

**Вопросы для подготовки к экзамену
по курсу «Интегралы и дифференциальные уравнения»
для всех специальностей ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ**

(в квадратных скобках указаны номера лекций по конспекту проф. Иванкова П.Л.
электронный ресурс <http://mathmod.bmstu.ru/Docs/Eduwork/idu/idu.html>)

1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла. [Л. 1,2.]
2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей. [Л. 3.]
3. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции. [Л. 5–6.]
4. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке определенного интеграла. [Л. 5–6.]
5. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла. [Л. 5–6.]
6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о среднем для определенного интеграла. [Л. 5–6.]
7. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу. [Л. 7.]
8. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона-Лейбница. [Л. 5–7.]
9. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определённого интеграла. [Л. 7.]
10. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определённого интеграла. [Л. 7.]
11. Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат. [Л. 7.]
12. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода. [Л. 8–10.]
13. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода. [Л. 8–10.]
14. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода. [Л. 8–10.]
15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов. [Л. 8–10.]
16. Фигура ограничена кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ ($a < b$). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры. [Л. 11.]
17. Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$. Здесь r и φ — полярные координаты точки, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, где r и φ — полярные координаты точки. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры. [Л. 11.]
18. Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ ($a < b$). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения. [Л. 12–13.]
19. Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, где x и y — декартовы координаты точки, $a \leq x \leq b$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой. [Л. 12–13.]
20. Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geq 0$, где r и φ — полярные координаты точки, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой. [Л. 12–13.]

- 21.** Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод “ $u \cdot v$ ”) и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной). [Л. 15.]
- 22.** Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n -го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n -го порядка, допускающих понижение порядка. [Л. 17.]
- 23.** Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка. [Л. 18–19.]
- 24.** Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций. [Л. 18–19.]
- 25.** Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка. [Л. 18–19.]
- 26.** Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка. [Л. 18–19.]
- 27.** Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка. [Л. 18–19.]
- 28.** Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. [Л. 18–19.]
- 29.** Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении. [Л. 18–19.]
- 30.** Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка. [Л. 20–21.]
- 31.** Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения. [Л. 20–21.]
- 32.** Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения. [Л. 20–21.]
- 33.** Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений. [Л. 20–21.]
- 34.** Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных. [Л. 20–21.]
- 35.** Сформулировать определение дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной, и сформулировать задачу Коши для такого уравнения. Описать метод сведения этого уравнения к нормальной системе дифференциальных уравнений. [Л. 22.]
- 36.** Сформулировать задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи. Описать метод сведения нормальной системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка. [Л. 22.]
- 37.** Сформулировать определение первого интеграла нормальной системы дифференциальных уравнений. Описать методы нахождения первых интегралов и их применение для решения системы дифференциальных уравнений. [Л. 22.]

При ответе на теоретические вопросы билета формулировки теорем должны сопровождаться определениями используемых в них понятий. Знание остальных теорем, определений и понятий из программы курса может потребоваться при ответе на дополнительные вопросы экзаменатора.

**Задачи для подготовки к экзамену
по курсу «Интегралы и дифференциальные уравнения»
для всех специальностей ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ**

На экзамене студенту выдаётся две задачи, каждая на одну из следующих тем: «Неопределённый интеграл», «Приложения определённого интеграла», «Несобственные интегралы 1 и 2 рода», «Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка», «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома», «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения». При подготовке к экзамену рекомендуется прорешать следующие задачи.

1. Проинтегрировать

1.1. $\int \frac{\sqrt[4]{5 + \ln x}}{x} dx$ 1.2. $\int \frac{x^2 dx}{x^6 - 1}$ 1.3. $\int x^2 \cos 2x dx$ 1.4. $\int e^{2x} \cos 3x dx$

1.5. $\int \ln x dx$ 1.6. $\int \frac{4x + 1}{\sqrt{2 + 4x - x^2}} dx$ 1.7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}$ 1.8. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$

1.9. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 3\cos^2 x}$ 1.10. $\int (\sqrt{\cos x} + \sin x)^2 dx$ 1.11. $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx$

1.12. $\int \frac{dx}{5 - 2\sin x + 5\cos x}$ 1.13. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ 1.14. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$

2. Приложения определённого интеграла

2.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x+4}$, $y = -\sqrt{x} + 2$ и осью Ox . Сделать чертёж.

2.2. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Сделать чертёж.

2.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Сделать чертёж.

2.4. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z^2 - 1$, $x^2 + y^2 = (z - 3)^2 - 1$. Сделать чертёж.

2.5. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$ и $x = 0$. Сделать чертёж.

2.6. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$. Сделать чертёж.

2.7. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $x = at^2$, $y = a \ln t$ ($a > 0$) и осями координат, вокруг оси Ox . Сделать чертёж.

2.8. Найти объём тела, образованного вращением кривой $r = a \sin^2 \phi$ вокруг полярной оси. Сделать чертёж.

2.9. Найти длину дуги кривой $y = x^2$ от точки $(-1, 1)$ до точки $(1, 1)$. Сделать чертёж.

2.10. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $x = 2 \cos t$, $y = 4 \sin t$. Сделать чертёж.

3. Исследовать сходимость интеграла

3.1. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}}{x+3} dx$; 3.2. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{4/3}} dx$; 3.3. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sin x^3} dx$.

4. Решить уравнение

4.1. $xy'' + y' + x = 0$;

4.2. $1 + yy'' + (y')^2 = 0$ при начальных условиях $y = 1$, $y' = 1$, $x = 1$.

5. Указать вид общего решения

5.1. $y^{IV} + y'' = xe^{-x} + 2 - x + x \sin x - e^x \sin x$;

5.2. $y^V - 5y^{IV} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^x - e^{-2x} \cos 3x$.

6. Решить уравнение

6.1. $y'' + y = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$;

6.2. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$.

Образец билета

Московский Государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ 0.

по курсу «Интегралы и дифференциальные уравнения»,
1-й курс, 2-й сем., ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ.

1. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона-Лейбница. (6 баллов)
2. Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. (6 баллов)
3. Задача из комплекта № 1. (6 баллов)
4. Задача из комплекта № 4. (6 баллов)
5. Дополнительные вопросы экзаменатора. (6 баллов)

Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 07.04.2014.
