МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Э. БАУМАНА

В.В. Дуров, А.В. Мастихин, А.С. Савин

ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Методические указания
к выполнению типового расчета

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2004

УДК 517.1
ББК 22.151.5
Д84

Рецензенты *А.В. Неклюдов, Е.М. Попова*

Дуров В.В., Мастихин А.В., Савин А.С.
Д84 Пределы и непрерывность функций: Метод. указания к выполнению типового расчета. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 62 с.: ил.

ISBN 5-7038-2473-7

Даны определения и формулировки теорем о пределах числовых последовательностей и функций. Подробно разобраны примеры вычисления пределов различных функций. Приведены примеры сравнения функций при заданном стремлении аргумента, выделения главных частей функций и использования эквивалентных функций при вычислении пределов. Дана классификация точек разрыва функций. Приведены задачи типового расчета.

Для студентов всех факультетов МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Табл. 4. Библиогр. 3 назв.

УДК 517.1
ББК 22.151.5

ISBN 5-7038-2473-7

1. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n, то говорят, что задана (числовая) *последовательность* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, которую обозначают $\{x_n\}$. Отдельные числа x_k, $k = 1, 2, \ldots$ называют членами или элементами последовательности $\{x_n\}$.

Замечание. Как правило, последовательность задается формулой для вычисления значений ее членов по их номерам.

Пример 1. Формула $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ задает числовую последовательность $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots$

Определение 2. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, или $\lim x_n = a$,или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

В логических символах определению предела последовательности можно придать вид $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right) \iff \left(\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \right.$ $\left. : \forall n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right)$

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$, имеющая предел a, называется *сходящейся* (к числу a). Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется *расходящейся*.

Замечание. Доказательство того, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, обычно начинают с формальной записи неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$, далее путем различных упрощений находят достаточное условие его выполнения в виде $n > N(\varepsilon) \forall\varepsilon > 0$.

Точное решение неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ относительно n для доказательства того, что $\lim x_n = a$, в большинстве случаев очень сложно и совершенно не обязательно.

Пример 2. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$ сходится к числу $a = \dfrac{2}{3}$, определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > N(\varepsilon)$. Заполнить таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$			

Р е ш е н и е. Из цепочки соотношений

$$|x_n - a| = \left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| = \frac{5}{3(3n+1)} < \varepsilon$$

следует, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ выполняется при всех $n > \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{3\varepsilon} - 1\right) = N(\varepsilon)$. Вычислив $N(\varepsilon)$ при значениях, равных 0,1, 0,01 и 0,001, заполняем таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$	5	55	555

Пример 3. Показать, что последовательность $x_n = \dfrac{n^2 + n\sin n}{n^2}$ имеет предел $a = 1$.

Р е ш е н и е. Оцениваем модуль разности

$$|x_n - a| = \left|\frac{n^2 + n\sin n}{n^2} - 1\right| = \frac{|\sin n|}{n} \le \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Очевидно, последнее неравенство $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ в этой цепочке выполняется при $n > \dfrac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$, это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Многие оценки основаны на формуле бинома Ньютона:

$$\forall a, b \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N},$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n b^n,$$

где так называемые биномиальные коэффициенты C_n^k подсчитываются по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

В частности, при $a = 1, b > -1$, удержав в правой части формулы бинома Ньютона лишь два слагаемых, получим неравенство Бернулли

$$(1+b)^n \ge 1 + nb. \qquad (1)$$

Определение 4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой.

2. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Теорема 1. Последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a тогда и только тогда, когда $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Пример 4. Показать, что последовательность $x_n = q^n$, где $|q| < 1$, является бесконечно малой.

Р е ш е н и е. При $q = 0$ это очевидно. Пусть $0 < |q| < 1$. Воспользовавшись неравенством Бернулли (1), получим цепочку соотношений

$$\frac{1}{|q|^n} = \left[1 + \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)\right]^n \ge 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right),$$

из которой следует, что

$$|q^n - 0| = |q|^n < \frac{1}{n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)} < \varepsilon$$

при

$$n > \frac{1}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)} = N(\varepsilon).$$

Это и означает, что $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Теорема 2. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и, начиная с некоторого номера n_0, выполняется неравенство $x_n \le y_n$, то $\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$.

Замечание. Из неравенства $x_n < y_n$ не следует, что $\lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n$, а следует лишь нестрогое неравенство $\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$.

Пример 5. Пусть $x_n = 0$, $y_n = \frac{1}{n}$. Очевидно, что $x_n < y_n$ при всех n, но $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Теорема 3 (о пределе «зажатой последовательности»). Если члены последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, начиная с некоторого номера n_0, удовлетворяют неравенствам $x_n \le y_n \le z_n$ и при этом $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, то последовательность $\{y_n\}$ сходится к числу a.

Пример 6. Показать, что последовательность $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ бесконечно малая.

Р е ш е н и е. Из соотношений

$$0 < x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

видно, что последовательность зажата бесконечно малыми последовательностями $\{0\}$ и $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$, таким образом, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Определение 5. Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ называются соответственно суммой, разностью, произведением и частным последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. В случае частного предполагается, что $\{y_n\} \ne 0$ при $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 4. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$; $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$; $\lim_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}, b \ne 0$.

Теорема 5. Если $f(x)$ элементарная функция, а элементы последовательности и ее предел лежат в области определения функции $f(x)$, то $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

Пример 7. Найти предел последовательности

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Р е ш е н и е. Поскольку в сумме, определяющей x_n, каждое последующее слагаемое меньше предыдущего, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ зажата последовательностями $y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ и $z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, пределы которых равны единице. Действительно, в силу теорем 4 и 5

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1.$$

По теореме 3 $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Пример 8. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Р е ш е н и е. Пусть $x_n = \frac{2^n}{n!}$, тогда

$$0 < x_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{n} \le 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$

при $n \to \infty$, в силу примера 4 и теоремы 4. Таким образом, последовательность зажата бесконечно малыми последовательностями, тогда по теореме 3 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Пример 9. Доказать, что $\forall a \in \mathbf{R}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Р е ш е н и е:

$$0 \le \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdots \frac{|a|}{k} \cdot \frac{|a|}{k+1} \cdots \frac{|a|}{n} \cdot \le \frac{|a|^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k+1}\right)^{n-k} \le$$

$$\leq \frac{(k+1)^k}{k!}\left(\frac{|a|}{k+1}\right)^n \longrightarrow 0$$

при $n \longrightarrow \infty$, если значение k выбрано (и зафиксировано) из условия $\frac{|a|}{k+1} < 1$. Последовательность $\{|\frac{a^n}{n!}|\}$ является бесконечно малой, так как зажата бесконечно малыми последовательностями. Тогда является бесконечно малой и последовательность $\{\frac{a^n}{n!}\}$.

Пример 10. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Р е ш е н и е. Из оценки

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n},$$

верной для любого $n \in \mathbf{N}$, следует, что последовательность $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ зажата бесконечно малыми последовательностями, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Пример 11. Доказать,что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$.

Р е ш е н и е. При $a = 1$ это очевидно, пусть $a > 1$, тогда и $\sqrt[n]{a} > 1$. С помощью неравенства Бернулли (1) получаем

$$a = \left[1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right]^n > 1 + n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) > n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) > 0,$$

откуда следует, что $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n}$ или $1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a}{n}$. Таким образом, последовательность $\{\sqrt[n]{a}\}$ зажата последовательностями $\{1\}$ и $\{1 + \frac{a}{n}\}$, имеющими общий предел, равный единице. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Пусть $0 < a < 1$, тогда $\frac{1}{a} > 1$ и, по доказанному,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Пример 12. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, в которой удержано только третье слагаемое, получим

$$n = \left[1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k =$$

$$= 1 + n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n >$$

$$> \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2,$$

где $n \geq 2$. Откуда следует, что $\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 < \frac{2}{n-1}$ или $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Таким образом, последовательность $\{\sqrt[n]{n}\}$ зажата последовательностями $\{1\}$ и $\left\{1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right\}$, имеющими общий предел, равный единице. Тогда, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Пример 13. Доказать, что $\forall a > 1 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

Р е ш е н и е. Поскольку $a - 1 > 0$, можно применить прием из примера 12. В результате для $n \geq 2$ получим $a^n = [1 + (a-1)]^n > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2$, откуда следует, что $0 < \frac{n}{a^n} < \frac{2}{(a-1)^2(n-1)} \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, что означает $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

Пример 14. Доказать, что $\forall a > 1 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$.

Р е ш е н и е. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство

$$\left|\frac{\log_a n}{n} - 0\right| = \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$$

эквивалентно неравенству $n < (a^\varepsilon)^n$. Поскольку $a^\varepsilon > 1$, в силу примера 13, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(a^\varepsilon)^n} = 0$. Отсюда следует, что существует число N такое, что неравенство $\frac{n}{(a^\varepsilon)^n} < 1$, или эквивалентное ему

$n < (a^\varepsilon)^n$, будут выполняться при всех $n > N$. Для тех же n очевидно, что выполняется неравенство $\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$.

Замечание. Из примеров 13 и 14 следует, что при любом $a > 1$ последовательность $\{n\}$ возрастает медленнее, чем последовательность $\{a^n\}$, и быстрее, чем последовательность $\{\log_a n\}$.

3. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ЧИСЛО ЭЙЛЕРА *e*

Определение 6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует число C такое, что $|x_n| \le C$, $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 6. Сходящаяся последовательность ограничена.

Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, но не сходится.

Теорема 7. Для сходимости последовательности $\{x_n\}$ необходимо, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0. \tag{2}$$

Пример 15. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$: $-1, 1, -1, \ldots (-1)^n, \ldots$. Так как $|x_{n+1} - x_n| = 2$, то очевидно, что условие (2) не выполняется и последовательность расходится.

Определение 7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей*, если $x_n \le x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *невозрастающей*, если $x_n \ge x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Обобщенно неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*.

Теорема 8. Монотонная ограниченная последовательность сходится.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Применив формулу бинома Ньютона, получим

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots$$

$$\ldots (1 - \frac{k-1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots (1 - \frac{n-1}{n}).$$

Последняя сумма содержит n положительных членов. Увеличив n на единицу, увидим, что, во-первых, в сумме появится еще один $(n+1)$-й член, который больше нуля, во-вторых, выражение в каждой скобке увеличится. Итак, $x_n < x_{n+1}$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ возрастает.

Заменяя теперь каждую скобку в сумме x_n единицей, получим

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{n!}.$$

Заметим, что для $k \ge 2$ верно $k! = 2 \cdot 3 \cdot \ldots k \ge 2^{k-1}$. Поэтому

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{(1 - \frac{1}{2})} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

т. е. $x_n < 3$. Итак, последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху, значит, она имеет предел, который, следуя Эйлеру, обозначают через e. Число e играет исключительную роль в математике и ее приложениях. Например, в математическом анализе используются главным образом логарифмы по основанию e, которые называются *натуральными* и обозначаются символом ln, так что $\ln = \log_e$. Применение натуральных логарифмов значительно упрощает многие соотношения математического анализа. Связь между натуральными логарифмами и обычными (десятичными) получим, логарифмируя по основанию 10 тождество $x = e^{\ln x}$, что дает $\lg x = M \cdot \ln x$, где число $M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0,434294\ldots$ называется *модулем перехода*.

Число e иррационально (e=2,7182818284590...) и трансцедентно, т. е. не может быть корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами.

4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение 8. Пусть $a \in \mathbf{R}$. Окрестностью $O(a)$ точки a называется любой интервал (b, c), содержащий точку a.

Проколотой окрестностью $\dot{O}(a)$ точки a называется любая ее окрестность, из которой исключается сама точка a.

Определение 9. Пусть $\varepsilon > 0$, ε-окрестностью $O_\varepsilon(a)$ точки a называется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Проколотой ε-окрестностью $\dot{O}_\varepsilon(a)$ точки a называется ее ε-окрестность, из которой исключена сама точка a. Окрестность ε и проколотую окрестность ε точки a можно задать в виде

$$O_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

$$\dot{O}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon).$$

Определение 10 (Коши). Число A называется *пределом функции* $f(x)$в точке a (или при $x \to a$), если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) : \ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Здесь принятые обозначения $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Заметим, что в самой точке a функция $f(x)$ может быть не определена.

Пример 16. Показать, что $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x} \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

Р е ш е н и е. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x} \sin \frac{1}{x}$ определена всюду, кроме точки $x = 0$. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$, тогда неравенство

$$|\sqrt[3]{x} \sin \frac{1}{x} - 0| = |\sqrt[3]{x}||\sin \frac{1}{x}| \le |\sqrt[3]{x}| < \varepsilon$$

выполняется при всех x таких, что

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon^3.$$

Определение 11. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta$, выполняется условие $|f(x) - A| < \varepsilon$,

$$\left(\lim_{x \to \infty} f(x) = A\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

Аналогично определяются пределы функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$:

$$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = A\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right),$$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = A\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ x < -\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

Пример 17. Предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$, поскольку $\forall\varepsilon > 0 \quad |\dfrac{1}{x} - 0| = \dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$ при $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$.

Определение 12. Число A_- называется *пределом слева* функции $f(x)$в точке a , если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ a - \delta < x < a \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Здесь принято обозначение $A_- = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a - 0)$.

Число A_+ называется *пределом справа* функции $f(x)$в точке a , если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Здесь принято обозначение $A_+ = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$.

Числа A_-, A_+ называются *односторонними пределами* функции $f(x)$ в точке a.

Пример 18. Определим функцию sign (читается сигнум):

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = f(-0) = -1$, а $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = f(+0) = 1$.

В заключение сделаем общее замечание о конечном пределе. Мы изучили понятие конечного предела функции $f(x)$ при $x \to a$ (точка a конечна или нет). При этом были рассмотрены шесть возможных различных типов стремлений аргумента x к точке a (два двусторонних и четыре односторонних — см. определение 10—12). В подходе Коши каждому из этих типов отвечает свой тип окрестности:

Тип стремления:	Тип окрестности:
$x \to a$ (точка a конечна)	$(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$
$x \to a+0$ (точка a конечна)	$(a, a+\delta)$
$x \to a-0$ (точка a конечна)	$(a-\delta, a)$
$x \to \infty$ (точка a бесконечна)	$(-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$
$x \to +\infty$ (точка a бесконечна)	$(\delta, +\infty)$
$x \to -\infty$ (точка a бесконечна)	$(-\infty, -\delta)$

Условимся любой из шести типов стремлений записывать как $x \to *$, а соответствующий ему тип проколотой окрестности как $\dot{O}_\delta(*)$. Тогда определение конечного предела по Коши может быть дано сразу для всех шести типов в форме

$$\left(\lim_{x \to *} f(x) = A\right) \iff$$

$$\iff \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \ x \in \dot{O}_\delta(*) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

5. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Определение 13. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to *$, если $\lim\limits_{x \to *} \alpha(x) = 0$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \ \forall x \in \dot{O}_\delta(*) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$.

Определение 14. Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to *$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \ \forall x \in \dot{O}_\delta(*) \Rightarrow |\beta(x)| > \varepsilon.$$

О бесконечно большой при $x \to *$ функции $\beta(x)$ говорят, что она имеет при $x \to *$ бесконечный предел, и пишут $\lim\limits_{x \to *} \beta(x) = \infty$.

Пример 19. Предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$, поскольку $\forall \varepsilon > 0 \ \ \left|\frac{1}{x}\right| > \varepsilon$ при $0 < |x| < \dfrac{1}{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$.

Если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ x \in \dot{O}_\delta(*) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$, то пишут $\lim\limits_{x \to *} f(x) = +\infty$.

Если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ x \in \dot{O}_\delta(*) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$, то $\lim\limits_{x \to *} f(x) = -\infty$.

Теорема 9. Если функция $f(x)$ — бесконечно малая в точке a и в некоторой окрестности этой точки $f(x) \neq 0$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно большой в этой точке.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 10. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, то $\lim\limits_{x \to a}\{f(x) \pm \pm g(x)\} = A \pm B$, $\lim\limits_{x \to a}\{f(x) \cdot g(x)\} = A \cdot B$, $\lim\limits_{x \to a}\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\} = \dfrac{A}{B}$, если в последнем пределе $g(x) \neq 0$ и $B \neq 0$.

Замечание. В некоторых случаях прямое применение теоремы 10 к вычислению пределов невозможно. Например, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, но нельзя утверждать, что $\lim\limits_{x \to a}\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\} = \dfrac{0}{0}$, поскольку выражение $\frac{0}{0}$ не имеет смысла. Здесь появляется так называемая неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Аналогично возникают неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$. Раскрыть какую-нибудь неопределенность означает вычислить отвечающий ей предел; $[0^\infty]=0$ не является неопределенностью.

6. ПРЕДЕЛ ОТНОШЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ И НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Вычисление пределов функций есть важная и практически полезная задача. Рассмотрим некоторые способы ее решения.

Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно такие, что $P_n(a)=Q_m(a)=0$. Если требуется вычислить предел отношения этих многочленов $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, то ответ не может быть получен путем осуществления арифметической операции деления, поскольку в данном случае она невыполнима (деление на нуль не определено).

Тогда следует разделить оба многочлена на $(x-a)$. По теореме Безу такое деление осуществляется без остатка, т. е. $P_n(x)=$ $=(x-a)P_{n-1}(x), Q_n(x)=(x-a)Q_{n-1}(x)$. Если $P_{n-1}(a)\neq 0$ или $Q_{n-1}(a)\neq 0$, то неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ раскрыта, если нет, то деление на $(x-a)$ следует продолжить.

Пример 20. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^3+x^2-8x+4}$.

Р е ш е н и е. Непосредственной подстановкой $x=2$ в числитель и знаменатель убеждаемся, что имеем дело с неопределенностью вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Делим числитель и знаменатель на $(x-2)$, получаем

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x^2+3x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2+3x-2}=\frac{5}{8}.$$

Пример 21. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{x^3+3x^2+3x+1}$.

Р е ш е н и е. Непосредственная проверка показывает, что это случай неопределенности типа $\left[\frac{0}{0}\right]$. Делим числитель и знаменатель на $(x+1)$, в результате получаем $A=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-2x-2}{x^2+2x+1}$.

Снова убеждаемся, что и это неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Повторяем процедуру деления на $(x+1)$, в результате находим

$$A=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2}{x+1}=\left[-\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

Пример 22. Пусть $m,n\in\mathbf{N}$, тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}=\frac{m}{n}.$$

При вычислении $\lim\limits_{x\to 0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ следует в числителе и знаменателе вынести и сократить наименьшую степень x, а в случае $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ наибольшую. В частности, предел отношения многочленов одной степени при $x\to 0$ равен отношению их коэффициентов при младшей степени x, а при $x\to\infty$ при старшей.

Пример 23. Предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^7+2x^3+x}{x^5+x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^6+2x^2+1}{x^4+x+2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 24. Предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-x+4}{3x^3+2x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}}=\frac{2}{3}.$$

Замечание. Аналогичный прием применяется при вычислении пределов отношений некоторых иррациональных выражений.

Пример 25. Вычислим пределы:

$$а)\ \lim_{x\to+0}\frac{x^2+x+\sqrt{x}}{2x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2x\sqrt{x}+x+1)}=1;$$

$$б)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+\sqrt{x}}{2x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}})}{x^2(2+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}})}=\frac{1}{2}.$$

Пример 26. Вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{x^3+1}+1}{\sqrt{2x^4+3x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{2+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пример 27. Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0\cdot 1=0.$$

Пример 28. Вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{x^3+x+1}+1}{x\sqrt[3]{x^2+2}+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^{\frac{5}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}}+\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}=\infty.$$

7. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

Приведем некоторые способы раскрытия неопределенностей с иррациональными выражениями.

Пример 29. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

Р е ш е н и е. Домножив числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{1+x^2}+1$, сопряженное числителю, с учетом формулы разности квадратов $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ получим

$$A=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Пример 30. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

Р е ш е н и е. Задача решается домножением числителя и знаменателя на выражение, сопряженное знаменателю, или разложением числителя на множители $\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$. При любом из этих способов после сокращения дроби получаем

$$A=\lim_{x\to4}\left(\sqrt{x}+2\right)=4.$$

Пример 31. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

Р е ш е н и е. Домножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, и на выражение, сопряженное знаменателю, с учетом формулы для разности квадратов получаем

$$A=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=2\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

При раскрытии неопределенностей иногда применяются формулы

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),\ a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Пример 32. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{x-8}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)=12.$$

Пример 33. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{3}{2}.$$

Этот пример может быть решен и путем замены переменной $x+1=y^6$, $y\to 1$ при $x\to 0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)\left(y^2+y+1\right)}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=\frac{3}{2}.$$

Пример 34. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$.

Р е ш е н и е. Положим $x=y^{nm}$, $y\to 1$ при $x\to 1$,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^m-1}{y^n-1}=\frac{m}{n}$$

(см. пример 22).

Неопределенности вида $[\infty-\infty]$ обычно раскрываются путем преобразования к отношению.

Пример 35. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{4-(x+2)}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}=-\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{4}.$$

Пример 36. Вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=0.$$

Пример 37. Найти $A_\pm=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Р е ш е н и е. Домножаем и делим $\sqrt{x^2+1}-x$ на сопряженное выражение в первом пределе, во втором это не требуется:

$$A_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+|x|}=0,$$

$$A_-=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+|x|\right)=+\infty.$$

Пример 38. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+3x+1}-x\right)$.

Р е ш е н и е. Используем формулу для разности кубов, домножая на неполный квадрат суммы, получаем

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+2x^2+3x+1)-x^3}{(x^3+2x^2+3x+1)^{\frac{2}{3}}+x(x^3+2x^2+3x+1)^{\frac{1}{3}}+x^2},$$

выносим старшие степени в числителе и знаменателе, в результате

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2\left[(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})^{\frac{2}{3}}+(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})^{\frac{1}{3}}+1\right]}.$$

Сократив дробь на x^2, находим предел

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3})^{\frac{2}{3}} + (1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3})^{\frac{1}{3}} + 1} = \frac{2}{3}.$$

8. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

Теорема 11 (первый замечательный предел). Предел $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Пример 39. Вычислим предел

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x} = 1.$$

Пример 40. Вычислим предел

$$\lim_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Положим $\arcsin x = y,\ x = \sin y,\ y \to 0$ при $x \to 0$, получим

$$\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to0}\frac{1}{\left(\frac{y}{\sin y}\right)} = 1.$$

Пример 41. Вычислим предел

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Положим $\operatorname{arctg} x = y,\ x = \operatorname{tg} y,\ y \to 0$ при $x \to 0$, получим

$$\lim_{y\to0}\frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to0}\frac{1}{\left(\frac{y}{\operatorname{tg} y}\right)} = 1.$$

Пример 42. Пусть $a \neq 0$, тогда $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{x} = a$,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{x} = a\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax} = \lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y} = a.$$

При $a = 0$ этот же результат получается непосредственно.

Пример 43. Предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Пример 44. Вычислим предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Пример 45. Вычислим предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{(a+b)x}{2}\sin\frac{(a-b)x}{2}}{x^2} =$$

$$= -2\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{(a+b)x}{2}}{x}\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{(a-b)x}{2}}{x} = -2\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Часто прямое применение первого замечательного предела или следствий из него невозможно из-за того, что аргумент не стремится к нулю. Требуется замена переменной.

Пример 46. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg}2x\cdot\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - x)$.

Р е ш е н и е. Введем новую переменную $y = \frac{\pi}{4} - x,\ y \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{4}$, получим

$$A = \lim_{y\to0}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)\cdot\operatorname{ctg}y = \lim_{y\to0}\frac{\operatorname{tg}2y}{\operatorname{tg}y} = \lim_{y\to0}\left(\frac{\operatorname{tg}2y}{y}\right)\cdot\lim_{y\to0}\left(\frac{y}{\operatorname{tg}y}\right) = 2.$$

Пример 47. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin 2\pi x}{\sin 7\pi x}$.

Решение. Положим $y = x - 1$, $y \to 0$ при $x \to 1$, получим

$$A = \lim_{y\to 0} \frac{\sin 2\pi(y+1)}{\sin 7\pi(y+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(2\pi y + 2\pi)}{\sin(7\pi y + 7\pi)} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin(2\pi y)}{-\sin(7\pi y)} = -\lim_{y\to 0} \frac{\sin(2\pi y)}{y} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin(7\pi y)} = -\frac{2\pi}{7\pi} = -\frac{2}{7}.$$

Пример 48. Найти $A = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x^2 - \pi^2}{\sin x}$.

Решение. Преобразуем исходное выражение: $A = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{(x-\pi)(x+\pi)}{\sin x}$. Положим $y = x - \pi$, $y \to 0$ при $x \to \pi$, получим

$$A = \lim_{y\to 0} \frac{y(y+2\pi)}{\sin(y+\pi)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{-\sin y} \cdot \lim_{y\to 0}(y + 2\pi) = -2\pi.$$

Пример 49. Найти $A = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x - \pi}$.

Решение. Преобразуем исходное выражение: $A = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$. Положим $y = x - \dfrac{\pi}{2}$, $y \to 0$ при $x \to \dfrac{\pi}{2}$, получим

$$A = \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \frac{\cos(y + \frac{\pi}{2})}{y} = \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{y} = -\frac{1}{2}.$$

Замечание. Теорема 11 может быть сформулирована так: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Пример 50. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^2} = 1$.

Пример 51. Предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)} = 1$.

Пример 52. Предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$.

9. ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

Теорема 12 (второй замечательный предел). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Пример 53. Предел $\lim\limits_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}} = e$, что доказывается заменой $y = \dfrac{1}{x}$.

Пример 54. Предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Пример 55. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$.

Решение. Пусть $a \neq 0$, тогда положим $y = a^x - 1$, $y \to 0$ при $x \to 0$ $a^x = 1 + y$, $x\ln a = \ln(1+y)$, $x = \dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \ln a = \frac{\ln a}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = \ln a.$$

При $a = 1$ это равенство проверяется непосредственно. При $a = e$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Пример 56. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

Решение. Сделаем замену $1 + x = e^y$, $x = e^y - 1$, $y \to 0$ при $x \to 0$, после замены

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1} = \alpha \lim_{y\to 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{\alpha y} \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = \alpha.$$

Второй замечательный предел используется при раскрытии неопределенности вида $\left[1^\infty\right]$.

Пример 57. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

Р е ш е н и е:

$$A = \lim_{x\to\infty}\Big[1+\Big(\frac{x}{x+1}-1\Big)\Big]^x = \lim_{x\to\infty}\Big[\Big(1+\frac{-1}{x+1}\Big)^{\frac{x+1}{-1}}\Big]^{\frac{-1}{x+1}x}.$$

Положим $y = \dfrac{-1}{x+1}$, $x = -\dfrac{1+y}{y}$, $y \to 0$ при $x \to \infty$

$$A = \lim_{x\to\infty}\Big[(1+y)^{\frac{1}{y}}\Big]^{-(1+y)} = e^{-1}.$$

Другой способ раскрытия неопределенности вида $\left[1^\infty\right]$, т. е. вычисления предела при $x \to a$ выражения u^v, где $u \to 1$, $v \to \infty$, основан на преобразовании

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a} e^{v\ln u} = e^{\lim\limits_{x\to a} v\ln u}.$$

Сделаем замену $w = u - 1$ и вычислим предел $\lim\limits_{x\to a} v\ln u = = \lim\limits_{x\to a} v\ln(w+1) = \lim\limits_{x\to a} vw\dfrac{\ln(w+1)}{w} = \lim\limits_{x\to a}(vw) = \lim\limits_{x\to a} v(u-1)$, поскольку $w \to 0$ при $x \to a$.Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если $u \to 1$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} u^v = e^{\lim\limits_{x\to a} v(u-1)}$.

Пример 58. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0} A = \Big(\dfrac{\cos 3x}{\cos x}\Big)^{\frac{1}{x^2}} = = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos 3x}{\cos x}-1\right)}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big(\frac{\cos 3x}{\cos x}-1\Big) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos x}{x^2\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin(-x)}{x^2\cos x} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = -2\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = -4.$$

Таким образом, $A = e^{-4}$.

Пример 59. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Р е ш е н и е. В силу утверждения 1, число $A = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

Пример 60. Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty} x[\ln x - \ln(x+1)] = \lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\ln\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\Big[\Big(1-\frac{1}{x+1}\Big)^{-(x+1)}\Big]^{-\frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\ln e^{-\frac{x}{x+1}} = \ln e^{-1} = -1.$$

10. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ЗАДАННОМ СТРЕМЛЕНИИ АРГУМЕНТА

Для сравнения чисел a и b рассматривают их отношение $\dfrac{a}{b}$. Для сравнения функций $f(x)$, $g(x)$ при заданном стремлении аргумента $x \to *$ рассматривают предел их отношения $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Определение 15. Если $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x)$ называют *бесконечно малой* по сравнению с $g(x)$ при $x \to *$.

Здесь принято обозначение $f(x) = o(g(x))$ $(x \to *)$ или короче $f(x) = o(g)$ $(x \to *)$.

Пример 61. Рассмотрим три случая, иллюстрирующие определение 15:

1) функция $f(x) = o(1)$ $(x \to *)$ $\Leftrightarrow$ f бесконечно малая при $x \to *$;

2) $x^2 = x\cdot x = o(x)$ $(x \to 0)$;

3) $x = o(x^2)$ $(x \to \infty)$.

Особый интерес представляет сравнение бесконечно малых функций (бесконечно больших).

Определение 16. Пусть функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ бесконечно малые при $x \to *$. Если $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка (малости), чем $\beta(x)$ при $x \to *$. Соответственно $\beta(x)$ называется бесконечно малой более низкого порядка (малости), чем $\alpha(x)$ при $x \to *$.

Определение 17. Пусть функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ бесконечно большие при $x \to *$. Если $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно большой более низкого порядка (роста), чем $\beta(x)$ при $x \to *$. Соответственно $\beta(x)$ называется бесконечно большой более высокого порядка (роста), чем $\alpha(x)$ при $x \to *$.

Определение 18. Пусть функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ бесконечно малые (бесконечно большие) при $x \to *$. Если $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то $\alpha(x)$, $\beta(x)$ называются несравнимыми между собой при $x \to *$.

Пример 62. Рассмотрим $\alpha(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ и $\beta(x) = x$, функция $\alpha(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ — бесконечно малая при $x \to 0$, так как $|\alpha(x)| = |x|\cdot|\sin\dfrac{1}{x}| \le |x| < \varepsilon$ при $|x-0| < |x| < \delta = \varepsilon$; функция $\beta(x) = x$ бесконечно малая при $x \to 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ не существует, поэтому $\alpha(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ и $\beta(x) = x$ несравнимы при $x \to 0$.

Определение 19. Если $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то $f(x)$ и $g(x)$ называют *эквивалентными* при $x \to *$.

Здесь принято обозначение $f(x) \sim g(x)$ $(x \to *)$.

Пример 63. Функция $\sin x \sim x (x \to 0)$ (теорема 6).

Теорема 13 (критерий эквивалентности функций). Функции

$$f(x) \sim g(x)\ (x \to *) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))\ (x \to *).$$

Пример 64. Показать, что

1)$f \sim f$ $(x \to *)$;

2)$f \sim g$ $(x \to *) \iff g \sim f$ $(x \to *)$;

3)$f \sim g,\ g \sim h$ $(x \to *) \Longrightarrow f \sim h$ $(x \to *)$.

На основании теорем 11, 12 и примеров 39—41, 54, 55 можно составить список функций, эквивалентных x при $x \to 0$:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim$$
$$\sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0). \tag{3}$$

Из примера 56 следует, что $\forall\alpha \in \mathbf{R}$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (x \to 0). \tag{4}$$

В частности, при $\alpha = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n} \quad (x \to 0). \tag{5}$$

Из примера 55 следует, что $\forall a > 0$

$$a^x - 1 \sim x\ln a \quad (x \to 0). \tag{6}$$

Замечание. Соотношения эквивалентности (3)–(6) сохраняют свою истинность при замене x на любую бесконечно малую функцию $\alpha(x)$ при $x \to x_0$. Например,

$$\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \text{ при } x \to \infty;$$

$$\sqrt[n]{1+\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{nx} \text{ при } x \to \infty;$$

$$\ln x = \ln[1 + (x-1)] \sim x - 1 \text{ при } x \to 1$$

и т. д.

При вычислении пределов полезна следующая теорема.

Теорема 14. Пусть $f \sim f_1$, $g \sim g_1$ при $x \to *$, тогда:

а) если существует предел $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$, то существует и равный ему предел $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$;

б) если существует предел $\lim\limits_{x\to *} f_1(x)\cdot g_1(x) = B$, то существует и равный ему предел $\lim\limits_{x\to *} f(x)\cdot g(x) = B$.

Пример 65. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

Пример 66. Предел $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x\dfrac{1}{x} = 1$.

Замечание. Заменять функции на эквивалентные им в суммах и разностях, вообще говоря, нельзя.

Пример 67. Найдем $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}$. Если воспользоваться формулами $\ln(1+x) \sim x, \ln(1-x) \sim -x$ и заменить функции на эквивалентные, то получим $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-x}{x^2} = 0$, однако это не верно, поскольку $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$.

Пример 68. При вычислении предела $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}x - \sin x}{x^3}$ замена $\mathrm{tg}\, x$ и $\sin x$ на эквивалентную им при $x \to 0$ функцию x приводит к ошибке, т. е. $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-x}{x^3} = 0$. Правильный результат получен в примере 44.

Последовательно применяя соотношения (3)—(6), можно вычислять и более сложные пределы.

Пример 69. Вычислить предел $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+\sin x^2)}$.

Решение. При $x \to 0$ получаем $\ln\cos x = \dfrac{1}{2}\ln(1-\sin^2 x) \sim \sim -\dfrac{\sin^2 x}{2} \sim -\dfrac{x^2}{2}, \ln(1+\sin x^2) \sim \sin x^2 \sim x^2$, поэтому

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 70. Вычислить предел $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left[1+\ln(1+x^3)\right]}{\sin(x^3-x^5)}$.

Решение. При $x \to 0$ получаем $\ln\left[1+\ln(1+x^3)\right] \sim \ln(1+ + x^3) \sim x^3$, $\sin(x^3-x^5) \sim x^3 - x^5 = x^3 + o(x^3) \sim x^3$. Отсюда следует, что $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^3} = 1$.

Пример 71. Вычислить предел $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-\sqrt{x}}$.

Решение. При $x \to 1$ получаем $\ln x = \ln[1+(x-1)] \sim x-1$, поэтому

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = 2.$$

Пример 72. Вычислить предел $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{x}$.

Решение. При $x \to 0$ получаем $e^{\sin x} - e^x = e^x(e^{\sin x - x} - 1) \sim \sim e^x(\sin x - x)$, поэтому

$$A = \lim_{x\to 0} e^x\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = \lim_{x\to 0} e^x\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} - 1\right) = 1\cdot(1-1) = 0.$$

Пример 73. Вычислить предел $A = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^x - e^a}{\ln x - \ln a}$, $a > 0$.

Решение. При $x \to a$ получаем $e^x - e^a = e^a(e^{x-a} - 1) \sim \sim e^a(x-a)$ и $\ln x - \ln a = \ln\frac{x}{a} = \ln[1+(\dfrac{x}{a}-1)] \sim \dfrac{x}{a} - 1 = \dfrac{x-a}{a}$, отсюда

$$A = \lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{\ln x - \ln a} = \lim_{x\to a} \frac{ae^a(x-a)}{x-a} = ae^a.$$

Пример 74. Вычислить предел $A = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-\sin\frac{\pi}{x}}{(x-2)^2}$.

Решение. При $x \to 2$ получаем

$$1 - \sin\frac{\pi}{x} = \frac{1-\sin^2\frac{\pi}{x}}{1+\sin\frac{\pi}{x}} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{x}}{1+\sin\frac{\pi}{x}} = \frac{\sin^2(\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{2})}{1+\sin\frac{\pi}{x}} \sim$$

$$\sim \frac{(\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{2})^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{2-x}{x}\right)^2 \sim \frac{\pi^2}{32}(x-2)^2.$$

Таким образом, $A = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{\pi^2}{32}(x-2)^2}{(x-2)^2} = \dfrac{\pi^2}{32}$.

Пример 75. Вычислить предел $A = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^{x^2} - 2^{x+2}}{\sin \pi x}$.

Решение:

$$2^{x^2} - 2^{x+2} = 2^{x+2}\left(2^{x^2-x-2} - 1\right) = 2^{x+2}\left(2^{(x-2)(x+1)} - 1\right) \sim$$

$$\sim 2^4(x-2)(x+1)\ln 2 \sim (3\cdot 2^4\ln 2)(x-2) = (48\ln 2)(x-2),$$

$$\sin\pi x = \sin[\pi(2+x-2)] = \sin[2\pi+\pi(x-2)] =$$
$$= \sin[\pi(x-2)] \sim \pi(x-2),$$

при $x \to 2$, отсюда получаем

$$A = \lim_{x\to 2}\frac{(48\ln 2)(x-2)}{\pi(x-2)} = \frac{48\ln 2}{\pi}.$$

Пример 76. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[7]{x^7+2x^6-x^4}-x\right)$.

Р е ш е н и е. Вынося из-под корня старшую степень x, получим

$$A = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[7]{1+(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3})}-1\right).$$

При $x\to\infty$ величина $\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}$ бесконечно мала, поэтому

$$\sqrt[7]{1+(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3})}-1 \sim \frac{1}{7}(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}),\quad x\to\infty.$$

Отсюда

$$A = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{7}(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}) = \lim_{x\to\infty}(\frac{2}{7}-\frac{1}{7x^2}) = \frac{2}{7}.$$

Пример 77. Вычислить

$$A = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[7]{x^7+2x^6-x^4}-\sqrt[5]{x^5+3x^4-x}\right).$$

Р е ш е н и е:

$$A = \lim_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt[7]{x^7+2x^6-x^4}-x\right)-\left(\sqrt[5]{x^5+3x^4-x}-x\right)\right] =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[7]{x^7+2x^6-x^4}-x\right)-\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+3x^4-x}-x\right).$$

Так как первый из этих пределов найден в примере 76, второй подсчитаем тем же методом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+3x^4-x}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[5]{1+(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4})}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{5}(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}) = \frac{3}{5}.$$

Окончательно находим $A = \frac{2}{7}-\frac{3}{5} = -\frac{11}{35}$.

Определение 20. Пусть $\lim\limits_{x\to *}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C, 0 < C < +\infty$, тогда:

а) если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ бесконечно малые при $x\to *$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка k (малости) относительно $\beta(x)$ при $x\to *$;

б) если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ бесконечно большие при $x\to *$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно большой порядка k (роста) относительно $\beta(x)$ при $x\to *$.

Пусть $\lim\limits_{x\to *}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C,\ 0 < C < +\infty$, тогда $\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C + +\gamma(x)$, где функция $\gamma(x)$ бесконечно малая или бесконечно большая при $x\to * \implies \alpha(x) = C(\beta(x))^k + o((\beta(x))^k)$, $x\to *$; функция $C(\beta(x))^k$ называется главной частью бесконечно малой или бесконечно большой функции $\alpha(x)$.

В качестве «масштабной» функции бывает удобно брать простейшую $(x-a)$, $\frac{1}{x-a}, \cdots$.

Пример 78. Найти порядок малости относительно x и главную часть бесконечно малой при $x\to 0$ функции $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x^3}$.

Р е ш е н и е. Порядок малости k определяется из условия $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = C, 0 < C < +\infty$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x^3}}{x^k} = \begin{cases} 0, k < \frac{2}{3}; \\ 2, k = \frac{2}{3}; \\ \infty, k > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что порядок малости $k = \frac{2}{3}$, т. е. $f(x) \sim 2x^{\frac{2}{3}}$ при $x\to 0$ или в силу критерия эквивалентности функций (теорема 13)

$f(x) = 2x^{\frac{2}{3}} + o(x^{\frac{2}{3}})$. Таким образом, главная часть бесконечно малой при $x \to 0$ функции $f(x)$ есть $2x^{\frac{2}{3}}$. Более краткое решение можно получить из соотношений $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{3}{2}} = 2x^{\frac{2}{3}}(1 + \frac{3}{2}x^{\frac{5}{6}}) \sim 2x^{\frac{2}{3}}$ при $x \to 0$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \frac{3}{2}x^{\frac{5}{6}}) = 1$.

Пример 79. Найти порядок роста относительно x и главную часть бесконечно большой при $x \to +\infty$ функции $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{x^3}$.

Решение.

$$f(x) = 2x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{6}}\right) \sim 3x^{\frac{3}{2}} \text{ при } x \to +\infty,$$

поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{6}}\right) = 1$. Таким образом, главная часть бесконечно большой при $x \to +\infty$ функции $f(x)$ есть $3x^{\frac{3}{2}}$, порядок ее роста относительно x равен $\frac{3}{2}$.

Пример 80. Записать главные части бесконечно малых функций при указанном стремлении аргумента:

а) $f(x) = \sin(\frac{1}{x} - \frac{1}{3})$, $x \to 3$. Поскольку $(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}) \to 0$ при $x \to 3$, $f \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{3} = \frac{3-x}{3x} \sim -\frac{1}{9}(x-3)$, $x \to 3$;

б) $g(x) = \sin(1 - \cos x) \sim \frac{x^2}{2}$, $x \to 0$ (см. пример 41);

в) $h(x) = \sqrt{x+1}\sin\ln\frac{x+1}{x}$, $x \to +\infty$, $h(x) = \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \times \sin\ln(1 + \frac{1}{x}) \sim \sqrt{x}\ln(1 + \frac{1}{x}) \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \to +\infty$.

11. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

Определение 21. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке выполняется соотношение

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это определение предъявляет к функции следующие требования:

а) функция $f(x)$ должна быть определена в точке x_0;

б) функция $f(x)$ должна иметь предел в точке x_0;

в) этот предел должен совпадать со значением функции $f(x)$ в этой точке.

Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то говорят, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0, а сама точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Если при этом односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют и конечны, то точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода. В частности, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, т. е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет предел, то говорят, что x_0 есть точка устранимого разрыва. Разрыв в этом случае можно устранить, доопределяя или переопределяя значение функции $f(x)$ в точке x_0: $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Эта процедура называется продолжением функции по непрерывности.

Всякая точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва 1-го рода, называется точкой разрыва 2-го рода. Другими словами, в точке разрыва 2-го рода по крайней мере один из односторонних пределов функции не существует или бесконечен. Наиболее типичный случай разрыва 2-го рода — это именно бесконечный разрыв.

Пример 81. Функция $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода, поскольку $f(-0) = -\frac{\pi}{2}$, $f(+0) = \frac{\pi}{2}$.

Пример 82. Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$, однако имеет в этой точке предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Следовательно, $x = 0$ — точка устранимого разрыва функции $f(x)$. После доопределения $f(0) = 1$ функция $f(x)$ станет непрерывной в этой точке.

Пример 83. Функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, поскольку $f(-0) = f(+0) = +\infty$.

Пример 84. Функция $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, поскольку $f(+0) = +\infty$. Заметим, что $f(-0) = 0$.

Пример 85. Функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, поскольку в этой точке не существует ни один из односторонних пределов $f(-0)$ или $f(+0)$.

Пример 86. Точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x < 1; \\ \dfrac{1}{x-1}, & 1 < x \le 2; \\ \dfrac{\ln(x-1)}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$$

следует искать как среди точек, выпавших из ее области определения, так и среди точек $x = 1$ и $x = 2$, в которых осуществляется склейка разных ее ветвей. Рассмотрим точки $0, 1, 2$. В точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода, как известно из примера 81.

В точке $x = 1$ предел слева вычисляется от левой ветви, т. е. $f(1-0) = \lim\limits_{x\to1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to1-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}$, предел справа вычисляется от правой ветви, т. е. $f(1+0) = \lim\limits_{x\to1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$, следовательно, в точке $x = 1$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода.

В точке $x = 2$ односторонние пределы $f(2-0) = \lim\limits_{x\to2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to2-0} \frac{1}{x-1} = 1$ и $f(2+0) = \lim\limits_{x\to2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to2+0} \frac{\ln(x-1)}{x-2} = 1$, следовательно, в точке $x = 2$ функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв и, более того, непрерывна в этой точке.

12. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n > N(\varepsilon)$. Заполнить таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$			

Варианты задачи приведены в табл. 1.

Таблица 1

№ варианта	Последовательность и ее предел	№ варианта	Последовательность и ее предел
1	$x_n = \dfrac{3n-2}{2n-1},\ a = \dfrac{3}{2}$	2	$x_n = \dfrac{7n+4}{2n+1},\ a = \dfrac{7}{2}$
3	$x_n = \dfrac{7n-1}{n+1},\ a = 7$	4	$x_n = \dfrac{9-n^3}{1+2n^3},\ a = \dfrac{-1}{2}$
5	$x_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2},\ a = -\dfrac{1}{2}$	6	$x_n = \dfrac{4n-1}{2n+1},\ a = 2$
7	$x_n = \dfrac{2n-5}{3n+1},\ a = \dfrac{2}{3}$	8	$x_n = \dfrac{n-1}{1-2n},\ a = -\dfrac{1}{2}$
9	$x_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2},\ a = \dfrac{4}{3}$	10	$x_n = \dfrac{4n-3}{2n+1},\ a = 2$
11	$x_n = \dfrac{-5n}{n+1},\ a = -5$	12	$x_n = \dfrac{2n+1}{3n-5},\ a = \dfrac{2}{3}$
13	$x_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+3},\ a = -2$	14	$x_n = \dfrac{3n^2}{2-n^2},\ a = -3$
15	$x_n = \dfrac{n}{3n-1},\ a = \dfrac{1}{3}$	16	$x_n = \dfrac{3n^3}{n^3-1},\ a = 3$

№ варианта	Последовательность и ее предел	№ варианта	Последовательность и ее предел
17	$x_n = \dfrac{4+n}{1-3n}$, $a = -\dfrac{1}{3}$	18	$x_n = \dfrac{5n+15}{6-n}$, $a = -5$
19	$x_n = \dfrac{3-n^2}{1+2n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$	20	$x_n = \dfrac{2n-1}{2-3n}$, $a = -\dfrac{2}{3}$
21	$x_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}$, $a = \dfrac{3}{5}$	22	$x_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}$, $a = 2$
23	$x_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$	24	$x_n = \dfrac{5n+1}{10n-3}$, $a = \dfrac{1}{2}$
25	$x_n = \dfrac{2-2n}{3+4n}$, $a = -\dfrac{1}{2}$	26	$x_n = \dfrac{23-4n}{2-n}$, $a = 4$
27	$x_n = \dfrac{1+3n}{6-n}$, $a = -3$	28	$x_n = \dfrac{2n+3}{n+5}$, $a = 2$
29	$x_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}$, $a = \dfrac{3}{4}$	30	$x_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}$, $a = -\dfrac{3}{5}$

Задача 2. Вычислить пределы функций: а), б), в), г), д), е). Варианты задачи приведены в табл. 2.

Таблица 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
1	*а*) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$ *б*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{16x^4-x\sqrt{x}}}{3x^2+1}$ *в*) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to8}\left(\dfrac{2x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$ *д*) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2\sin 2x}{\mathrm{arctg}3x^3}\right)^{\frac{x+2}{x+1}}$ *е*) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\mathrm{tg}(3x)}{\mathrm{tg}x}$	2	*а*) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$ *б*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^2+1}}+3x}{x}$ *в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}\sqrt{1+2x}-1}{x}$ *г*) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)^{3/x}$ *д*) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}4x}{x}\right)^{2+x}$ *е*) $\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\sin 4x}{x^2+\pi x}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
3	*а*) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$ *б*) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-\sqrt[3]{4x^4-x^7\sqrt{x}}}{2x^2-3x+5}$ *в*) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0} (2-\cos 3x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ *д*) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 2x}{\arcsin 3x}\right)^{\operatorname{arcctg} x}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\lg(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$	4	*а*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-x-1}$ *б*) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+3x-5}{x\sqrt{x}+\sqrt[3]{8x^7-1}}$ *в*) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x)\right)^{\operatorname{ctg} x}$ *д*) $\lim\limits_{x\to -0} \left(\dfrac{x+2}{x+10}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{3x^2}}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{5-5^x}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
5	*а*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2-4x-1}{x^3-1}$ *б*) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-3\sqrt[3]{9x^4-x^6}}{\sqrt{2x^3+9x^4}}$ *в*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$ *д*) $\lim\limits_{x\to +0} \left(\dfrac{\sin\, 2x}{4^x-1}\right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin^2(3x-3)}{1+\cos\pi x}$	6	*а*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+4x^2-4x-1}$ *б*) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x\sqrt{x}+\sqrt{1+9x^3}+x}{3x\sqrt{x+10}}$ *в*) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$ *д*) $\lim\limits_{x\to 0} (\arccos 4x)^{\lg(\sin^2 x)}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\operatorname{tg}\pi x}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
7	*а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$ *б*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2-\sqrt[3]{x^4+4}}{\sqrt{x}(2-x)-x\sqrt{x+2}}$ *в*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{9x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$ *д*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}^2 2x}{\log_2(x+2)}\right)^{\arccos 2x}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos((x+\frac{1}{2})\pi)\mathrm{tg}\pi x}{\arcsin((1-x)^2)}$	8	*а*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$ *б*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{16x^3+1}-\sqrt[3]{5x^2}+2}{4x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2+1}}$ *в*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln(1+\sqrt[3]{x})\right)^{\frac{\arcsin x}{\sqrt[3]{x^4}}}$ *д*) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3+26}{3x^2-2}\right)^{\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin(\pi x)}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
9	*а*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^3-6x^2+32}$ *б*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4x^2+1)\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{16x^3+x}}$ *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{\mathrm{ctg}\,\pi x}$ *д*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin^2 2x}{x\ln(1+x)}\right)^{\arccos x^2}$ *е*) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\mathrm{tg}^2 2x}$	10	*а*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3+x^2-8x+4}$ *б*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\sqrt[3]{1-8x^4}}{1-3\sqrt[5]{x^6}}$ *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ *д*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{\mathrm{arctg} 2\,x}\right)^{\frac{6x}{\lg(1+x)}}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\mathrm{tg}^2\pi x}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
11	*а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^4-4x-8}$ *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3\sqrt{x^4+1}+7x^2}{\sqrt[3]{27x^3+x^6}}$ *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\sqrt[3]{9+x^3}+\sqrt[3]{7-x^3})$ *г)* $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$ *д)* $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\sin\ 6x}{2x}\right)^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$	12	*а)* $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$ *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+\sqrt{1+9x^4}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt[3]{x}-2)^3}$ *в)* $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ *г)* $\lim\limits_{x\to+0}\left(2-5^{\arcsin x^2}\right)^{\frac{\operatorname{cosec} x}{x}}$ *д)* $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}\right)^{\cos^2 x}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(3-2x)}{\operatorname{arctg}(3x-3)}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
13	*а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^3-81}{x^2-5x+6}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^4+3}-\sqrt[3]{x^6+1}}{x^2+100x}$ *в)* $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x^3+1}$ *г)* $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$ *д)* $\lim\limits_{x\to+0}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x^2+2x}\right)^{\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$	14	*а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-x-6}$ *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+100x\sqrt{x}}{(x+2)\sqrt{x^3+8x+7}}$ *в)* $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$ *г)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ *д)* $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\lg(1+x)}{x}\right)^{\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x}}$ *е)* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi x}{\sin x}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
15	*а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$ *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+3}-\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^5}}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$ *в)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ *г)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$ *д)* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{x+2}{x-2}}$ *е)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$	16	*а)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+5x^2+7x+3}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^4+2\sqrt[3]{x^{16}-4x}}}{\sqrt[3]{x^8+x^2-1}}$ *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}-1}$ *г)* $\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+\pi x^2)}}$ *д)* $\lim\limits_{x\to 0}(1-\arcsin x)^{\operatorname{arcctg} x}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
17	*а)* $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2-9}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2\sqrt[4]{x^8-8x}}{\sqrt{x^4+12}-4x^2}$ *в)* $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ *г)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{3x^2}}$ *д)* $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{2^{x^4}-1}{\ln^2\cos 2x}\right)^{\frac{x+2}{x}}$ *е)* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$	18	*а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x+2}{x^2-12x+20}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+\sqrt{x^8+9x^5}+x^4}{3x^4-2x^3}$ *в)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ *г)* $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\left(2-\dfrac{2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}}$ *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\lg(x+1)}\right)^{\frac{2}{x+\cos x}}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{e^{x^2}-1}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
19	*а*) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{-2}{x+2}+\frac{x^3}{x^2-4}\right)$ *б*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^4+2x^2\sqrt{x^6-x^3+1}}{(\sqrt[3]{x^4+4}-\sqrt{x^5})^2}$ *в*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2-x}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to1}(1+\operatorname{tg}\pi x)^{\frac{1}{x-1}}$ *д*) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{3x^2}{1-\cos x}}$ *е*) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x^2-\pi^2}{\sin x}$	20	*а*) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{x^3+3x^2+3x+1}$ *б*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+1}{\sqrt[3]{x^6+x}+\sqrt{1+x^4}}$ *в*) $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$ *д*) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{\arcsin x}{2^x-1}}$ *е*) $\lim\limits_{x\to3\pi}\frac{2^x-8^\pi}{\sin7x-\sin3x}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
21	*а*) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-5x+2}{x^2-x-2}$ *б*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\sqrt{4x^2+10}-\sqrt[3]{2x+x^6}}{3x^2-x+1}$ *в*) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\ln(1+x^3)\right)^{\frac{3}{x^2\arcsin x}}$ *д*) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin6x}\right)^{\frac{x+2}{x-2}}$ *е*) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$	22	*а*) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{(x+x^2)(x+1)}$ *б*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-\sqrt{x^3+x^6}}{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{2x^5-10x^3}}$ *в*) $\lim\limits_{x\to16}\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{2}}-2}{\sqrt{x}-4}$ *г*) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin2x}}$ *д*) $\lim\limits_{x\to-0}\left(\frac{3+x}{\log_2(4-x)}\right)^{\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}}$ *е*) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin7\pi x}{\sin8\pi x}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
23	а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x\sqrt[4]{5+4x^2}+3x}{1+5x^2+x}$ в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin\pi x}}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{x}\right)^{\log_2\cos(x+\frac{\pi}{4})}$ е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{3x+1}}{\cos\frac{\pi x}{2}}$	24	а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x-6}{x^3-5x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-\sqrt{x^2+4x^6}}{(4x^2+5)\sqrt{x^2-\sqrt{x}}}$ в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{\sin x}}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}(2+\ln\cos x)^{\operatorname{arctg}\frac{3}{x^2}}$ е) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\sin\frac{x}{2}}}{\lg\frac{x}{\pi}}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
25	а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+2x^2-5x^3}{3x-4x^3+\sqrt{x^6+1}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt{1+x}}{x}$ г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x+4)\operatorname{tg}\dfrac{4}{x}\right)^{\operatorname{arctg}x^2}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1-2x)}$	26	а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-4x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4x^3+5}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+16x^{12}}}}$ в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[3]{x+1}-2}$ г) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left(\cos x+\sin^2 x\right)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-e^{2x}}\right)^{\frac{x-1}{x-2}}$ е) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{(x-\pi)^4}$

Продолжение табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
27	*а)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2+5x-6}$ *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)\sqrt[6]{x+1}+\sqrt[3]{x^4+2x^3}}{\sqrt[3]{x^3+27x^4}}$ *в)* $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ *г)* $\lim\limits_{x\to0}(\cos(\pi x))^{\frac{1}{x\sin(\pi x)}}$ *д)* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}^2 2x}{1-\cos 2x}\right)^{\cos x+1}$ *е)* $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\ln(8-x)}{\sin\pi x}$	28	*а)* $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$ *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{2x+x^2}}{x+\sqrt{x^7+3}}$ *в)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$ *г)* $\lim\limits_{x\to0}(\cos\sqrt[3]{x})^{\frac{1}{x^2}}$ *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\log_5\dfrac{x^2+6}{x^2+1}\right)^{\frac{x+5}{x}}$ *е)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\sin^2 4x}$

Окончание табл. 2

№ варианта	Пределы функций	№ варианта	Пределы функций
29	*а)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^3+x\sqrt{x}}{x^3+\sqrt{x^6-x\sqrt[3]{x}}}$ *в)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ *г)* $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x\cos 2x)^{\mathrm{ctg}^3 x}$ *д)* $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,2x-\mathrm{tg}\,x}{\lg(1+x)}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$ *е)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{arctg}(2x-2)}{\sin\pi x}$	30	*а)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^3-5x+4}$ *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-x^4\sqrt{x^3+2}}{x^5-x^3\sqrt[3]{x+2}}$ *в)* $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$ *г)* $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 4}\right)^{\frac{1}{x-4}}$ *д)* $\lim\limits_{x\to+0}\left(\mathrm{arctg}\dfrac{x^2-\sqrt{3}}{x^3-1}\right)^{\frac{x}{\sin 2x}}$ *е)* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(1+\mathrm{tg}\,x)}{\sin 3x}$

Задача 3. а) Показать, что данные функции f и g являются бесконечно малыми или бесконечно большими при указанном стремлении аргумента; б) для каждой функции f и g записать главную часть (эквивалентную ей функцию) вида $C(x-x_0)^\alpha$ при $x \to x_0$ или Cx^α при $x \to \infty$, указать их порядки малости (роста); в) сравнить f и g.

Варианты задачи приведены в табл. 3

Таблица 3

№ варианта	Функции		
1	$f(x) = 2^x - 8,$	$g(x) = \ln \frac{x}{3},$	$x \to 3$
2	$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}},$	$g(x) = x^2 \ln \frac{3x^2+2x+1}{3x^2},$	$x \to +\infty$
3	$f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x} + \sin x,$	$g(x) = \ln \cos\sqrt{x},$	$x \to +0$
4	$f(x) = \ln^2 x,$	$g(x) = \sqrt[3]{x} - 1,$	$x \to 1$
5	$f(x) = \sqrt[3]{x}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x+1}},$	$g(x) = \ln \frac{x+2}{x+1},$	$x \to +\infty$
6	$f(x) = \sqrt[3]{1-\sqrt[3]{x}},$	$g(x) = 4(x-1)^2,$	x→ 1
7	$f(x) = \frac{x^3}{x^3-1},$	$g(x) = \frac{1}{(x-1)^2},$	$x \to 1$
8	$f(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x},$	$g(x) = \sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1},$	$x \to +\infty$
9	$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1,$	$g(x) = \frac{1}{1 - \cos\frac{1}{\sqrt{x-1}}},$	$x \to +\infty$
10	$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x\sqrt{x}},$	$g(x) = \sqrt{x^3+x+1},$	$x \to +\infty$
11	$f(x) = x^2 + x - 2,$	$g(x) = \frac{\ln(x+3)}{\arcsin\sqrt[3]{x+2}},$	$x \to -2$
12	$f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x},$	$g(x) = \frac{\mathrm{arctg}(x-1)}{x}\sin\frac{1}{x},$	$x \to +\infty$
13	$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}},$	$g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1},$	$x \to +\infty$
14	$f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}},$	$g(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}},$	$x \to +\infty$

Окончание табл. 3

№ варианта	Функции		
15	$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3},$	$g(x) = \ln\cos\frac{1}{x},$	$x \to \infty$
16	$f(x) = \frac{2x^5 + x + 1}{x^4 - 3x^2 + 2},$	$g(x) = x^2 \sin\frac{1}{\sqrt{x}},$	$x \to +\infty$
17	$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}} - 1,$	$g(x) = \ln(1 + \sqrt{x^2 + x}),$	$x \to +0$
18	$f(x) = \sin\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}+1}},$	$g(x) = \sqrt{x^2+\sqrt{x}} - x,$	$x \to +\infty$
19	$f(x) = x^2 + x - 2,$	$g(x) = \frac{\ln(x+3)}{\arcsin\sqrt{x+2}},$	$x \to -2$
20	$f(x) = x^3 + \arcsin x,$	$g(x) = \sqrt{1-3x} - \sqrt{1+x},$	$x \to 0$
21	$f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}},$	$g(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}},$	$x \to +\infty$
22	$f(x) = \frac{\ln x}{(1-x)^2},$	$g(x) = \frac{1}{1 - \cos\sqrt{x-1}},$	$x \to 1+0$
23	$f(x) = \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{4x+3}},$	$g(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x},$	$x \to +\infty$
24	$f(x) = \frac{x^3}{x^3-1},$	$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1},$	$x \to 1$
25	$f(x) = 2x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^4+3}},$	$g(x) = \sqrt{x}\ln(\frac{x+2}{x+10}),$	$x \to +\infty$
26	$f(x) = 2^x - 1,$	$g(x) = \ln(1 + \sqrt{x + \sin x}),$	$x \to 0$
27	$f(x) = \sqrt[3]{x} - 1,$	$g(x) = \sqrt[3]{\ln x},$	$x \to 1+0$
28	$f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}},$	$g(x) = \frac{1}{9 - 3^x},$	$x \to 2-0$
29	$f(x) = e^{4x} - e^x,$	$g(x) = \mathrm{tg}4x - \sin 3x,$	$x \to 0$
30	$f(x) = \frac{x^3 + x\sin x}{x + \sqrt[3]{x}},$	$g(x) = \frac{x^2+x+1}{x+2},$	$x \to \infty$

Задача 4. Найти точки разрыва функции $f(x)$ и определить их характер. Построить фрагменты графика функции в окрестости каждой точки разрыва.

Варианты задачи приведены в табл. 4

Таблица 4

№ варианта	Функции
1	$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}, & x < 1; \\ \dfrac{\sqrt{x+3}}{2-x}, & x \geq 1 \end{cases}$
2	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x < 0; \\ \operatorname{arctg}(\dfrac{1}{x-2}), & x \geq 0 \end{cases}$
3	$f(x) = \begin{cases} \cos(\dfrac{\pi x}{2}), & \lvert x\rvert \leq 1; \\ \lvert x-1\rvert, & \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$
4	$f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{x-1}{x^2-2x}}, & x < 2; \\ \dfrac{\ln(x-1)}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$
5	$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{2x-1}{x^2-x}}, & x < 1; \\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$
6	$f(x) = \begin{cases} \ln(-x-2), & x < -2; \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x \geq -2 \end{cases}$
7	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2x}, & x < 0; \\ \operatorname{arctg}(\dfrac{1}{x-2}), & x \geq 0 \end{cases}$
8	$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0; \\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}, & x \geq 0 \end{cases}$
9	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2-x}}{x+1}, & x \leq 0; \\ e^{\frac{1}{\ln x}}, & x > 0 \end{cases}$

Продолжение табл. 4

№ варианта	Функции
10	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin x}-1}{x}, & x < 0; \\ \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}, & x > 0 \end{cases}$
11	$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x+1}}, & x \leq 0; \\ \dfrac{\operatorname{arcctg} 2x}{x-1}, & x > 0 \end{cases}$
12	$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcctg}(\dfrac{1}{x}), & x \leq 1; \\ \dfrac{1}{\ln x}, & x > 1 \end{cases}$
13	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x^2}, & x < \pi; \\ \cos\dfrac{x}{3}, & x \geq \pi \end{cases}$
14	$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\dfrac{1}{x+2}), & x \leq 0; \\ \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}-1}, & x > 0 \end{cases}$
15	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{\arcsin x}, & \lvert x\rvert \leq 1; \\ 1+\sqrt[3]{x}, & \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$
16	$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x^2-1}}, & \lvert x\rvert < 2; \\ \sqrt[3]{x}, & \lvert x\rvert \geq 2 \end{cases}$
17	$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\dfrac{x}{x+1}), & x \leq 0; \\ e^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$
18	$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}}, & x < 0; \\ \dfrac{\sqrt{1-\sin\frac{\pi^2}{2x}}}{\pi-x}, & x > 0 \end{cases}$

Продолжение табл. 4

№ варианта	Функции
19	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x<1;\\ \dfrac{1}{e^x-2}, & x\geq 1\end{cases}$
20	$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(\dfrac{1}{x}), & x\leq 1;\\ \dfrac{1}{(x-2)\ln x}, & x>1\end{cases}$
21	$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x+1}}, & x<0;\\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{1-x}, & x\geq 0\end{cases}$
22	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x<1;\\ \dfrac{1}{e^x-e^2}, & x\geq 1\end{cases}$
23	$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{\sqrt{-x}}{x+1}}, & x<0;\\ \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{(x-1)^2}, & x\geq 0\end{cases}$
24	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{x^2}, & x<0;\\ \dfrac{x^2-1}{(x^2-2)\ln x}, & x>0\end{cases}$
25	$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & \lvert x\rvert\leq 1;\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}, & \lvert x\rvert>1\end{cases}$
26	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{x}{\pi}-\sin\frac{\pi}{x}}{\lvert x+\pi\rvert}, & x<0;\\ \cos x, & x\geq 0\end{cases}$

Окончание табл. 4

№ варианта	Функции
27	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin x}{x}, & \lvert x\rvert\leq 1;\\ \dfrac{1}{(2-x)^2}, & \lvert x\rvert>1\end{cases}$
28	$f(x)=\begin{cases}2^{\frac{x-1}{x^2-2x}}, & x<2;\\ \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-2}}, & x>2\end{cases}$
29	$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(\dfrac{x}{x+1}), & x\geq 0;\\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\pi-x}, & x>0\end{cases}$
30	$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}e^{\frac{1}{x}}, & x\leq 2;\\ \operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{x}), & x>2\end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1988.
2. *Морозова В.Д.* Введение в анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998.
3. *Дуров В.В., Карташов Г.Д.* Пределы и непрерывность функций: Методические указания к практическим занятиям по курсу «Математический анализ». М.: МВТУ, 1982.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Виталий Васильевич Дуров
Антон Вячеславович Мастихин
Александр Сергеевич Савин

ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Методические указания

Редактор *О.М. Королева*
Корректор *Л.И. Малютина*
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 17.03.2004. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печ. л. 4,0. Усл. печ. л. 3,72, Уч.-изд. л. 3,65.
Тираж 300 экз. Изд. № 18. Заказ 63
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.