Задачи к семинарам по линейной алгебре для групп ИБМ4–21, 4–22

весенний семестр

Олег Кравченко, ассистент каф. ФН–1, 12 февраля 2012 г.

Занятие 1

В задачах 1—5 проверить, что следующие множества являются линейными пространствами.

Задача 1. Множество $\mathscr{V}_3$ всех геометрических векторов.

> **Операции над геометрическими векторами:**
> Сумма векторов $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$ есть вектор $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$, проведённый из точки A в точку C, который обозначается $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.
> Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на действительное число λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\boldsymbol{a}$, такой, что верны равенства:
> 1) $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$;
> 2) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$ сонаправлены при $\lambda > 0$ и противоположнонаправлены при $\lambda < 0$.

Задача 2. Множество $\mathscr{P}_n$ всех многочленов $p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ степени $\leqslant n-1$ с естественным образом введёнными операциями сложения многочленов и умножения их на числа.

Задача 3. Множество $\mathscr{M}_{m,n}$ всех матриц размера $m \times n$.

> **Операции над матрицами:**
> Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ порядка $(m \times n)$ называется матрица $C = (c_{ij})$ того же порядка, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:
>
> $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$
>
> Произведением αA матрицы $A = (a_{ij})$ на число α (действительное или комплексное) называется матрица $B = (b_{ij})$, получающаяся из матрицы A умножением всех её элементов на α
>
> $$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$
>
> Произведением $AB\,(m \times n)$ — матрицы $A = (a_{ij})$ на $(n \times k)$ – матрицу $B = (b_{ij})$ называется $(m \times k)$ матрица $C = (c_{ij})$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i–й строке и j–м столбце равен сумме произведений соответствующих элементов i–й строки матрицы A и j–го столбца матрицы B:
>
> $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Задача 4. Множество всех геометрических векторов, исходящих из начала координат, концы которых лежат на фиксированной прямой.

Задача 5. Множество всех сходящихся последовательностей.

Задача 6. В пространстве $\mathscr{V}_3$ заданы векторы $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Доказать, что система $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ образует базис в $\mathscr{V}_3$, и написать матрицу перехода $T_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$, где $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k})$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ в базисе $\mathscr{B}'$.

Задача 7. Пусть $\mathscr{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ и $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$ — прямоугольные базисы в $\mathscr{V}_3$. Найти матрицу перехода $T_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$ и выписать столбец координат вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, если базис $\mathscr{B}'$ получен перестановкой $\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}' = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{i}$.

Задача 8. Доказать, что система арифметических векторов $x_1 = (1, 2, 0, 4)$, $x_2 = (-1, 0, 5, 1)$, $x_3 = (1, 6, 10, 14)$ линейно зависима, и написать нетривиальное соотношение вида $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$. Найти ранг и все базисы этой системы.

Задача 9. Доказать, что система многочленов $t^3 + t^2 + t + 1$, $t^2 + t + 1$, $t + 1$, 1 линейно незасима.

Задача 10. Найти координаты многочлена $t^2 - t + 2$ в базисе 1, $t - 1$, $(t-1)^2$.

Задача 11. В произвольном пространстве $\mathscr{L}_n$ векторы $\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ заданы своими координатами в некотором базисе $\mathscr{B}$. Доказать, что система $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ образует базис в $\mathscr{L}_n$, и найти столбец X' координат вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе, если

$$E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Задача 12. В произвольном пространстве $\mathscr{L}_n$ векторы $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ заданы своими координатами в некотором базисе. Доказать, что системы $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ и $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ — базисы в $\mathscr{L}_n$, и используя написать матрицу перехода $T_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, если

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E'_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание к занятию 1

В задачах $13, 14$ проверить, что следующие множества являются линейными пространствами.
В задачах (15)—(17) выяснить, являются ли следующие множества линейными пространствами.

Задача 13. Множество $\mathbf{R}^n$ всех арифметических n— компонентных векторов $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$.

Сложение $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и $y = (y_1,\ \ldots,\ y_n)$:

$$x + y = (x_1 + y_1,\ \ldots,\ x_n + y_n).$$

Умножение на число:

$$\lambda x = (\lambda x_1,\ \ldots,\ \lambda x_n).$$

Задача 14. Множество $C_[a, b]$ всех функций $f(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с естественным образом введёнными операциями сложения функций и умножения их на числа.

Задача 15. Множество всех геометрических веторов $\mathscr{V}_1$, коллинеарных фиксированной прямой.

Задача 16. Множество всех геометрических веторов, удовлетворяющих условию $|x| > a$, где $a > 0$ — фиксированное число.

Задача 17. Множество всех расходящихся последовательностей.

Задача 18. Базис $\mathscr{B}'$ получен изменением на противоположное направление всех трёх базисных ортов $\mathscr{B} = (\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

Задача 19. Базис $\mathscr{B}'$ получен поворотом базиса $\mathscr{B}$ на угол φ вокруг орта $\boldsymbol{i}$.

Задача 20. Найти ранг и какой—нибудь базис системы геометрических векторов $\boldsymbol{x}_1 = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{x}_2 = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{x}_3 = -4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{x}_4 = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Задача 21. Доказать, что система многочленов $t^2+1,\ -t^2+2t,\ t^2-t$ образует базис в пространстве $\mathscr{P}_3$. Выписать в этом базисе столбец координат многочлена $-2t^2 + t - 1$.

Задача 22. В произвольном пространстве $\mathscr{L}_n$ векторы $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Доказать, что система $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ — базис в $\mathscr{L}_n$, и найти столбец X' координат вектора x в этом базисе, если

$$E'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad E'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$