Интегралы и дифференциальные уравнения

Экзаменационная программа. ИБМ, 1 курс, 2-й семестр, 2015 год

Модуль 1. Интегральное исчисление

1. Первообразная и ее свойства. Неопределенный интеграл, его свойства, связь с дифференциалом. Таблица неопределенных интегралов. Интегрирование подстановкой (в частности, подведением под знак дифференциала) и по частям. Нахождение интегралов типа $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ и $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

2. Правильные и неправильные рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших. Методы нахождения неопределенных коэффициентов. Интегрирование простейших дробей 1 го, 2-го, и 3-го типа. Интегрирование простейших дробей 4-го типа с помощью рекуррентной формулы (**вывести** формулу понижения). Интегрирование правильных и неправильных рациональных дробей.

3. Методы интегрирования тригонометрических и иррациональных функций. Применение тригонометрических подстановок для нахождения интегралов, содержащих $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

4. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл, как предел интегральных сумм. Теорема о существовании определенного интеграла. Физическая и экономическая интерпретация интеграла. Геометрическая интерпретация определенного интеграла от: (а) положительной функции; (б) знакопеременной функции. Аддитивность определенного интеграла. Обобщенная аддитивность.

5. **Доказать** свойства определенного интеграла: линейность, интеграл от константы, переход к неравенству. Определение среднего значения функции на отрезке. **Доказать** теоремы об оценке и о среднем значении определенного интеграла.

6. **Доказать** теорему о производной интеграла по переменному верхнему пределу. **Вывести** формулу Ньютона-Лейбница.

7. Вычисление определенного интеграла подстановкой и по частям (**вывод*** формул). **Вывести** формулы для интегрирования периодических функций (два свойства); четных и нечетных функций по симметричному относительно начала координат отрезку.

8. Полярные координаты на плоскости, их связь с декартовыми координатами. Уравнения простейших линий в полярной системе координат: (1°) луча (выходящего из начала координат); (2°) прямой (не проходящей через начало координат); (3°) окружности (а) с центром в начале координат и (б) проходящей через начало координат; (4°) кардиоиды (4 случая) и (5°) лемнискаты (4 случая). Сделать все необходимые рисунки.

9. **Вывод** формул для вычисления площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла: (а) в декартовых координатах (две формулы) и (б) в полярных координатах.

10. **Написать и *вывести** формулу для нахождения с помощью определенного интеграла объема тела по площадям параллельных сечений и объема тела вращения для случаев, когда: (а) ось вращения совпадает с осью интегрирования; (б) ось вращения не совпадает с осью интегрирования (по две формулы для каждого случая: интегрирования по x и по y), все формулы сопровождать чертежом.

11. **Вывести** формулы для вычисления с помощью определенного интеграла длины дуги кривой, заданной: (1°) параметрически; (2°) явно (два случая); (3°) в полярных координатах.

12. **Написать и *вывести** формулы для вычисления с помощью определенного интеграла площади поверхности, полученной вращением (вокруг: (а) оси OX, (б) оси OY кривой, заданной: (1°) параметрически; (2°) явно (два случая); (3°) в полярных координатах. Каждую формулу сопровождать чертежом.

Модуль 2. Дифференциальные уравнения

13. Дифференциальное уравнение (ДУ) первого порядка, его решения (частные и общее). Общий и частные интегралы, интегральные кривые. Задача Коши для ДУ первого порядка и ее геометрическая интерпретация. Теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши (без док-ва).

14. Методы решения некоторых ДУ первого порядка: с разделяющимися переменными, с однородной правой частью, линейных и типа Бернулли.

15. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, частные и общее решения. Задача Коши, ее геометрическая интерпретация. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка (без док-ва). Методы понижения порядка для некоторых типов ДУ второго порядка.

16. Линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ) 2-го порядка, однородные и неоднородные. Теорема о существовании и единственности решения **линейного** ДУ 2-го порядка (без док-ва). *Дифференциальный оператор $L(y)$, операторная запись однородного и неоднородного ЛДУ 2-го порядка. ***Доказать** теорему о линейности оператора $L(y)$. **Доказать** свойство частных решений однородного ЛДУ (т.е. линейность пространства его решений).

17. Определение линейно зависимых и линейно независимых систем функций на промежутке. Примеры. Определитель Вронского. Теоремы: (а) о вронскиане линейно зависимых функций и её следствие; (б) о свойстве частных решениях однородного ЛДУ, вронскиан которых равен нулю хотя бы в одной точке, и её следствие (**доказательства** для $n = 2$).

18. Доказать теорему о размерности пространства решений ОЛДУ 2-го порядка, структура общего решения однородного ЛДУ, фундаментальная система решений.

19. Вывести формулу Остроградского – Лиувилля (в виде ДУ для вронскиана частных решений ОЛДУ 2-го порядка) и ее два следствия: (а) явная формула для этого вронскиана; (б) нахождение второго частного решения однородного ЛДУ, независимого от первого известного частного решения этого ДУ.

20. Однородные ЛДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. **Доказательство** условия, при котором функция $y = e^{\lambda x}$ является решением однородного линейного ДУ с постоянными коэффициентами. Построение общего решения ОЛДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами по корням характеристических уравнений (**вывод**).

21. Неоднородные ЛДУ 2-го порядка. **Доказать** свойство частных решений и теорему о структуре общего решения неоднородного ЛДУ. **Доказать** теорему о наложении частных решений неоднородного ЛДУ 2-го порядка.

22. Решение неоднородного ЛДУ 2-го порядка методом Лагранжа – методом вариации постоянных для (**вывод**). Метод вариации постоянной для линейного ДУ первого порядка. Примеры.

23. Решение неоднородных ЛДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида методом неопределенных коэффициентов (без вывода). Примеры.

* – на усмотрение лектора.