SWorld – 17-29 March 2015
http://www.sworld.education/index.php/ru/conference/the-content-of-conferences/archives-of-individual-conferences/march-2015
MODERN DIRECTIONS OF THEORETICAL AND APPLIED RESEARCHES '2015
Физика и математика – Физика, механика и астрономия

УДК 533.72

Гермидер О.В., Попов В.Н.

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА В КАНАЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Набережная Северной Двины 17, 163060

Germider O.V., Popov V.N.

THE FLOW OF VISCOUS FLUID OR GAS IN A CHANNEL OF RECTANGULAR CROSS-SECTION

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Severnaya Dvina Emb. 17, Russia; 163002

Аннотация. В рамках гидродинамического подхода построено аналитическое (в виде ряда Фурье) решение задачи об изотермическом течении вязкой жидкости или газа в канале прямоугольного сечения при наличии параллельного оси симметрии канала градиента давления (двумерного течения Пуазейля). Решение уравнения Навье-Стокса с граничными условиями прилипания построено методом Фурье (методом разделения переменных) с использованием пакета символьных вычислений Maple 17. С учетом полученного решения построен профиль массовой скорости жидкости или газа в канале. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными другими авторами.

Ключевые слова: система уравнений Навье-Стокса, профиль массовой скорости, двумерное течение Пуазейля, символьные вычисления.

Abstract. In terms of the hydrodynamic approach the analytical solution (in the form of a Fourier series) of the problem of isothermal flow of viscous fluid or gas in a channel of rectangular cross-section in the presence of parallel to the axis of symmetry of the channel pressure gradient (two-dimensional flow Poiseuille flow) is *constructed. The solution of the Navier-Stokes equations with boundary conditions of adhesion is constructed by the Fourier method (method of separation of variables) using the symbolic computation package Maple 17. Taking into account the obtained solution the profile of mass velocity of the fluid or gas in the channel is built. Comparison with similar results obtained by other authors is done.*

Key words: the system of the Navier-Stokes equations, the profile of mass flow, two-dimensional Poiseuille flow, symbolic computation.

Введение. Одной из важнейших с практической точки зрения областей применения газовой динамики являются задачи о движении газа в разного рода каналах (соплах, трубах, насадках и т. д.). При этом если число Маха $M = u/c << 1$, где u – скорость потока, а c – местная скорость звука, сжимаемостью газа можно пренебречь [1]. В этом случае в отсутствии массовых сил для описания установившихся течений вязкой жидкости или газа в изотермическом приближении можно использовать систему уравнений Навье-Стокса, которая включает в себя уравнение неразрывности и уравнение изменения количества движения (уравнение Навье–Стокса) [2]

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \tag{1}$$

Здесь ρ – плотность жидкости или газа, а μ – коэффициент кинематической вязкости. Левая часть уравнения Навье–Стокса описывает влияние сил инерции, а слагаемые в правой части описывают влияние сил давления и вязкости. Как известно из теории подобия в гидродинамике несжимаемой жидкости или газа, соотношение сил инерции и сил вязкости характеризует число Рейнольдса [1]. Если $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$ – преобладают силы вязкости. Если $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ – преобладают силы инерции. В первом случае возникшие при движении потока жидкости или газа возмущения, исходящие или от стенок канала, или вносящиеся в поток извне, гаснут. Течение при этом остается ламинарным (слоистым). Во втором – появившиеся возмущения развиваются дальше. Характер течения в этом случае становится турбулентным. Таким образом, если инерционными эффектами можно пренебречь, т.е. полагать, что $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$, то уравнение Навье–Стокса записывается в виде

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{\eta} \nabla p. \tag{2}$$

Здесь η – коэффициент динамической вязкости жидкости или газа. Если рассматривать установившееся течение газа в канале постоянного поперечного сечения, то уравнение неразрывности выполняется автоматически. Решение же уравнения (2) представляет собой достаточно сложную с вычислительной точки зрения задачу и может быть получено в общем случае с использованием численных методов. В частности, в последнее время для этих целей широко используются различные пакеты практико-ориентированных программ, например, ANSYS – программное обеспечение для решения задач инженерного анализа с использованием методов математического моделирования (модули Fluent, CFX), FlowVision, FLOW-3D и ряд других, которые могут быть использованы для описания потоков газа в задачах с различной геометрией. Основная сложность использования упомянутых выше пакетов прикладных программ заключается в том, что они требуют больших вычислительных ресурсов. В то же время для каналов простейшей конфигурации решение может быть получено аналитически. В частности, если сечение канала представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, круг, кольцо или часть кольца между двумя радиусами (в этом случае вводят полярную систему координат с осью координат, совпадающей с осью цилиндра) решение уравнения (2) может быть получено с использованием метода Фурье [3], [4]. При этом для получения окончательных результатов, их численного анализа и визуализации можно использовать пакеты символьных вычислений Mathcad или Maple. Последнее обстоятельство и определило цель представленной работы: построение с использованием метода Фурье и пакета символьных вычислений Maple 17 профиля массовой скорости вязкой жидкости или газа в длинном канале прямоугольного поперечного сечения при произвольном соотношении его сторон. Общее решение данной задачи (без проведения какого-либо его численного анализа и анализа предельных случаев) приведено в [3]. В [5] решение уравнения (2) получено в виде суммы двух слагаемых, первое из которых является одномерным решением задачи о течении Пуазейля между бесконечными параллельными пластинами, а второе – отклонение от этого решения. В качестве приложения в [5] вычислен расход газа через поперечное сечение канала и показано, что в случае, когда один из размеров канала много больше второго, полученное решение переходит в результат, справедливый для расхода газа в течении между параллельными пластинами.

Постановка задач. Вывод основных уравнений. Рассмотрим длинный канал постоянного поперечного сечения, стенки которого лежат в плоскостях $x=0$, $x=2a$, $y=0$, $y=2b$, а ось канала параллельна оси Oz (рис. 1).

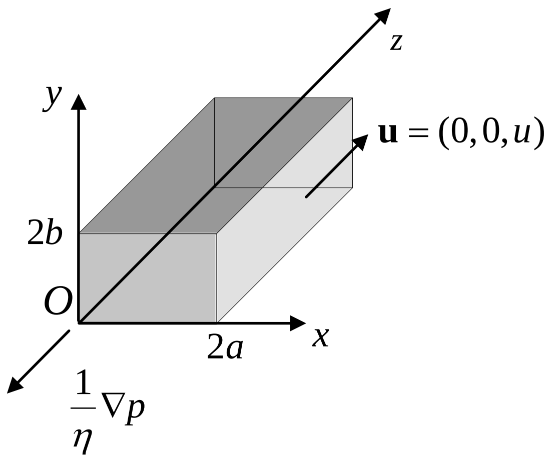


Рис. 1. Схема канала прямоугольного сечения

Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент давления, направленный вдоль оси канала. Вследствие этого жидкость или газ приходят в движение, направленное в сторону противоположную направлению градиента давления. Таким образом, вектор массовой скорости жидкости или газа записывается в виде $\mathbf{u}=(0,0,u)$, где $u=u(x,y)$. Тогда в выбранной системе координат уравнение (2) имеет вид

$$u_{xx}+u_{yy}=A, \tag{3}$$

где $A = \nabla p / \eta$ остается величиной постоянной, а учетом условия прилипания для тангенциальной составляющей скорости на стенках канала граничные условия для функции $u = u(x, y)$ записываются следующим образом

$$u(0, y) = 0, \quad u(2a, y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,2b) = 0. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) ищем в виде

$$u(x, y) = \mathrm{v}(x, y) + \mathrm{w}(x, y) + \frac{1}{4}A(x^2 + y^2). \tag{5}$$

В этом случае для отыскания функций $\mathrm{v}(x, y)$ и $\mathrm{w}(x, y)$ приходим к двум симметричным однородным краевым задачам:

$$\mathrm{v}_{xx} + \mathrm{v}_{yy} = 0, \tag{6}$$

$$\mathrm{v}(0, y) = \mathrm{v}(2a, y) = 0, \quad 0 \le y \le 2b, \tag{7}$$

$$\mathrm{v}(x,0) = -\frac{Ax^2}{4}, \quad \mathrm{v}(x,2b) = -\frac{1}{4}A(x^2 + 4b^2), \quad 0 \le x \le 2a, \tag{8}$$

$$\mathrm{w}_{xx} + \mathrm{w}_{yy} = 0, \tag{9}$$

$$\mathrm{w}(x,0) = \mathrm{v}(x,2b) = 0, \quad 0 \le x \le 2a, \tag{10}$$

$$\mathrm{w}(0, y) = -\frac{Ay^2}{4}, \quad \mathrm{v}(2a, y) = -\frac{1}{4}A(4a^2 + y^2), \quad 0 \le y \le 2b. \tag{11}$$

Каждую из задач решаем методом Фурье. Представим решение краевой задачи (6) в виде произведения $\mathrm{v}(x, y) = X(x)Y(y)$ и подставим его в уравнение (6) и однородное краевое условие (7). Получим

$$X''Y + XY'' = 0,$$

$$X(0)Y(y) = 0, \quad X(2a)Y(y) = 0, \quad 0 \le y \le 2b.$$

Тогда, разделяя переменные и учитывая, что $Y(y)$ не равно тождественно нулю, приходим к системе обыкновенных уравнений

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad Y'' - \lambda^2 Y = 0, \; X(0) = 0, \quad X(2a) = 0, \quad 0 \le y \le 2b,$$

из которой находим:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{4a^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{2a}, \quad Y_n(y) = A_n e^{\frac{\pi n y}{2a}} + B_n e^{-\frac{\pi n y}{2a}}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Таким образом, решение уравнения (6) записывается в виде ряда

$$\mathrm{v}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{\pi n y}{2a}}+B_n e^{-\frac{\pi n y}{2a}}\right)\sin\frac{\pi n x}{2a}. \qquad (12)$$

Коэффициенты A_n и B_n в (12) подбираем так, чтобы выполнялись граничные условия (8)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{\pi n x}{2a}=-\frac{Ax^2}{4}, \qquad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{\pi n b}{a}}+B_n e^{-\frac{\pi n b}{a}}\right)\sin\frac{\pi n x}{2a}=-\frac{1}{4}A(x^2+4b^2). \qquad (14)$$

Раскладывая функции, стоящие в правых частях равенств (13) и (14), в ряд Фурье по синусам кратных дуг на промежутке $[0,2a]$, приходим к системе уравнений для нахождения коэффициентов A_n и B_n:

$$A_n+B_n=2\gamma_{1,n},$$

$$A_n e^{\frac{\pi n b}{a}}+B_n e^{-\frac{\pi b n}{a}}=2\gamma_{2,n}.$$

Здесь

$$\gamma_{1,n}(a)=\frac{a^2A\left(2+(-1)^n\left(\pi^2n^2-2\right)\right)}{\pi^3n^3},$$

$$\gamma_{2,n}(a,b)=\frac{a^2A\left(2+(-1)^n\left(\pi^2n^2-2\right)\right)}{\pi^3n^3}+\frac{b^2\pi^2n^2A\left((-1)^n-1\right)}{\pi^3n^3}.$$

Решая записанную выше систему уравнений, находим

$$A_n=\gamma_{2,n}(a,b)\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{\pi n b}{a}\right)+\gamma_{1,n}(a)-\gamma_{1,n}(a)\,\mathrm{cth}\left(\frac{\pi n b}{a}\right),$$

$$B_n=\gamma_{1,n}(a)+\gamma_{1,n}(a)\,\mathrm{cth}\left(\frac{\pi n b}{a}\right)-\gamma_{2,n}(a,b)\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{\pi n b}{a}\right).$$

Таким образом, решение уравнения (6) имеет вид

$$\mathrm{v}(x,y)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma_{1,n}(a)\,\mathrm{ch}\left(\frac{\pi n y}{2a}\right)+\right.$$

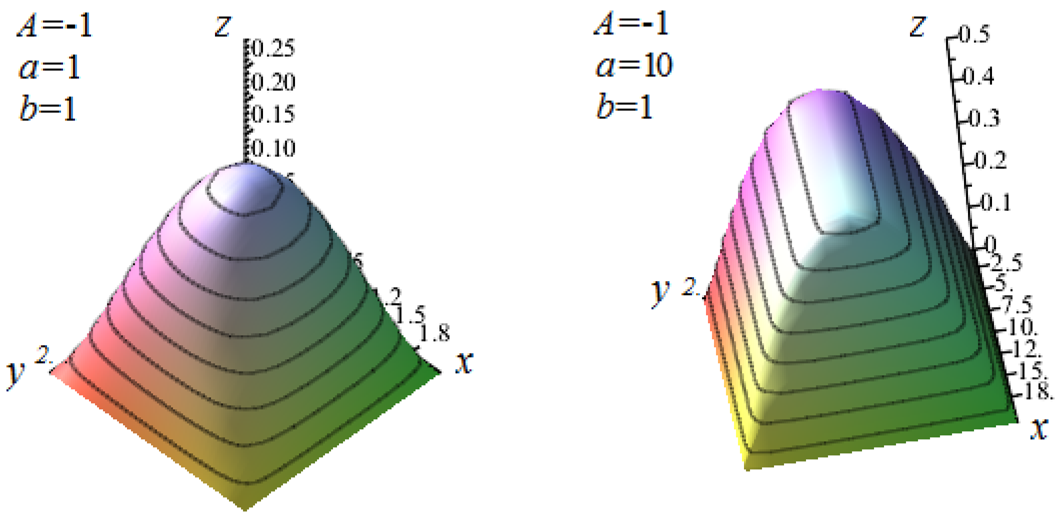
$$\left.+\left(\gamma_{2,n}(a,b)\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{\pi n b}{a}\right)-\gamma_{1,n}(a)\,\mathrm{cth}\left(\frac{\pi n b}{a}\right)\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n y}{2a}\right)\right)\sin\frac{\pi n x}{2a}.$$

Аналогичным образом находим решение краевой задачи (9) – (11):

$$\mathrm{w}(x,y)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma_{1,n}(b)\mathrm{ch}\left(\frac{\pi n x}{2b}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\gamma_{2,n}(b,a)\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{\pi n a}{b}\right)-\gamma_{1,n}(b)\mathrm{cth}\left(\frac{\pi n a}{b}\right)\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi n x}{2b}\right)\right)\sin\frac{\pi n y}{2b}.$$

Таким образом, решение уравнения (3) построено. Визуализация полученных результатов выполнена с использованием пакета символьных вычислений Maple 17. Профиль массовой скорости $u=u(x,y)$ показан на рисунке 2. Как видно из представленного рисунка, в случае, когда размеры сечения одинаковы, профиль скорости вдали от стенок имеет ярко выраженную форму параболоида вращения. В случае, когда один из размеров много больше другого, профиль массовой скорости имеет вид параболического цилиндра, что характерно для плоского течения Пуазейля.



(a) **(b)**

Рис. 2. Профиль массовой скорости $u=u(x,y)$.

Заключение. Итак, в представленной работе рассмотрена задача о течения вязкой жидкости или газа в канале прямоугольного сечения при наличии градиента давления, параллельного оси симметрии канала. В виде ряда Фурье получено решение уравнения Навье-Стокса с граничными условиями прилипания. С использованием пакета символьных вычислений Maple 17 построен профиль массовой скорости вязкой жидкости или газа в канале.

Литература:

1. Зельдович Я.Б. Теория ударных волн и введение в газодинамику – М., Ленинград: Издательство АН СССР, 1946. – 187 с.

2. Лойцанский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учеб. для вузов. – М.: Дрофа, 2003. – 840с.

3. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Главная редакция физико-математической литературы иад-ва «Наука», 1975. – 65 с.

4. Котляр Я.М. Методы математической физики и задачи гидроаэродинамики. Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1991. – 208с.

5. Титарев В.А., Шахов Е.М. Кинетический анализ изотермического течения в длинном микроканале прямоугольного поперечного сечения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 7. с. 1285–1302.

Статья подготовлена при финансовой поддержке в рамках Государственного задания «Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач» (Проект № 3628).

Статья отправлена: 28.02.2015 г.