

МАТЕМАТИКА для ИБМ7-12
Программа для подготовки к экзамену. 1 семестр 2014-15 гг.

Модуль 1 Математический анализ

- 1.** Логическая символика, кванторы. Необходимое условие, достаточное условие. Отображения и функции. Способы задания функций. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Класс элементарных функций. Примеры. Окрестности точки (в том числе проколотые, правые и левые).
- 2.** Числовые последовательности. Ограниченные последовательности (сверху, снизу и двусторонне), примеры. Монотонные последовательности: возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие, примеры. Предел последовательности, его свойства. Сходящиеся последовательности. Необходимое условие сходимости последовательности, достаточное условие. Число ε . Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства. Примеры: ограниченной последовательности, не имеющей предела; пример сходящейся немонотонной последовательности. Свойства предела последовательности.
- 3.** Определение предела (по Коши) функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ и при $x \rightarrow \infty$. Односторонние пределы функции при $x \rightarrow a+$, при $x \rightarrow -\infty$ и т.д. Пример: доказать, что $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$. Определение односторонних пределов типа $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.
- 4.** Определение функции, непрерывной в точке, с примером. Привести пример функции, разрывной в точке $x = 0$. Теоремы о (а) непрерывности в области определения всех элементарных функций; (б) перестановке знаков предела и непрерывной функции; применение этих теорем для вычисления пределов, примеры.
- 5.** Определение бесконечно малой функции, пример. Определение бесконечно большой функции при $x \rightarrow a$ (символически $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$). Свойства бесконечно малых функций. Свойства пределов.
- 6.** Первый и второй замечательный предел, их следствия.
- 7.** Сравнение функций при данном стремлении: определение отношений $f(x) \sim g(x)$ (функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны) при $x \rightarrow a$, и $f(x) = o(g(x))$ (функция $f(x)$ есть о-малое, т.е. бесконечно мала относительно $g(x)$). Свойства этих отношений, в частности, критерий эквивалентности двух функций. Определение порядка малости одной бесконечно малой функции относительно другой (или порядка роста одной бесконечно большой функции относительно другой) при данном стремлении аргумента. Примеры несравнимых функций.
- 8.** Таблица основных эквивалентностей. Применение эквивалентностей для вычисления пределов.
- 9.** Определение точек разрыва функции (предварительно сформулировать определение функции, непрерывной в точке). Классификация разрывов: определения устранимого разрыва, 1 рода, 2 рода, геометрическая иллюстрация.
- 10.** Определение функции, непрерывной на отрезке. Свойства функции, непрерывной на отрезке: первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности функции на отрезке), вторая теорема Вейерштрасса (о достижении наибольшего и наименьшего значений функции). Теорема Больцано-Коши (о точке отрезка, в которой функция обращается в нуль). Теорема о существовании и непрерывности обратной функции, привести пример.
- 11.** Определение производной функции, заданной в окрестности точки x_0 , определение односторонних производных. Пример функции, не имеющей производной функции в точке. Геометрический смысл производной (тангенс угла наклона касательной к графику функции, выполнить чертёж). Определение бесконечной производной функции, пример, геометрическая иллюстрация.
- 12.** Производная константы и функции $C \cdot f(x)$ (вывод). Правила нахождения производных (суммы, разности, произведения и частного двух функций). Теоремы о производной: (а) сложной функции; (б) обратной функции (формулировка). Вывод таблицы производных основных элементарных функций.

13. Определение и обозначение дифференциала функции, пример. Свойства дифференциала. Формулы для производной функции заданной параметрически и неявно, примеры. Определение производной второго порядка от функции, обозначение.

14. Правило Лопиталья – Бернулли, раскрытия неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, примеры.

15. Асимптоты графика функции (вертикальные, горизонтальные, наклонные) и их нахождение.

16. Определение монотонной (возрастающей, убывающей) функции на данном промежутке. Определение локального максимума, минимума, экстремума функции. Исследование функции на экстремумы и монотонность с помощью первой производной.

17. Определение выпуклости графика (вверх, вниз) на данном промежутке, определение точки перегиба. Исследование графика функции на выпуклость и перегибы с помощью второй производной

18. Общая схема исследования функции и построение её графика.

Модуль 2. Аналитическая геометрия

19. Определители 2 и 3-го порядков. Общая формула определителя произвольного порядка. Способ разложения определителя по строке или столбцу. Метод Крамера решения линейных систем с двумя и тремя неизвестными.

20. Геометрические векторы. Действия над ними: сложение, умножение на число. Коллинеарные и компланарные векторы. Линейная зависимость. Базис на плоскости, в пространстве, координаты. Привести пример

21. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Определение, свойства, вычисление, приложения.

22. Каноническое и общее уравнения прямой на плоскости. Направляющий и нормальный вектор прямой, связь с коэффициентами уравнения.

23. Общее уравнение плоскости пространстве. Канонические уравнения прямой в пространстве.

24. Арифметические векторы, линейные операции над ними. Скалярное произведение арифметических векторов. Линейная зависимость (независимость) арифметических векторов, примеры.

25. Матрица и её размер. Транспонирование матрицы, линейные операции над матрицами (сложение и умножение на число). Свойства этих операций. Элементарные преобразования матриц (строк столбцов). Изменение определителя при элементарных преобразованиях.

26. Умножение матриц, условие существования произведения двух матриц. Единичная матрица. Свойства операции умножения. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Обратная матрица: определение, условие существования, метод(ы) нахождения. Решение матричных уравнений вида $AX = C$, $XA = C$, $AXB = C$ с невырожденными матрицами A и B , вывод формул для нахождения неизвестной матрицы X .

27. Приведение матрицы к ступенчатому и единично-ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк (алгоритм). Ранг матрицы (определение, свойства, способ вычисления).

28. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), однородные и неоднородные; координатная, векторная и матричная записи СЛАУ. Совместные и несовместные СЛАУ, критерий Кронекера – Капелли.