С.К. Соболев

Формула Тейлора

Учебное пособие для студентов 1 курса факультетов ФН и РК

Введение

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то это значит, что её приращение $\Delta f \equiv f(x) - f(x_0)$ можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

где $x = x - x_0$ и $A = f'(x_0)$. Отсюда следует представление при ($x \to x_0$):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0),$$

т.е. для значений аргумента *x*, близких к x_0, функция $f(x)$ приближённо равна линейной функции $L(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, график которой есть прямая – касательная к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0,

$$f(x) \approx L(x)$$

и погрешность $\delta(x) = f(x) - L(x) = o(x - x_0)$ в этом приближенном равенстве есть величина более высокого порядка малости по сравнению с $\Delta x = x - x_0$ при $\Delta x \to 0$.

Возникает естественной вопрос: а нельзя ли функцию $f(x)$ аппроксимировать в окрестности точки x_0 многочленом более высокой степени, чем первой, и естественно, с меньшей погрешностью?

Ответ на этот вопрос положительный, и соответствующий многочлен носит имя Тейлора.

Замечание 1. Пусть для функции $f(x)$ в точке x_0 существует производная порядка n $(n \geq 2)$. Тогда отсюда вытекает, что её производная порядка $(n-1)$ существует в окрестности точки x_0 и непрерывна в самой этой точке, а производные функции $f(x)$ порядка $(n-2)$ и меньшего, включая и саму функцию $f(x)$, непрерывны в окрестности точки x_0.

1. Формула Тейлора

Определение 2. Пусть для функции $f(x)$ в точке x_0 существует производная порядка *n*. ***Многочленом Тейлора для функции*** $f(x)$ ***порядка n в точке*** x_0 называется многочлен

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + ... + c_n(x - x_0)^n,$$

где $c_0 = f(x_0),\ c_1 = \dfrac{f'(x_0)}{1!},\ c_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2!}, ..., c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Можно написать, что

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k,$$

где $f^{(k)}(x)$ – производная *k*-го порядка функции $f(x)$, в частности, $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Пример 3. Найти многочлены Тейлора $P_n(x)$ степени $n = 1$, 2 и 3 для функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$.

Решение. Находим:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}},\ f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(\sqrt{x})^3},\ f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8(\sqrt{x})^5}.$$

Подставляем $x = x_0 = 4$

$$f(x_0) = \sqrt{4} = 2,\ f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4},\ f''(x_0) = -\frac{1}{4(\sqrt{4})^3} = -\frac{1}{32},\ f'''(x_0) = \frac{3}{8(\sqrt{4})^5} = \frac{3}{256}.$$

Вычисляем коэффициенты многочлена Тейлора:

$$c_0 = f(4) = 2,\; c_1 = \frac{f'(4)}{1!} = \frac{1}{4},\; c_2 = \frac{f''(4)}{2!} = -\frac{1}{64},\; c_3 = \frac{f'''(4)}{3!} = \frac{3}{256}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{512}..$$

Наконец, выписываем сами многочлены Тейлора:

$$P_1(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4),$$

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2,$$

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3.$$

Мы видим, что многочлен Тейлора степени $(k+1)$ в точке x_0 получается из многочлена Тейлора степени k (в той же точке) прибавлением одного слагаемого, а именно одночлена $\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}\cdot(x-x_0)^{k+1}$.

На Рис. 1 изображены графики функций $y=\sqrt{x}$ (черным цветом) и её многочленов Тейлора степени 1, 2 и 3 в точке $x_0 = 4$. (зеленым, синим и красным цветом соответственно), графики многочленов степени 1 и 2 – это прямая и парабола соответственно).

Мы видим, что чем выше степень многочлена Тейлора, тем лучше он аппроксимирует функцию для значений x, близких к $x_0 = 4$. ■

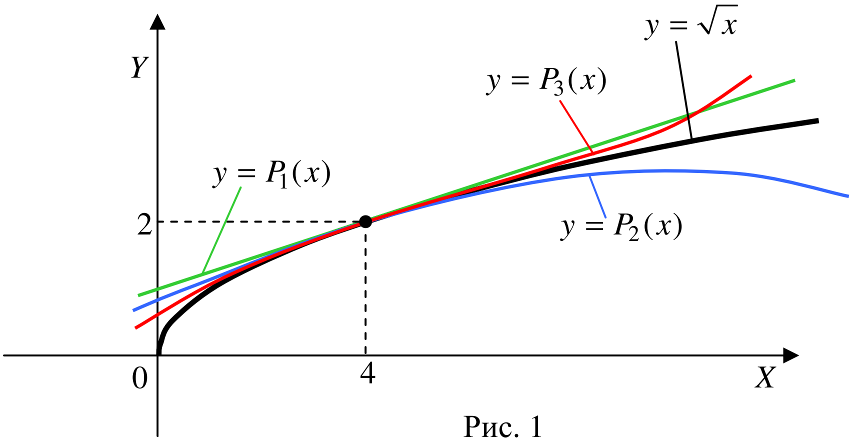

Рис. 1

Лемма 4 (**о производных многочлена Тейлора**). *Производная m-го порядка многочлена Тейлора n-й степени имеет при* $m \le n$ *вид*:

$$P_n^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-m)!}(x-x_0)^{k-m} = f^{(m)}(x_0) + \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}(x-x_0) \qquad (1)$$

Доказательство. Найдём первую производную многочлена Тейлора:

$$P_n'(x) = \left(f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right)' = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left((x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot k\cdot(x-x_0)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} = f'(x_0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}.$$

Теперь вторую производную:

$$P_n''(x) = \left(f'(x_0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} \right)' = 0 + \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}\left((x-x_0)^{k-1}\right)' =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}\cdot(k-1)\cdot(x-x_0)^{k-2} == \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2} = f''(x_0) + \sum_{k=3}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}.$$

Обобщая, или применяя индукцию, получаем выражения для производной m-го порядка (1). ■

Заметим, что для любого многочлена n-й степени его производная n-го порядка есть константа, а производная $(n+1)$ го порядка равна нулю. В частности, производная порядка n многочлена Тейлора степени n есть число $P^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0)$. Производная порядка $(n+1)$ многочлена Тейлора степени n равна нулю.

Теорема 5 (основное свойство многочлена Тейлора). *Функция* $f(x)$ *и её многочлен Тейлора* $P(x)$ *степени n в точке* x_0, *а также все их производные до n-го порядка включительно имеют в этой точке равные значения:*

$$\begin{aligned}&P(x_0)=f(x_0),\\&P'(x_0)=f'(x_0),\\&P''(x_0)=f''(x_0),\\&\ldots\ldots\\&P^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0),\end{aligned}$$

Доказательство получается подстановкой $x=x_0$ в формулу (1) для $m=1,2,3,\ldots,n$ ■.

Теорема 6. (**формула Тейлора в форме Пеано**). *Пусть в точке* x_0 *функция* $f(x)$ *имеет производную n-го порядка,* $P_n(x)$ *– её многочлен Тейлора степени n в точке* x_0 $(n\ge 1)$. *Тогда* $f(x)=P_n(x)+o(x-x_0)^n$ *при* $x\to x_0$.

Доказательство. Обозначим $R(x)\equiv f(x)-P_n(x)$. Из теоремы 5 следует, что $R(x_0)=R'(x_0)=R''(x_0)=\ldots=R^{(n)}(x_0)=0$. Из непрерывности в точке x_0 функций $R(x),\ R'(x),\ldots,R^{(n-1)}(x)$ следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=\lim\limits_{x\to x_0}R'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}R''(x)=\ldots=\lim\limits_{x\to x_0}R^{(n-1)}(x)=0$.

Нам надо доказать, что $R(x)=o(x-x_0)^n$ при $x\to x_0$, т.е. что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R(x)}{(x-x_0)^n}=0$. Применим $(n-1)$ раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{R'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{R''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{R^{(n-1)}(x)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot(x-x_0)}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{R^{(n-1)}(x)-R^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{n!}\cdot\left(R^{(n-1)}\right)'(x_0)=$$

$$=\frac{1}{n!}R^{(n)}(x_0)=0.$$

На последнем этапе мы получили по определению производную функции $R^{(n-1)}(x)$ в точке x_0.■

Лемма. 7. *Пусть* $P(x)$ **–** *многочлен степени m, не равный тождественно нулю, такой что* $P(x)=o(x-x_0)^n$ *при* $x\to x_0$. *Тогда* $m>n$.

Доказательство. Положим $x-x_0=t$, и тогда $P(x)=P(t+x_0)=Q(t)$ – многочлен от t той же степени m. Пусть $Q(t)=a\cdot t^m+b\cdot t^{m-1}+\ldots+d\cdot t^k$, где $a\ne 0,\ d\ne 0$, Тогда при $x\to x_0\Leftrightarrow t\to 0$ будет $Q(t)\sim d\cdot t^k=o(t^n)\Rightarrow n<k\le m$.■

Теорема 8 (**единственность многочлена, удовлетворяющего условиям теоремы 6**). *Пусть в точке* x_0 *функция* $f(x)$ *имеет производную n-го порядка,* $Q(x)$ *– многочлен степени не выше n такой, что* $f(x)=Q(x)+o(x-x_0)^n$ *при* $x\to x_0$. *Тогда* $Q(x)$ *– многочлен Тейлора степени n функции* $f(x)$ *в точке* x_0, *т.е.* $Q(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Доказательство. По условию**,** $f(x)=Q(x)+o_1(x-x_0)^n$ и пусть $P(x)$ – многочлен Тейлора степени n функции $f(x)$ в точке x_0, тогда, по теореме 6, $f(x)=P(x)+o_2(x-x_0)^n$**.** Отсюда $Q(x)=f(x)-o_1(x-x_0)^n$ и $P(x)=f(x)-o_2(x-x_0)^n$, при $x\to x_0$ и поэтому $Q(x)-P(x)=o_2(x-x_0)^n-o_1(x-x_0)^n=o_3(x-x_0)^n$. Степень многочлена $T(x)=Q(x)-P(x)$ не больше, чем n. Из Леммы 7 следует, что многочлен $T(x)$ есть тожественный ноль.

Пример 9. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x=1$, и $f(x)=5x^2-2x+3+o(x-1)^2$ при $x\to 1$. Найти $f(1), f'(1)\ f'(1)$.

Решение. Из теоремы 8 следует, что $P(x)=5x^2-2x+3$ – многочлен Тейлора второй степени для функции $f(x)$ в точке $x=1$. Его производные $P'(x)=10x-2$, и $P''(x)=10$. Следовательно, согласно теореме 5,

$$f(1)=P(1)=6;$$
$$f'(1)=P'(1)=8;$$
$$f''(1)=P''(1)=10. \blacksquare$$

Теорема 10 (**формула Тейлора в форме Лагранжа**). *Пусть функция* $f(x)$ *в некотором интервале* $(a;b)$, *содержащем точку* x_0, *имеет производные вплоть порядка* $(n+1)$, *и пусть* $P_n(x)$ – *её многочлен Тейлора степени n в точке* x_0. *Тогда для любого* $x\in(a;b)$ *найдется точка* ξ, *расположенная между* x_0 *и x, такая, что*

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Замечание. Искомую точку ξ можно представить в виде $\xi=x_0+\theta\cdot(x-x_0)$, где $\theta\in(0;1)$.

Доказательство. Для $x=x_0$ теорема очевидно верна при $\xi=x_0$ (θ – любое). Пусть для определенности $x>x_0$. Обозначим, как и ранее, $R(x)=f(x)-P_n(x)$. Поскольку производная порядка $(n+1)$ многочлена степени *n* равна нулю, имеем:

$$R(x_0)=R'(x_0)=R''(x_0)=...=R^{(n)}(x_0)=0 \text{ и } R^{(n+1)}(x)\equiv f^{(n+1)}(x).$$

Пусть $Q(t)=(t-x_0)^{n+1}$, заметим, что

$Q'(t)=(n+1)(t-x_0)^n$, $Q''(t)=(n+1)\cdot n(t-x_0)^{n-1}$, ..., $Q^{(n)}(t)=(n+1)\cdot n\cdot...\cdot 2\cdot(t-x_0)$,

и что $Q^{(n+1)}(t)\equiv const=(n+1)!$, тогда как $Q(x_0)=Q'(x_0)=Q''(x_0)=...=Q^{(n)}(x_0)=0$.

Применим к паре функций $R(t)$ и $Q(t)=(t-t_0)^{n+1}$ на отрезке $[x_0;x]$ теорему Коши: получим, что существует $x_1\in(x_0;x)$, т.е. $x_0<x_1<x$, такое, что такое, что

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)-R(x_0)}{Q(x)-Q(x_0)}=\frac{R'(x_1)}{Q'(x_1)}.$$

Далее применим теорему Коши к паре функций $R'(t)$ и $Q'(t)$ на отрезке $[x_0;x_1]$. Получим точку x_2 между к x_0 и x_1 такую, что

$$\frac{R'(x_1)}{Q'(x_1)}=\frac{R'(x_1)-R'(x_0)}{Q'(x_1)-Q'(x_0)}=\frac{R''(x_2)}{Q''(x_2)}.$$

Продолжая в том же духе, получим последовательность точек $x_1,x_2,x_3,...,x_n,x_{n+1}$, такую, что $x_0<x_{n+1}<x_n<...<x_2<x_1<x$ и

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{R'(x_1)}{Q'(x_1)}=\frac{R''(x_2)}{Q''(x_2)}=...=\frac{R^{(n)}(x_n)}{Q^{(n)}(x_n)}=\frac{R^{(n+1)}(x_{n+1})}{Q^{(n+1)}(x_{n+1})}.$$

Положим $x_{n+1}=\xi$ и заметим, что

$$\frac{R^{(n+1)}(x_{n+1})}{Q^{(n+1)}(x_{n+1})}=\frac{R^{(n+1)}(\xi)}{Q^{(n+1)}(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Поэтому

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Rightarrow f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Самостоятельно разберите случай $x<x_0$. $\blacksquare$

Пример 11. Написать формулу Тейлора порядка $n = 3$ для функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$ с остаточным членом в форме (а) Пеано; (б) Лагранжа.

Решение. Мы уже нашли в этой точке многочлен Тейлора степени 3:

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$

(а) Поэтому формула Тейлора в форме Пеано выглядит так:

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 + o(x-4)^3 \text{ при } x \to 4.$$

(б) Находим производную 4-го порядка функции $f(x) = \sqrt{x}$:

$$f^{(4)}(x) = (f'''(x))' = \left(\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\right)' = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16(\sqrt{x})^7}$$

Остаточный член равен

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4 = -\frac{15(x-4)^4}{16(\sqrt{\xi})^7 \cdot 24} = -\frac{5(x-4)^4}{128(\sqrt{\xi})^7}$$

А сама формула Тейлора запишется так

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{5(x-4)^4}{128(\sqrt{\xi})^7}$$

где ξ расположено между 4 и *x*. ■

2. Формула Маклорена.

Определение 12. Формула и многочлен Тейлора при $x_0 = 0$ называются ***формулой*** и ***многочленом Маклорена*** соответственно.

Таким образом, формула Маклорена с остаточным членом в форме Пеано выглядит так:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

при $x \to 0$, а остаточный член формулы Маклорена в форме Лагранжа равен $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, где ξ расположено между 0 и *x*.

Пример 13. Найти многочлен Маклорена функций (а) $f(x) = e^x$; (б) $f(x) = (1+x)^a$ ($a = const \in \mathbf{R}$); (в) $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Решение. (а) Все производные функции $f(x) = e^x$ равны её самой, поэтому коэффициенты её многочлена Маклорена такие:

$$c_0 = f(0) = e^0 = 1, c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{e^0}{k!} = \frac{1}{k!}.$$

Сам многочлен Маклорена для функции e^x:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

(б) Находим производные:

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1},\ f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}, \dots, f^{(n)}(x) = a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)(1+x)^{a-n}.$$

Удобно использовать символику

$$a\uparrow^n = \underbrace{a\cdot(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}_{n \text{ множителей}} \text{ и } a\downarrow^n = \underbrace{a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}_{n \text{ множителей}}$$

(***восходящие*** и ***нисходящие дискретные степени*** числа *a*). Например, $8\uparrow^3 = 8\cdot 9\cdot 10 = 720$, $7\downarrow^3 = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$. Тогда производную порядка *k* функции $(1+x)^a$ можно записать так: $f^{(k)}(x) = a\downarrow^k \cdot (1+x)^{a-k}$ и коэффициент многочлена Маклорена равен $c_k = \dfrac{a\downarrow^k}{k!}$, и формула Маклорена для этой функции выглядит так:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a\cdot(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a\downarrow^n}{n!}x^n + o(x^n) \text{ при } x \to 0$$

(в) данная функция является частным случаем предыдущей при $a = \frac{1}{2}$. Упростим выражение для коэффициента c_k:

$$c_0 = 1, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}\ ,\ c_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

$$c_k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\downarrow^k}{k!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2k-3}{2}\right) = \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{k!\cdot 2^k}$$

Последняя формула верна при $k \geq 1$ (вспомним, что $0! = 0!! = (-1)!! = 1$):
Итак,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{n!\cdot 2^n}x^n + o(x^n) \text{ при } x \to 0$$

Теорема 14. *Если функция $f(x)$ четная (нечетная), то её многочлен Маклорена содержит только четные (соответственно нечетные) степени x.*

Доказательство. Известно, что если некоторая функция чётная (нечётная), то её производная нечётная (соответственно чётная), и что если функции $f(x)$ нечётна и определена в нуле, то $f(0) = 0$. Пусть $f(x)$ – чётная функция, тогда её производные нечетного порядка $f^{(2k+1)}(x)$ – нечетные функции, и коэффициенты при нечетных степенях в её многочлене Маклорена равны нулю: $c_{2k+1} = \dfrac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = 0$. Аналогично, если функция $f(x)$ чётная, то её производные чётного порядка $f^{(2k)}(x)$ – тоже нечётные функции, и коэффициенты при чётных степенях также равны нулю: $c_{2k} = \dfrac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = 0$.

Пример 15. Найти многочлен Маклорена для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ нечетная, и поэтому её многочлен Маклорена будет содержать только нечетные степени *x*. Найдем значения производных нечётного порядка $f^{(2n+1)}(x)$ в точке $x_0 = 0$. Находим $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, откуда

$$g(x)\cdot(x^2+1) \equiv 1, \qquad (2)$$

где $g(x) = f'(x)$. Найдем *m*-ю производную (по формуле Лейбница[1]) левой и правой части (2). Получим:

$$\left(g(x)\cdot(x^2+1)\right)^{(m)} = g^{(m)}(x)\cdot(x^2+1) + m\cdot g^{(m-1)}(x)\cdot 2x + \frac{m(m-1)}{2}\cdot g^{(m-2)}(x)\cdot 2 + 0 \equiv 0,$$

Отсюда, при $m = 2n$ и $x = 0$:

$$g^{(2n)}(0) = -2n\cdot(2n-1)g^{(2n-2)}(0).$$

Учитывая, что $g^{(0)}(0) = g(0) = 1$, по индукции легко получаем, что $f^{(2n+1)}(0) = g^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$. Окончательно, коэффициент $c_{2n+1} = \dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

[1] **Формула Лейбница** для производной порядка *m* произведения двух функций:

$$\left(g(x)\cdot h(x)\right)^{(m)} = g^{(m)}(x)\cdot h(x) + m\cdot g^{(m-1)}(x)\cdot h'(x) + \frac{m(m-1)}{2}\cdot g^{(m-2)}(x)\cdot h''(x) + \ldots + m\cdot g'(x)\cdot h^{(m-1)}(x) + h^{(m)}(x)$$

Следовательно, искомый многочлен Маклорена (степени $2n+1$) есть имеет вид $P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. ■

Таблица 16. Приведем разложения по формуле Маклорена некоторых элементарных функций (при $x \to 0$):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n); \qquad (3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a \cdot (a-1)}{2!} x^2 + \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2)}{3!} x^3 ... + \frac{a{\downarrow}^n}{n!} x^n + o(x^n);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n};$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Обращаем внимание, что две последние формулы не содержат факториалов. ■

На рис. 2 изображены графики функции $y = \sin x$ (чёрным цветом) и её многочленов Маклорена 3-й, 5-й и 7-й степени (синим, зеленым и лиловым цветом соответственно).

Если для какой-то функции вычисление её производных большого порядка получить затруднительно, то их разложения Маклорена можно получить по правилу Лопиталя.

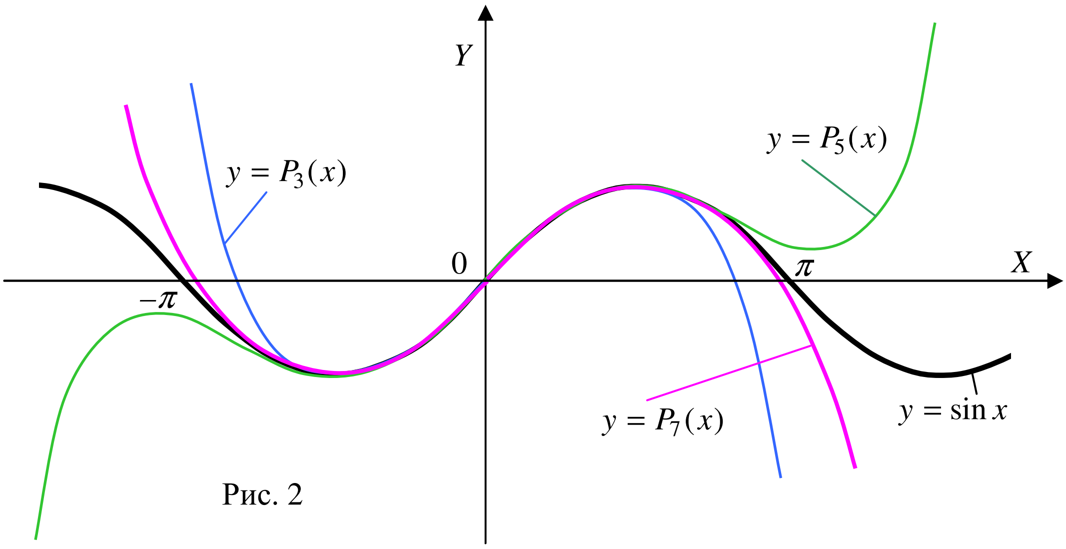

Рис. 2

Пример 17. Найти разложение Маклорена 5-го порядка функции $y = \arcsin x$.

Решение. Эта функция нечетная, и поэтому её разложение Маклорена содержит только нечетные степени x:

$$\arcsin x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^5) \text{ при } x \to 0 \qquad (4)$$

Требуется найти постоянные A, B и C. Поскольку $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$, то $A = 1$. Далее перенесем в (3) слагаемое $Ax = x$ влево, разделим на x^3 и перейдем к пределу при $x \to 0$:

$$\arcsin x - Ax = Bx^3 + Cx^5 + o(x^5) \Rightarrow$$

$$B = \lim_{x\to 0}\left(B + Cx^2 + \frac{o(x^5)}{x^3} \right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x - x}{x^3} \right) = \left\{ \begin{matrix} t = \arcsin x \\ t \to 0 \\ x = \sin t \sim t \end{matrix} \right\} = \lim_{t\to 0} \frac{t - \sin t}{\sin^3 t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{t - \sin t}{t^3} \right) = \left[\frac{0}{0} \right] = \{\text{правило Лопиталя 2 раза}\} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6}.$$

Для нахождения константы C поступим аналогично:

$$\arcsin x - Ax - Bx^3 = Cx^5 + o(x^5) \Rightarrow$$

$$C = \lim_{x\to 0}\left(C + \frac{o(x^5)}{x^5} \right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x - x - \frac{1}{6}x^3}{x^5} \right) = \left\{ \begin{matrix} t = \arcsin x \\ t \to 0 \\ x = \sin t \sim t \end{matrix} \right\} = \lim_{t\to 0} \frac{t - \sin t - \frac{1}{6}\sin^3 t}{\sin^5 t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{t - \sin t - \frac{1}{6}\sin^3 t}{t^5} \right) = \left[\frac{0}{0} \right] = \{\text{правило Лопиталя 2 раза}\} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t - \frac{1}{2}\sin^2 t \cos t}{5t^4} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - \sin t \cos^2 t + \frac{1}{2}\sin^3 t}{20t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^3 t + \frac{1}{2}\sin^3 t}{20t^3} = \frac{3}{40}.$$

Итак,

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) \text{ при } x \to 0. \blacksquare$$

3 . Нахождение разложений Маклорена и Тейлора сложных функций

Если в разложении Маклорена (с остаточным членом в форме Пеано) порядка n для функции $f(t)$ заменить t на одночлен λx^k, то, по теореме единственности, получится разложение Маклорена степени nk для функции $f(\lambda x^k)$.

Пример 18. Найти разложение Маклорена 6-го порядка функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Решение. В разложение Маклорена 3-го порядка функции e^t

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

подставим $t = -\frac{x^2}{2}$. Получим (при $x \to 0$):

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x^2}{2} \right)^3 + o(x^6) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + o(x^6). \blacksquare$$

Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ известны их разложения по формуле Маклорена n-го порядка (с остаточным членом в форме Пеано), то для нахождения разложений Маклорена того же порядка для $f(x) \pm g(x)$ или $f(x) \cdot g(x)$ надо взять сумму, разность (или соответственно произведение) многочленов Маклорена функций $f(x)$ и $g(x)$, привести подобные, а слагаемы степени выше n опустить, отнеся их к $o(x^n)$.

Пример 19. Разложить по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до $n = 4$ функции:

(а) $f(x) = \ln(1 + 2x) - 2\cos 3x$;   (б) $g(x) = e^{-x} \cdot \sqrt{1 + x}$.

Решение. (а) Разложим до $n = 4$ исходные функции (при $x \to 0$):

$$\ln(1 + 2x) = (2x) - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{3}(2x)^3 - \frac{1}{4}(2x)^4 + o(x^4) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o(x^4);$$

$$\cos 3x = 1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{24}(3x)^4 + o(x^4) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4).$$

Тогда

$$f(x)=\ln(1+2x)-2\cos 3x=$$
$$\left(2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-4x^4+o_1(x^4)\right)-2\left(1-\frac{9}{2}x^2+\frac{27}{8}x^4+o_2(x^4)\right)=$$
$$=-2+2x+7x^2+\frac{8}{3}x^3-\frac{5}{32}x^4+o_3(x^4)$$

(б) Также разложим до $n=4$ исходные функции:

$$e^{-x}=1+(-x)+\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{6}(-x)^3+\frac{1}{24}(-x)^4+o(x^4)=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4),$$
$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+o(x^4)$$

Получим:

$$g(x)=e^{-x}\cdot\sqrt{1+x}=\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o_1(x^4)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+o_2(x^4)\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{13}{48}x^3-\frac{79}{384}x^4+o_3(x^4).$$

Ответы: (а) $f(x)=-2+2x+7x^2+\frac{8}{3}x^3-\frac{5}{32}x^4+o(x^4)$;

(б) $g(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{13}{48}x^3-\frac{79}{384}x^4+o(x^4)$. ■

Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ известны их разложения Маклорена порядка n при $x\to 0$:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+o(x^n),$$
$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n+o(x^n)$$

и $g(0)=b_0\neq 0$, то можно найти разложение Маклорена того же порядка их частного $\frac{f(x)}{g(x)}$, представив искомое разложение с ***неопределёнными*** (т.е. пока неизвестными) коэффициентами $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+o(x^n)}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n+o(x^n)}\equiv C_0+C_1x+C_2x^2+...+C_nx^n+o(x^n).$$

Умножим обе части на знаменатель:

$$a_0+a_1x+...+a_nx^n+o(x^n)\equiv\left(b_0+b_1x+...+b_nx^n+o(x^n)\right)\left(C_0+C_1x+...+C_nx^n+o(x^n)\right)$$

Раскроем в правой части скобки и приведем подобные, опуская члены степени выше n (т.е. отнеся их к $o(x^n)$). Мы получим тождество

$$a_0+a_1x+...+a_nx^n+o(x^n)\equiv b_0C_0+(b_0C_1+b_1C_0)x+(b_0C_2+b_1C_1+b_2C_0)+...+o(x^n)$$

Приравняем в нем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему уравнений (в которой коэффициенты a_i и b_j известны):

$$a_0=b_0C_0,$$
$$a_1=b_0C_1+b_1C_0,$$
$$a_2=b_0C_2+b_1C_1+b_2C_0,$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

из которой последовательно находим неизвестные коэффициенты $C_0, C_1, C_2, ...$

Пример 20. Найти разложение по формуле Маклорена 3-го порядка с остаточным членом в форме Пеано функции $h(x)=\frac{e^x}{2+\sin x}$.

Решение. Напишем разложения Маклорена 3-го порядка функций в числителе и в знаменателе:

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, $2 + \sin x = 2 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, и представим их отношение с неопределенными коэффициентами A, B, C, D:

$$\frac{e^x}{2+\sin x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3) \Rightarrow$$

$$e^x = (2 + \sin x)\left(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)\right) \Rightarrow$$

$$1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o_1(x^3) \equiv \left(2 + x - \frac{1}{6}x^3 + o_2(x^3)\right)\left(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o_3(x^3)\right)$$

Раскроем справа скобки и приведем подобные члены:

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o_1(x^3) \equiv 2A + (A + 2B)x + (B + 2C)x^2 + \left(-\tfrac{1}{6}A + C + 2D\right)x^3 + o_4(x^3)$$

Приравнивая в последнем тождестве коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа, получим систему уравнений:

при x^0: $1 = 2A,$

при x^1: $1 = A + 2B,$

при x^2: $\frac{1}{2} = B + 2C,$

при x^3: $\frac{1}{6} = -\tfrac{1}{6}A + C + 2D.$

Решая эту систему сверху вниз, последовательно находим значения коэффициентов:

$$A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2}(1 - A) = \frac{1}{4},\ C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - B\right) = \frac{1}{8},\ D = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}A - C\right) = \frac{1}{16}$$

Итак,

$$\frac{e^x}{2+\sin x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \text{ при } x \to 0 \ \blacksquare$$

В формулу Маклорена функции $f(t)$ можно подставлять вместо t любую бесконечно малую при $x \to 0$ функцию $g(x)$ с известным разложением Маклорена. Полученное представление $f(g(x)) = P_n(x) + o(x^n)$ при $x \to 0$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, по теореме единственности, и будет разложением порядка n Маклорена функции $f(g(x))$.

Пример 21. Разложить по формуле Маклорена до $n = 5$ функцию $\ln(1 + \sin 3x)$.

Решение. Подставим в разложение 5-го порядка функции

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + o\left(t^5\right)$$

разложение (до $n = 5$) функции

$$t = \sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + o(x^5) = 3x - \frac{9x^3}{2} + \frac{27x^5}{40} + o(x^5),$$

причём, слагаемые вида Ax^n при $n > 5$ будем опускать, отнеся их к $o(x^5)$:

$$\ln(1 + \sin 3x) = (\sin 3x) - \frac{1}{2}(\sin 3x)^2 + \frac{1}{3}(\sin 3x)^3 - \frac{1}{4}(\sin 3x)^4 + \frac{1}{5}(\sin 3x)^5 =$$

$$= \left(3x - \frac{9x^3}{2} + \frac{27x^5}{40}\right) - \frac{1}{2}\left(3x - \frac{9x^3}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(3x - \frac{9x^3}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}(3x)^4 + \frac{1}{5}(3x)^5 + o(x^5) =$$

$$= 3x - \frac{9x^3}{2} + \frac{27x^5}{40} - \frac{1}{2}\left(9x^2 - 27x^4 + o(x^5)\right) + \frac{1}{3}\left(27x^3 - \frac{243x^5}{2} + o(x^5)\right) - \frac{81x^4}{4} + \frac{243x^5}{5} + o(x^5) =$$

$$= 3x - \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} - \frac{27x^4}{4} + \frac{351x^5}{40} + o(x^5).$$

По теореме единственности, полученное представление и есть разложение Маклорена функции $\ln(1 + \sin 3x)$ при $x \to 0$. $\blacksquare$

Аналогичным образом можно получить и формулу Тейлора для сложной функции $f(x)$ в произвольной точке x_0. Надо заменить $t = x - x_0$, подставить $x = x_0 + t$, разложить полученную функцию $g(t) = f(x_0 + t)$ по формуле Маклорена, а потом обратно заменить $t = (x - x_0)$.

Пример 22. Разложить функцию $f(x) = x^x$ по формуле Тейлора в точке $x_0 = 1$ порядка 3 с остаточным членом в форме Пеано.

Решение. Обозначим $t = x - 1$, и подставим в эту функцию $x = 1 + t$. Получим $x^x = (1+t)^{(1+t)} = e^{(1+t)\cdot\ln(1+t)} = e^z$, где $z = (1+t)\cdot\ln(1+t)$. Сначала получим разложение 3-го порядка функции $z(t)$:

$$z = (1+t)\cdot\ln(1+t) = (1+t)\cdot\left(t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)\right) = t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$$

Теперь подставим его в разложение порядка 3 функции $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + o(z^3)$:

$$x^x = e^z = 1 + \left(t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)\right) + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\right)^2 + \frac{1}{6}\big(t + o(t)\big)^3 + o(t^3) =$$

$$= 1 + t + t^2 + \frac{1}{2}t^3 + o(t^3) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3.$$

Ответ: $x^x = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o(x-1)^3$ при $x \to 1$.

На рис. 3 изображены графики функции $y = x^x$ (определенной при $x > 0$) и её многочлена Тейлора 3-й степени точке $x = 1$:

$$y = P_3(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^3 - x^2 + x + 1\right). \ ■$$

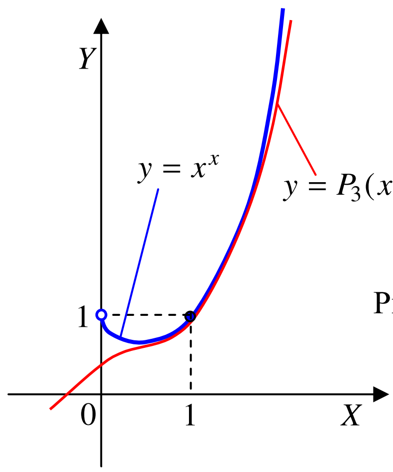

Рис.3

4. Применения формулы Тейлора для приближенных вычислений и нахождения пределов

Формулы Тейлора применяются для доказательства теорем, касающихся исследования функций, при вычислении пределов, приближенных вычислениях с оценкой погрешности и для доказательств неравенств.

Приближенные вычисления осуществляются по формуле $f(x) \approx P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен Тейлора, а ошибка равна модулю остаточного члена в форме Лагранжа: $\delta = |f(x) - P_n(x)| = |R(x)|$.

Пример 23. Вычислить приближенно $\sqrt{5}$ с помощью формулы Тейлора 3-го порядка и оценить погрешность.

Решение. В нашем случае $f(x) = \sqrt{x}, x = 5,\ x_0 = 4,\ x - x_0 = 1$, многочлен Тейлора 3-го порядка мы уже построили в примере 3, а формулу Тейлора – в примере 11. Поэтому

$$\sqrt{5} \approx P_3(5) = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} = 2 + \frac{128 - 8 + 1}{512} = 2\frac{121}{512} \cong 2{,}236328.$$

Оценим ошибку. Поскольку $4 < \xi < 5$, то $\sqrt{5} - 2\frac{113}{512} = -\frac{5}{128(\sqrt{\xi})^7} < 0$.

и её модуль $\delta = \left|\sqrt{5} - 2\frac{113}{512}\right| = \frac{5}{128(\sqrt{\xi})^7} < \frac{5}{128(\sqrt{4})^7} = \frac{5}{2^{14}} = \frac{5}{16384} < 3\cdot 10^{-4}$. ■

Пример 24. Найти порядок *n* формулы Маклорена для приближенного вычисления $\sqrt[3]{e}$ с точностью меньше 10^{-3}.

В нашем случае $f(x)=e^x,\ x=\dfrac{1}{3}$. Поскольку производная этой функции любого порядка $(e^x)^{(n)}=e^x$, формула Маклорена для неё с остаточным членом в форме Лагранжа выглядит так:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\xi}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $0<\xi<x=\dfrac{1}{3}$. Заметим, что $e^{\xi}<\sqrt[3]{e}<2$.

Поэтому $\sqrt[3]{e}\approx 1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2!\cdot 3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n!\cdot 3^n}$, и ошибка $\delta=\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!\cdot 3^{n+1}}<\dfrac{2}{(n+1)!\cdot 3^{n+1}}=\varepsilon_n$.

Достаточно найти n так, чтобы $\varepsilon_n<\dfrac{1}{1000}$. Последнее неравенство равносильно $a_{n+1}>2000$, где $a_n=n!\cdot 3^n$. Подбираем: $a_4=4!\cdot 3^4=24\cdot 81<2000,\ a_5=5!\cdot 3^5=120\cdot 243>2000$.

Следовательно, $n=4$ и $\sqrt[3]{e}\approx 1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2!\cdot 3^2}+\dfrac{1}{3!\cdot 3^3}+\dfrac{1}{4!\cdot 3^4}$ с ошибкой меньше 10^{-3}. ■.

Эти примеры имеет чисто иллюстративный характер, поскольку, разумеется, значения $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{e}$ с высокой точностью можно вычислить за долю секунды на любом электронном устройстве (телефоне, планшете, компьютере). Однако описанный в примерах 23 и 24 метод оценки погрешности используется для обоснования более сложных приближенных вычислений, например, нахождения значений так называемых «не берущихся» определенных интегралов с заданной погрешностью.

При вычислении пределов можно применять не только правило Лопиталя, но и заменять отдельные функции на их разложения по формуле Тейлора (Маклорена) с остаточным членом форме Пеано. Порядок n разложений Маклорена должен быть таким, чтобы после подстановки и приведения подобных остались члены с ненулевым коэффициентом.

Пример 25. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-e^x}{\ln(1-x)+\sin x}.$$

Решение. Напишем разложения Маклорена этих функций, например до $n=3$:

$$\sqrt{1+2x}=1+\frac{2x}{2}-\frac{(2x)^2}{8}+\frac{(2x)^3}{16}...=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

$$\ln(1-x)=(-x)-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}+...=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

Теперь мы видим, что достаточно было разложить эти функции до $n=2$. Подставляем эти разложения в вычисляемый предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-e^x}{\ln(1-x)+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x-\frac{1}{2}x^2+o_1(x^2)\right)-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o_2(x^2)\right)}{\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o_3(x^2)\right)+\left(x+o_4(x^2)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o_5(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2+o_6(x^2)}==\lim_{x\to 0}\frac{-1+\frac{o_5(x^2)}{x^2}}{-\frac{1}{2}+\frac{o_6(x^2)}{x^2}}=\frac{-1+0}{-\frac{1}{2}+0}=2.\ ■$$

5. **Применение формулы Тейлора для доказательства неравенств**

Теорема 26. *Пусть функция* $f(x)$ *n раз дифференцируема на некотором промежутке* $(a;b)$, *содержащем точку с, выполняются неравенства* $f(c)\geq 0,\ f'(c)\geq 0,\ldots,\ f^{(n-1)}(c)\geq 0$ *и* $f^{(n)}(x)>0$ *для всех* $x\in(c;b)$. *Тогда и* $f(x)>0$ *для всех* $x\in(c;b)$.

Доказательство. Разложим функцию $f(x)$ для $x\in(c;b)$ в точке c по формуле Тейлора порядка $(n-1)$. Получим, что для некоторого $\xi\in(c;x)$ (т.е. $c<\xi<x<b$):

$$f(x)=\underbrace{f(a)}_{\geq 0}+\underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\cdot\underbrace{(x-c)}_{>0}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\underbrace{f^{(n-1)}(c)}_{\geq 0}\cdot\underbrace{(x-c)^{n-1}}_{>0}+\frac{1}{n!}\underbrace{f^{(n)}(\xi)}_{>0}\cdot\underbrace{(x-c)^{n}}_{>0}>0\,. \ ■$$

Пример 27. Доказать, что $2\cdot 3^x>x^3+3x+2$ для всех $x>1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=2\cdot e^x-x^3-3x-2$. Проверим выполнение теоремы 26 для точки $c=1$ (заметим, что $\ln 3>\ln e=1$):

$f(1)=0$;

$f'(x)=2\ln 3\cdot 3^x-3x^2-3$, $f'(1)=2\ln 3\cdot 3-3-3=6(\ln 3-1)>0$;

$f''(x)=2\cdot\ln^2 3\cdot 3^x-6x$, $f''(1)=2\ln 3\cdot 3-6=6\left(\ln^2 3-1\right)>0$.

Третья производная $f'''(x)=2\cdot\ln^3 3\cdot 3^x-6$ всюду возрастает, и поэтому при $x>1$

$$f'''(x)>f'''(1)=6\left(\ln^3 3-1\right)>0\,.$$

Поэтому, по теореме 26, $f(x)>0$ для всех $x>1$. Более подробно: найдется ξ между 1 и x такое, что:

$$f(x)=\underbrace{f(1)}_{=0}+\underbrace{f'(1)}_{>0}\cdot\underbrace{(x-1)}_{>0}+\frac{1}{2!}\underbrace{f''(1)}_{>0}\cdot\underbrace{(x-1)^2}_{>0}+\frac{1}{3!}\underbrace{f'''(\xi)}_{>0}\cdot\underbrace{(x-1)^3}_{>0}>0\,. \ ■$$

Пример 28. Доказать, что $\operatorname{tg}x>x+x^3$ для всех $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)-x-\frac{1}{3}x^3$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Проверим условия теоремы 26 для $c=0$. Пусть $0<x<\frac{\pi}{2}$. Тогда

$f(0)=0$, $f'(x)=1+\operatorname{tg}^2x-1-x^2=\operatorname{tg}^2x-x^2$,

неравенство $\operatorname{tg}^2x-x^2>0\Leftrightarrow\operatorname{tg}^2x>x^2\Leftrightarrow\operatorname{tg}x>x\Leftrightarrow g(x)\equiv\operatorname{tg}x-x>0$.

Теперь применим теорему 26 к функции $g(x)$:

$g(0)=0$ и $g'(x)=1+\operatorname{tg}^2x-1=\operatorname{tg}^2x>0$.

Следовательно, $g(x)>0\Rightarrow f'(x)=\operatorname{tg}^2x-x^2>0$.

Поэтому и $f(x)>0$. ■

Вопросы и упражнения для самостоятельного решения

1. Что представляет собой формула Тейлора:

(а) нулевого порядка с остаточным членом в форме Лагранжа;

(б) первого порядка с остаточным членом в форме Пеано?

2. Написать формулу Тейлора для функции $f(x)$ порядка *n* в точке x_0 в форме Лагранжа и в форме Пеано: (а) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=2, n=3$; (б) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=1, n=2$; (в) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$, $n=3$; (г) $f(x)=3^x$, $x_0=1$, $n=4$.

3. Написать формулу Маклорена 4-го порядка для функций:

(а) $\dfrac{1}{1+x}$; (б) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$; (в) $(1+x)^{10}$; (г) $\sqrt[3]{1+x}$; (д) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

4. Найти многочлен Маклорена указанной степени n для функции $f(x)$:

(а) $f(x)=\cos 2x+3\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}$, $n=5$; (в) $f(x)=\ln\left(1+2x^3\right)$, $n=6$; (г) $f(x)=(x+2)e^{-3x}$, $n=4$;

(д) $f(x)=\sin 2x\cdot\ln(1+x)$, $n=5$; (е) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}}{\cos x}$, $n=3$; (ж) $f(x)=\sqrt[3]{\operatorname{ch}3x}$, $n=3$;

(з) $f(x)=e^{\cos 2x}$, $n=4$; (и) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $n=7$; (к) $f(x)=\operatorname{th}x$, $n=7$.

5. Найти наиболее простым способом многочлен Маклорена 5-й степени функций: (а) $\cos^2 x$; (б) $\sin^3 x$.

6. Пусть многочлен Маклорена степени n функции $f(x)$ имеет вид $P(x)=a+bx+cx^2+\ldots+dx^n$. Найти многочлен Маклорена степени $(n-1)$ для производной $f'(x)$.

7. Пусть многочлен Маклорена степени n для производной $f'(x)$ имеет вид $P(x)=a+bx+cx^2+\ldots+dx^n$. Найти многочлен Маклорена степени $(n+1)$ для самой функции $f(x)$

8. Найти с помощью задачи 7 разложение Маклорена 7-го порядка функций:

(а) $\operatorname{arctg}x$; (б) $\arcsin x$; (в) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; (г) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

9. Разложить по формуле Тейлора в форме Пеано 3-го порядка функции $f(x)$ в точке $x_0=1$:

(а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$; (б) $f(x)=x^{\sin\pi x}$.

10. Вычислить приближенно с помощью формулы Тейлора второго порядка и оценить погрешность: (а) $\sqrt[3]{7}$; (б) $\sin 31°$; (в) $\operatorname{arctg}(1,2)$

11. Вычислить приближенно с помощью формулы Маклорена 3-го порядка и оценить погрешность: (а) $\sqrt[10]{e}$; (б) $\ln(0,97)$; (в) $\sqrt[3]{1,2}$; (г) $\sqrt[5]{37}$ (подсказка: $37=32\left(1+\frac{5}{32}\right)$; (д) $\sin\dfrac{\pi}{7}$.

12. Оценить погрешность δ приближенного вычисления по формуле Маклорена порядка 4:

(а) $\sqrt{e}$; (б) $\cos 1$; (в) $\sqrt[3]{2}$.

13. Найти порядок n формулы Маклорена для приближенного вычисления с заданной точностью меньше ε:

(а) $e=e^1$, $\varepsilon=10^{-3}$; (б) $\sin 1$, $\varepsilon=10^{-2}$; (в) $\cos\dfrac{1}{2}$, $\varepsilon=0,005$.

14. Найти пределы, применяя разложения Маклорена элементарных функций.

(а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}+2\sin x-\cos x}{\ln(1+3x)-x-2\operatorname{sh}x}$; (б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\operatorname{ch}x-\sin x}{\sqrt{1+2x}-1+\ln(1-x)}$.

15. Доказать неравенства:

(а) $\arcsin x>x+\dfrac{x^3}{6}$ для всех $x\in(0;1)$; (б) $\operatorname{arctg}x<x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}$ для всех $x>0$;

(в) $\operatorname{sh}x>x+\dfrac{x^3}{6}$ для всех $x>0$; (г) $9\cdot 2^{x-1}>(x+1)^2$ для всех $x>2$ (подсказка: $\ln 2=0,69>\dfrac{2}{3}$).