/2$; расходится. **13.27.** $\alpha = 2$; сходится. **13.28.** $\alpha = 4/3$; сходится. **13.29.** Расходится. **13.30.** Сходится. **13.31.** Сходится. **13.32.** Расходится. **13.33.** Расходится. **13.34.** Сходится. **13.35.** Сходится. **13.36.** Расходится. **13.37.** Сходится. **13.38.** Сходится. **13.39.** $l = 2/3$; сходится. **13.40.** $l = 2/5$; сходится. **13.41.** $l = \infty$; расходится. **13.42.** $l = 1$; дополнительное исследование. **13.43.** $l = 1$; дополнительное исследование. **13.44.** $l = 3/e$; расходится. **13.45.** $l = \infty$; расходится. **13.46.** $l = e^{-1}$; сходится. **13.47.** $l = 2/5$; сходится. **13.48.** $l = e^{-8/9}$; сходится. **13.49.** $l = 1/3$; сходится. **13.50.** $l = 0$; сходится. **13.51.** $l = 3/4$; сходится. **13.52.** $l = 1/9$; сходится. **13.53.** Расходится. **13.54.** Сходится. **13.55.** Расходится. **13.56.** Сходится. **13.57.** Расходится. **13.58.** Расходится. **13.59.** Расходится. **13.60.** Сходится. **13.61.** Сходится. **13.62.** Сходится. **13.63.** Сходится. **13.64.** Сходится. **13.65.** Расходится. **13.66.** Расходится. **13.67.** Расходится. **13.71.** Сходится условно. **13.72.** Сходится абсолютно. **13.73.** Сходится абсолютно. **13.74.** Расходится. **13.75.** Сходится абсолютно. **13.76.** Расходится. **13.77.** Расходится. **13.78.** Сходится условно. **13.79.** Сходится условно. **13.80.** Сходится абсолютно. **13.81.** Сходится абсолютно. **13.82.** Расходится. **13.83.** Сходится условно. **13.84.** Сходится абсолютно. **13.85.** 99. **13.86.** 9998. **13.87.** 7. **13.88.** 4. **13.89.** $n = 4$; 0,18127. **13.90.** $n = 3$; 0,23976. **13.91.** Сходится; $S = 1$. **13.92.** Расходится. **13.93.** Расходится. **13.94.** Сходится. **13.95.** Расходится. **13.96.** Сходится. **13.97.** Сходится. **13.98.** Сходится. **13.99.** Расходится. **13.100.** Расходится. **13.101.** Сходится абсолютно. **13.102.** Сходится условно. **13.103.** Сходится абсолютно. **13.104.** 0,445. **Контрольные задания.** *Вариант 13.1.* **1.** $1/5$. **2.** Расходится. **3.** Расходится. **4.** Сходится. **5.** Расходится. **6.** Сходится условно. **7.** 7. *Вариант 13.2.* **1.** $1/4$. **2.** Расходится. **3.** Расходится. **4.** Сходится. **5.** Сходится абсолютно. **6.** Расходится. **7.** 6. *Вариант 13.3.* **1.** $1/3$. **2.** Сходится. **3.** Расходится. **4.** Сходится. **5.** Расходится. **6.** Сходится условно. **7.** 6. **Тест 13. 1.** 3. **2.** 2. **3.** 1,3. **4.** *а* — 2, *б* — 3, *в* — 1, *г* — 3. **5.** *а*) $\alpha = 1$; 2; *б*) $\alpha = 2$; 1. **6.** $l = 5/2$; 2. **7.** 1. **8.** 2. **9.** 3. **10.** 3.

Глава 14

14.2. $[-1; 1]$. **14.3.** $(-2; 2)$. **14.4.** $[-1; 1)$. **14.5.** $\{0\}$. **14.6.** $[-2; 2)$. **14.7.** $(-0,1; 0,1)$. **14.8.** $(-3; 3)$. **14.9.** $[-1; 1)$. **14.10.** $(-\infty; +\infty)$. **14.11.** $(-1; 1]$.

14.12. $[-1;\ 1]$ **14.13.** $[-3;\ 3)$ **14.14.** $\left[-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\right]$ **14.15.** $[-1;\ 1]$ **14.16.** $(-1/e;\ 1/e)$.
14.17. $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ **14.18.** $(-\infty;\ +\infty)$. **14.19.** $[3;\ 7)$. **14.20.** $[0;\ 2]$ **14.21.** $[-1;\ 1]$

14.29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n x^n}{n!}$; $(-\infty;\ +\infty)$. **14.30.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(n+1)!}$; $(-\infty;\ +\infty)$.

14.31. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+3}}{(2n)!}$; $(-\infty;\ +\infty)$. **14.3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{5^n x^n}{n}$; $(-1/5;\ 1/5]$.

14.33. $\ln 5+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{0{,}4^n x^n}{n}$; $(-2{,}5;\ 2{,}5]$.

14.34. $1+\dfrac{x^2}{2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5..(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}$; $[-1;\ 1]$

14.35. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}$; $(-1;\ 1)$. **14.36.** $3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{4^{n+1}}$; $(-4;\ 4)$. **14.37.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n x^{n+2}}{n!}$; $(-\infty;\ +\infty)$. **14.38.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{(2n-1)}$; $[-1;\ 1]$. **14.39.** $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; $[-1;\ 1]$ **14.40.** $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n+1}$; $(-1;\ 1)$. **14.41.** $x-\left(1+\dfrac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)x^3-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)x^4+\ldots$; $(-1;\ 1)$. **14.42.** $-\left(x+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{4}{3}x^3+\ldots\right)$; $(-1;\ 1)$.

14.43. $x-x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{40}x^5+\ldots$; $(-\infty;\ +\infty)$. **14.44.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{2n(2n+1)}$; $[-1;\ 1]$ **14.45.** $x^2-\dfrac{2}{3}x^4+\dfrac{23}{45}x^6-\ldots$; $(-1;\ 1)$. **14.46.** $\ln 6+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}-\dfrac{1}{3^n}\right)\dfrac{x^n}{n}$; $[-2;\ 2]$ **14.47.** $\dfrac{3}{2}+(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$; $(-1;\ 1)$.

14.48. $\ln x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!n}+C$; $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. **14.49.** $x+\dfrac{x^5}{2\cdot 5}-\dfrac{3x^9}{8\cdot 9}+\ldots+C$; $(-1;1)$.

14.50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!2n}+C$; $(-\infty;\ +\infty)$.

14.51. $2+6(x-1)+14(x-1)^2+24(x-1)^3+24(x-1)^4$; $(-\infty;\ +\infty)$.

14.52. $e^2\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n!}\right]$; $(-\infty;\ +\infty)$. **14.53.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$; $(0;\ 2)$.

14.54. $-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{6^n}$; $(-8;\ 4)$. **14.55.** $\frac{1}{(1-x)^2}$. **14.56.** $\operatorname{arctg} x$.

14.57. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. **14.60.** 0,7165. **14.61.** 0,336. **14.62.** 0,3090. **14.63.** 7,937. **14.64.** 1,609. **14.65.** 2,0006. **14.66.** 0,1974. **14.67.** 0,9759. **14.68.** 0,201. **14.69.** 0,072. **14.70.** 32,831. **14.71.** 0,494. **14.72.** 0,946. **14.73.** 0,500. **14.74.** 0,098. **14.75.** 0,487. **14.76.** 0,3230; $\delta=0{,}0001$. **14.77.** 0,24489; $\delta=0{,}00001$. **14.78.** 1. **14.79.** 1/3. **14.80.** 1/3. **14.81.** 1/60. **14.82.** $S(p)\approx bp/a$; $\delta\le 0{,}02b/a^2$. **14.83.** $[-1;\ 1]$. **14.84.** $[-1;\ 1]$. **14.85.** $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$. **14.86.** $(-4;\ 4)$. **14.87.** $(-6;\ 0)$. **14.88.** $[0;\ 4]$. **14.89.** $\operatorname{arctg} x$; $[-1;\ 1]$. **14.90.** $1/(1-x^2)$; $(-1;\ 1)$.

14.91. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)!}$; $(-\infty;\ +\infty)$. **14.92.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n-1)!(2n+1)}$.

14.93. $x^2+\left(\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n+2}+\ldots\right)$; $(-1;\ 1)$.

14.94. $1-x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\ldots$; $(-\infty;\ +\infty)$.

14.95. $x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$; $[-1;\ 1]$.

14.96. $e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$; $(-\infty;\ +\infty)$. **14.97.** 5,053. **14.98.** 0,1736. **14.99.** 0,2505. **14.100.** 0,608. **14.101.** 1/2. **Контрольные задания.** *Вариант 14.1.* **1.** $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$. **2.** $(-\infty;+\infty)$. **3.** $\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}\cdot x^{2n+1}}{2n+1}$; $(-1/3;\ 1/3)$. **4.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}}{n!}x^n$; $(-\infty;\ +\infty)$. **5.** 0,9781; $\delta=0{,}00008$. **6.** 0,333. *Вариант 14.2.* **1.** $[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$. **2.** $(2-e;\ 2+e)$. **3.** $-3+7x-11x^2+\ldots+(-1)^{n-1}(1-4n)x^{n-1}+\ldots$; $(-1;\ 1)$. **4.** $4+\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+2^n\right)\frac{x^n}{n!}$; $(-\infty;+\infty)$. **5.** $-0{,}105$; $\delta=0{,}0003$. **6.** 0,310. *Вариант 14.3.* **1.** $[-\sqrt{5}/2;\ \sqrt{5}/2)$. **2.** $[3;5]$.

3. $1+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+\ldots+\frac{x^{6(n-1)}}{(2n-1)!}+\ldots$; $(-\infty;\ +\infty)$. **4.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}}{n!}x^n$, $(-\infty;\ +\infty)$. **5.** 3,11; $\delta=0{,}004$. **6.** $-0{,}364$. **Тест 14.** **1.** 2. **2.** -3. **3.** 2,5. **4.** 3. **5.** 2; 3. **6.** $-1{,}25$. **7.** $-0{,}125$. **8.** 3. **9.** 0,49. **10.** 0,7.

15.6. $R^2 \setminus (0;0)$. **15.7.** $y \neq -x^{2/3}$. **15.8.** $y \geq x^2 - 1$. **15.9.** R^2. **15.10.** Полуплоскость над биссектрисой 2-го и 4-го координатного углов, не включая прямую. **15.11.** $R^2 \setminus (0;\ 0)$. **15.12.** Квадрат с вершинами (1; 1), (1; –1), (–1; –1), (–1; 1). **15.13.** Квадрат с вершинами (–1; 0), (); 1), (1; 0), (0; –1), не включая сторону между вершинами (0; –1) и (1; 0). **15.14.** $y = \sqrt[3]{C/x}$. **15.15.** $y = e^{C/x} - x^2$. **15.16.** $y = \ln C - x\,(C > 0)$. **15.17.** $y = x^2 + C^2$. **15.18.** $y = 1/(2C) - x/2$. **15.19.** $y = (C+1)x^2$. **15.20.** $y = \operatorname{arctg} C + \pi n - x$. **15.21.** 0. **15.22.** Не существует. **15.23.** 1. **15.24.** 0. **15.25.** Не существует. **15.26.** Не существует. **15.31.** $z'_x = e^{x-y}(2x+1)$; $z'_y = e^{x-y}(1-2x)$. **15.32.** $z'_x = \cos(x + \sqrt{y})$; $z'_y = 1/(2\sqrt{y}) \cdot \cos(x + \sqrt{y})$. **15.33.** $z'_x = e^y + x^y\, y/x$; $z'_y = xe^y + x^y \ln x$. **15.34.** $z'_x = 1/[2(x^2+y^2)]$; $z'_y = y/(x+y^2)$. **15.35.** $z'_x = 1/\left[2(x + \sqrt{xy})\right]$; $z'_y = 1/\left[2(\sqrt{xy} + y)\right]$. **15.36.** $z'_x = x^{\sqrt{y}}\sqrt{y}/x$; $z'_y = x^{\sqrt{y}} \ln y/(2\sqrt{y})$. **15.37.** $z'_x = -y/(2x^2 + 2xy + y^2)$; $z'_y = x/(2x^2 + 2xy + y^2)$. **15.38.** $z'_x = y(1+xy)e^{xy}$; $z'_y = x(1+xy)e^{xy}$. **15.39.** $z'_x = -(\cos y^2)/x^2$; $z'_y = -(2y \sin y^2)/x$. **15.40.** $z'_x = -2y/\sqrt{x^2+y^2}$; $z'_y = -x/(x^2+y^2)$. **15.41.** $dz = e^{xy}[(xy + y^2 + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy]$.

15.42. $dz = (e^x dx + 2y dy)/(1 + e^x + y^2)$.

15.43. $dz = [(y + 2\sqrt{xy} - x)dx + (y - 2\sqrt{xy} - x)dy]/(x+y)^2$.

15.44. $dz = y^{-2}\cos(x/y)(y dx - x dy)$.

15.45. $dz = (\arcsin y)/y \cdot dx + x/y^2 \cdot (y/\sqrt{1-y^2} - \arcsin y)dy$.

15.46. $dz = (x^y y/x + y^x \ln y)dx + (y^x x/y + x^y \ln x)dy$.

15.47. $z'_l = 6x^3 - y/2 - x\sqrt{3}/2 + 3\sqrt{3}\,y^2/2$. **15.48.** $z'_l = (1+2y)/\sqrt{2}$.

15.49. 93,4. **15.50.** $3/\sqrt{5}$. **15.51.** $\nabla z = (-2;\ -4)$; $|\nabla z| = 2\sqrt{5}$. **15.52.** $\nabla z = (-6;\ 6)$; $|\nabla z| = 6\sqrt{2}$. **15.53.** $\nabla z = (-1;\ 0)$, $|\nabla z| = 1$. **15.54.** $\nabla z = (-1;\ -1)$; $|\nabla z| = \sqrt{2}$. **15.55.** $\nabla z = (-1;\ -\sqrt{2\pi})$; $|\nabla z| = \sqrt{2\pi + 1}$. **15.62.** $z_{\min}(1;\ 2) = -7$. **15.63.** $z_{\max}(1/3;\ 1/3) = 1/27$. **15.64.** $z_{\max}(1;\ 2/3) = 4/27$.

15.65. $z_{\min}(1/\sqrt[3]{3};\ 1/\sqrt[3]{3}) = 3\sqrt[3]{3}$. **15.66.** $z_{\max}(\pi/3;\ \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$.

15.67. $z_{\min}(0;\,0)=0$. **15.68.** Экстремумов нет. **15.69.** $z_{\min}(-2;\,0)=-2/e$. **15.70.** $z_{\min}(1;\,3)=10-18\ln 3$. **15.71.** $z_{\max}(0;\,0)=2$. **15.72.** $z_{\min}(0;\,0)=0$; $z_{\max}(1;\,0)=2/e$; $z_{\max}(0;\,1)=1/e$. **15.73.** $z_{\max}(x=y\neq 0)=1/2$; $z_{\min}(x=-y\neq 0)=-1/2$. **15.74.** Экстремумов нет. **15.75.** $z_{\max}(1/64;\,1/256)=$ $=1/128$. **15.76.** $z_{\text{наим}}(0;\,1)=4$; $z_{\text{наиб}}(1;\,0)=6$. **15.77.** $z_{\text{наим}}(-1;\,0)=-1$; $z_{\text{наиб}}(1;\,0)=z_{\text{наиб}}(0;\,1)=1$. **15.78.** $z_{\text{наим}}(2-1/\sqrt{2}\,;2-1/\sqrt{2})=\ln(4-\sqrt{2})$; $z_{\text{наиб}}(2+1/\sqrt{2}\,;2+1/\sqrt{2})=\ln(4+\sqrt{2})$. **15.79.** Куб с длиной ребра $a/12$. **15.80.** $z_{\min}(1;\,1)=2$. **15.81.** $z_{\min}(-1/\sqrt{2};\,1/\sqrt{2})=-\sqrt{2}$; $z_{\max}(1/\sqrt{2};-1/\sqrt{2})=$ $=\sqrt{2}$. **15.82.** $z_{\min}(4;\,0)=0$; $z_{\max}(4/3;\,4/3)=64/27$. **15.83.** $z_{\min}(-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2})=$ $=-1-2\sqrt{2}$; $z_{\max}(1/\sqrt{2};\,-1/\sqrt{2})=1-2\sqrt{2}$. **15.84.** $z_{\min}$ не существует; $z_{\max}(150/7;\,80/7)=\sqrt[4]{150/7}\cdot\sqrt[3]{80/7}$. **15.85.** $h=2$; $R=1$.

15.86. $(2R/\sqrt{3}\,;\,2R/\sqrt{3}\,;\;R/\sqrt{3})$. **15.87.** $x=y=z=\sqrt[4]{V}+2d$.

15.91. $y=-31x+285$. **15.92.** $y=-4{,}7x+25{,}2$. **15.93.** $y=0{,}18x+12{,}6$. **15.94.** $y=2{,}62x-1{,}04$; $S_{\text{лин}}=0{,}027$; $S_{\text{альт}}=0{,}1$. **15.95.** $y=0{,}3x+0{,}76$; $S_{\text{лин}}=0{,}012$; $S_{\text{альт}}=0{,}0025$. **15.96.** $y=-0{,}17x+0{,}622$; $S_{\text{лин}}=0{,}007$; $S_{\text{альт}}=0{,}0029$. **15.97.** $y=0{,}0967x+0{,}01x^2$. **15.98.** $a=0{,}8856$; $b=-0{,}87186$. **15.99.** $a=0{,}08$; $b=0{,}00596$. **15.102.** 406/81. **15.103.** 8/3. **15.104.** $(e-1)\ln(5/2)$.

15.105. $48\sqrt{2}/7+56/3$. **15.106.** $-\pi$. **15.110.** $x=225\cdot 450^2$; $y=18^3\cdot 10^6$. **15.111.** 5^{12}; $8\cdot 5^{12}$. **15.112.** $(18/5;\,12/5)$. **15.113.** $(2/27;\,1)$. **15.114.** (1997,6; 2000,12). **15.115.** $\left((2991\sqrt[3]{3}+3)/(6\sqrt[3]{3}+3\right)$; $(499+3\sqrt[3]{3})/(3\sqrt[3]{3}+3/2)$.

15.116. $p=\sqrt{1+p_0^2}$; $x=\sqrt{4\sqrt{1+p_0^2}\Big/\left[1+(\sqrt{1+p_0^2}-p_0)^2\right]-2}$. **15.117.** $p=4$; $x=1$. **15.119.** $E_x(z)=x/[(x-1)\ln(x-1)]$; $E_y(z)=y/[(y-2)\ln(y-2)]$.

15.120. $x=25$; $y=50/3$.

15.121. Верхний полукруг с центром в начале координат, радиусом 1 и выколотой точкой (0; 1). **15.122.** $y=\pm\sqrt{x-\operatorname{arctg}(Cx)+\pi n}$; $n\in Z$.

15.123. $y=\ln C/\ln x$. **15.124.** 1. **15.125.** Не существует. **15.126.** 0.

15.127. $z_x^1=(\ln x)^{(1-y)/y}/(xy)$; $z_y^1=(\ln x)^{1/y}/y^2$.

15.128. $z_x^1=(\arcsin y)\cdot\cos(x\arcsin y)$; $z_y^1=-\cos(\arcsin y)/\sqrt{1-y^2}$.

15.129. $(\sqrt{3}x-y)/(2x^2)$. **15.130.** $(x^{-2}\ln y-y^{-2}\ln x)/\sqrt{2}$. **15.131.** 5.

15.132. 2. **15.133.** $(-\ln 4;\,0)$. **15.134.** Не существует.

15.135. $z_{min}(2;\ 1,5) = -5,5$. **15.136.** Функция не имеет экстремумов.
15.137. $z_{min}(-1;\ -3) = -11$, $z_{max}(3;\ 3) = 15$. **15.138.** $S_{max}(-1;\ 1/2) = 2\sqrt{3}$.
15.139. $-1/6$. **15.140.** $y = 2,1x + 0,3$. **15.141.** $y = 0,107x + 0,0000919x^2$.
15.142. $3/5$. **Контрольные задания.** *Вариант 15.1.* **1.** *а*) (0; 0); *б*) $(1;\ 1/e)$. **2.** $z_{max}(1/256;\ 1/256) = 1/256$. **3.** 1. **4.** 1,05. **5.** $y = 0,5x + 0,9$. **6.** 20/21. *Вариант 15.2.* **1.** *а*) (1; 0); *б*) (1; –1/8). **2.** $z_{max}(6^{-6};6^{-9}) = 862\cdot6^{-9}$. **3.** 0. **4.** –0,75. **5.** $y = -1,4x + 5,5$. **6.** 16/15. *Вариант 15.3.* **1.** *а*) (1; 0); *б*) (1/4; 1/4). **2.** $z_{max}(1/256;\ 1/256) = 1/256$. **3.** 1/8. **4.** –7/4. **5.** $y = 0,32x + 2,7$. **6.** 0. **Тест 15.** **1.** 3.14. **2.** 0,5. **3.** 2. **4.** 2. **5.** 15. **6.** 0,5. **7.** $a = 3$; $b = 2$. **8.** $x_0 = 1$; $y_0 = -1$. **9.** 4. **10.** $a = 69$; $b = 16$. **11.** 3. **12.** $a = 1,4$; $b = -2,5$. **13.** $a = 625$; $b = 8$. **14.** $x = 4,5$; $y = 4,5$. **Учебно-тренировочные тесты.** *Тест МА-2.1.* **1.** 2. **2.** 1. **3.** 3. **4.** 3. **5.** 0,25. **6.** 0,75. **7.** 10. **8.** 2. **9.** 1; 4. **10.** 0,5. **11.** 6. **12.** 3. **13.** 2. **14.** 2; 3. **15.** 0. **16.** –2. **17.** 0,75. **18.** 2. **19.** 2; 3. **20.** 4. *Тест МА-2.2.* **1.** 2. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 4. **5.** 0,5. **6.** 3,2. **7.** 57. **8.** 2. **9.** 3. **10.** –2. **11.** 11. **12.** 4. **13.** 1. **14.** 1; 4. **15.** 2. **16.** 1. **17.** 0,125. **18.** 1. **19.** 5. **20.** 1. *Тест МА-2.3.* **1.** 3. **2.** 1. **3.** 3. **4.** 12. **5.** 2. **6.** 1. **7.** 1,5. **8.** 1. **9.** 2; 4. **10.** 0,5. **11.** –0,5. **12.** 1. **13.** 3. **14.** 3; 5. **15.** 1. **16.** 1. **17.** –0,009. **18.** 3. **19.** 5; 6. **20.** 7.

Глава 16

16.6. а) $13(1 + i/3)$; б) 1. **16.7.** а) $1024i$; б) $512(\sqrt{3} - i)$. **16.7.** а) $3i;5i$; б) 1; 2; $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$; $-1 \pm i\sqrt{3}$. **Контрольные задания.** *Вариант 16.1.* **1.** *а*) $16 + 9i$; *б*) $-3i$; *в*) $46 + 72i$; *г*) $0,82 - 0,24i$.

2. *а*) $2\sqrt{2}[\cos(7\pi/12) + i\sin(7\pi/12))$; *б*) $\sqrt{2}[\cos(11\pi/12) - i\sin(11\pi/12))$; *в*) $1024[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] = 512(1 + i\sqrt{3})$; *г*) $\sqrt[3]{4}[\cos(\pi/9) - i\sin(\pi/9)]$, $\sqrt[3]{4}[\cos(5\pi/9) + i\sin(5\pi/9)]$, $\sqrt[3]{4}[\cos(11\pi/9) + i\sin(11\pi/9)]$. **3.** $-1/2 + i\sqrt{3}/2$. **4.** *а*) $\pm 2i\sqrt{6}/3$; *б*) $1 \pm i$; *в*) $3 \pm 2i$; $-3 \pm 2i$; *г*) $2 \pm 2i$; $-2 \pm 2i$. *Вариант 16.2.* **1.** *а*) $8 - 13i$; *б*) $-4 + 3i$; *в*) $-28 - 46i$; *г*) $0,52 - 0,14i$. **2.** *а*) $2\sqrt{2}[\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)]$; *б*) $(\sqrt{2}/2)[\cos(5\pi/12) + {}$ $+ i\sin(5\pi/12)]$; *в*) $32[\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)] = 32i$; *г*) $\sqrt[3]{2}[\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)] =$ $= (\sqrt[3]{2}/2)(\sqrt{3} + i)$, $\sqrt[3]{2}[\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)] = (\sqrt[3]{2}/2)(-\sqrt{3} + i)$, $\sqrt[3]{2}[\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2] = -\sqrt[3]{2}i$. **3.** $-1/2 + i\sqrt{3}/2$. **4.** *а*) $\pm i\sqrt{5}/2$; *б*) $3 \pm i\sqrt{7}$; *в*) $4 \pm i$; $-4 \pm i$; *г*) $1 \pm i$; $-1 \pm i$. *Вариант 16.3.* **1.** *а*) $-5 + 13i$;

б) $11+i$; *в*) $-66-38i$; *г*) $0{,}18-0{,}74i$. **2.** $2\sqrt{2}[\cos(11\pi/12)+i\sin(11\pi/12)]$; *б*) $\sqrt{2}[\cos(7\pi/12)-i\sin(7\pi/12)]$; *в*) $1024[\cos(\pi/3)-i\sin(\pi/3)]=512(1-i\sqrt{3})$; *г*) $\sqrt[3]{4}[\cos(\pi/9)+i\sin(\pi/9)]$, $\sqrt[3]{4}[\cos(7\pi/9)+i\sin(7\pi/9)]$, $\sqrt[3]{4}[\cos(5\pi/9)-i\sin(5\pi/9)]$. **3.** $-1/2-i\sqrt{3}/2$. **4.** *а*) $\pm i\sqrt{14}/2$; *б*) $-5\pm i\sqrt{3}$; *в*) $1\pm 2i$; $-1\pm 2i$; *г*) $\sqrt{2}/2\pm i\sqrt{2}/2$; $-\sqrt{2}/2\pm i\sqrt{2}/2$. **Тест 16. 1.** 2. **2.** 150°. **3.** 20. **4.** –0,5. **5.** 170. **6.** 165°. **7.** 1 000 000. **8.** –120°. **9.** 162°. **10.** 4.

Оглавление

Учебное пособие

Высшая математика для экономистов

Практикум

Под редакцией Наума Шевелевича Кремера

Редактор *О.И. Левшина*
Корректор *Г.Б. Костромцова*
Оригинал-макет *Н.В. Спасской*
Оформление художника *В.А. Лебедева*

Лицензия серии ИД № 03562 от 19.12.2000
Подписано в печать 27.07.2006. (с готовых ps-файлов). Изд. № 1013
Формат 60×90 1/16. Усл. печ. л. 30,0. Уч.-изд. л. 23,0
Тираж 30 000 экз. (1-й завод — 5000). Заказ 4006

ООО «ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮНИТИ-ДАНА»
Генеральный директор *В.Н. Закаидзе*

123298, Москва, ул. Ирины Левченко, 1
Тел.: 8-499-740-60-15. Тел./факс: 8-499-740-60-14
www.unity-dana.ru E-mail: unity@unity-dana.ru

Отпечатано в ОАО ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14