

БАЗЫ ДАННЫХ

Лекция 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ОТНОШЕНИЙ

ФН, магистры - 2 семестр

1.1. Множества

Понятие **множества** является исходным, для него нельзя дать строгого математического определения. Множество состоит из **элементов**. ■

Георг Кантор: „Под многообразием или множеством я понимаю вообще все многое, которое возможно мыслить как единое, т.е. такую совокупность определенных элементов, которая посредством одного закона может быть соединена в одно целое.“ ■

Элемент a принадлежит множеству A — $a \in A$.

Константа с областью значений A обозначает фиксированный элемент множества A . ■

Равенство констант a и b с областью значений A : $a = b$, означает совпадение обозначаемых ими элементов множества A . ■

Переменное с областью значений A обозначает произвольный, заранее не определенный элемент множества A . ■ Переменное x пробегает множество A (или x принимает произвольные значения на множестве A). ■

Значение x переменного можно фиксировать, $x = a$, где a — константа с той же областью значений, что и x . ■

Равенство переменных $x = y$: всякий раз, когда переменное x принимает произвольное значение a , переменное y принимает то же самое значение a , и наоборот. Равные переменные „синхронно“ принимают всегда одни и те же значения.

Логическая символика. Высказывания

Понятие **высказывания** не определяется. Указывается только, что всякое высказывание может быть истинным или ложным (не одновременно!).

Для образования из уже имеющихся высказываний новых высказываний используются следующие **логические операции** (или **логические связки**).

1. *Дизъюнкция* \vee : высказывание $P \vee Q$ истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний P и Q .

2. *Конъюнкция* \wedge : высказывание $P \wedge Q$ истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания P и Q .

3. *Отрицание* \neg : высказывание $\neg P$ истинно тогда и только тогда, когда P ложно.

4. *Импликация* \Rightarrow : высказывание $P \Rightarrow Q$ истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание Q или оба высказывания ложны.

5. *Эквивалентность* (или **равносильность**) \Leftrightarrow : высказывание $P \Leftrightarrow Q$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания P и Q либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Очередность выполнения всех операций определяется расстановкой скобок. При отсутствии скобок порядок выполнения операций определяется „соглашением о приоритетах“.

Операция отрицания всегда имеет высший приоритет, т.е. выполняется первой (ее в скобки обычно не заключают).

Второй выполняется операция конъюнкции, затем дизъюнкции. Операции импликации и эквивалентности имеют равный приоритет и выполняются в последнюю очередь.

Для определения истинности или ложности сложного высказывания в зависимости от истинности или ложности входящих в него высказываний используют **таблицы истинности**.

Таблицы истинности логических операций

P	Q	$P \vee Q$
Л	Л	Л
Л	И	И
И	Л	И
И	И	И

P	Q	$P \wedge Q$
Л	Л	Л
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

P	Q	$P \Rightarrow Q$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
Л	Л	И
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

P	$\neg P$
Л	И
И	Л

Предикаты и кванторы

Предикат есть высказывание, содержащее одно или несколько переменных ($P(x)$, $Q(x, y)$, $R(x, y, z)$).

Примеры.

1. „ x есть четное число“.
2. „ x делится на y “, „ x меньше y “.

Фиксируя значения каждого переменного, входящего в предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ получаем высказывание.

В зависимости от того, истинно или ложно полученное высказывание, говорят, что предикат выполняется или не выполняется на наборе значений переменных $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$.

Предикат, выполняющийся на любом наборе входящих в него переменных, называют **тождественно истинным**.

Предикат, не выполняющийся ни на одном наборе значений входящих в него переменных, — **тождественно ложным**.

Квантор существования \exists и **квантор всеобщности** \forall .

Высказывание $(\exists x \in A)P(x)$ истинно, тогда и только тогда, когда на некоторых значениях переменного x выполняется предикат $P(x)$.

Высказывание $(\forall x \in A)P(x)$ истинно, тогда и только тогда, когда предикат $P(x)$ выполняется для каждого значения переменного x .

При образовании высказывания из предиката посредством квантора говорят, что переменное предиката **связывается** квантором.

Способы задания множеств

Множество полностью определяется своими элементами. ■

Для конечного множества может быть использован способ непосредственного перечисления элементов (порядок, в котором перечислены элементы множества, не имеет значения). ■

Общий способ задания множества — указание некоторого свойства, которым должны обладать все элементы описываемого множества, и только они. ■

Пусть переменное x пробегает некоторое множество U , называемое *универсальным множеством*.

Свойство, которым обладают исключительно элементы данного множества A , может быть выражено посредством предиката $P(x)$, выполняющегося тогда и только тогда, когда переменное x принимает произвольное значение из множества A . ■

$P(x)$ истинно тогда и только тогда, когда вместо x подставляется константа $a \in A$. ■

Предикат P называют **характеристическим предикатом** множества A , а свойство, выражаемое с помощью этого предиката, — **характеристическим** или **коллективизирующим свойством**. $A = \{x: P(x)\}$. ■

Тождественно ложный предикат задает **пустое множество** \emptyset .

Тождественно истинный характеристический предикат задает универсальное множество. ■

Операции над множествами

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — объединение A и B есть множество всех таких x , что x является элементом хотя бы одного из множеств A , B ; ■
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — пересечение A и B есть множество всех таких x , что x — одновременно элемент A и элемент B ; ■
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ — разность A и B есть множество всех таких x , что x — элемент A , но не элемент B ($x \notin B$); ■
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, а симметрическая разность A и B — множество всех таких x , что x — элемент A , но не элемент B или x — элемент B , но не элемент A . ■

Фиксируем универсальное множество U . Дополнение множества A — это множество всех элементов универсального множества, не принадлежащих A . $\bar{A} = U \setminus A$. ■

Множества A и B заданы посредством характеристических предикатов:
 $A = \{x: P(x)\}$, $B = \{x: Q(x)\}$.

$$A \cup B = \{x: P(x) \vee Q(x)\}.$$

$$A \cap B = \{x: P(x) \wedge Q(x)\}.$$

$$A \setminus B = \{x: P(x) \wedge \neg Q(x)\}. \blacksquare$$

Подмножества

Множество B есть подмножество множества A , если всякий элемент B есть элемент A : $B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$

Пустое множество есть подмножество любого множества. Если фиксировано универсальное множество, каждое рассматриваемое множество есть его подмножество. \blacksquare

Если $A = \{x: P(x)\}$, $B = \{x: Q(x)\}$, то $B \subseteq A$ тогда и только тогда, когда высказывание $Q(x) \Rightarrow P(x)$ тождественно истинно. \blacksquare

Множество A равно множеству B тогда и только тогда, когда A есть подмножество B и наоборот, т.е. $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$. \blacksquare

Эквивалентное определение

$$A = B \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)). \quad (1.1)$$

Формула (1.1) является основой для построения доказательств о равенстве множеств.

Чтобы доказать равенство двух множеств X и Y , т.е. что $X = Y$, достаточно доказать два включения $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

1. Доказать, что из предположения $x \in X$ (для произвольного x) следует, что $x \in Y$. ■

2. Доказать, что из предположения $x \in Y$ следует, что $x \in X$. ■

Такой метод доказательства теоретико-множественных равенств называют **методом двух включений**.

Если $B \subseteq A$, но $B \neq A$, то пишут $B \subset A$ и B называют **строгим подмножеством** (или **собственным подмножеством**) множества A , а символ \subset — **символом строгого включения**. ■

Для всякого множества A может быть образовано **множество всех подмножеств множества A** . Его обозначают 2^A :

$$2^A = \{X: X \subseteq A\}.$$

Булеан множества $\{a, b\}$ состоит из четырех множеств \emptyset , $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, т.е. $2^{\{a, b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Свойства теоретико-множественных операций

$$1) A \cup B = B \cup A$$

$$2) A \cap B = B \cap A$$

$$3) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$4) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$5) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$6) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$7) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$8) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$9) A \cup \emptyset = A$$

$$10) A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$11) A \cap U = A$$

$$12) A \cup U = U$$

$$13) A \cup \overline{A} = U$$

$$14) A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$15) A \cup A = A$$

$$16) A \cap A = A$$

$$17) A = \overline{\overline{A}}$$

$$18) A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

$$19) A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$20) (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C);$$

$$21) A \Delta B = B \Delta A;$$

$$22) A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

Докажем тождество $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

Первое включение: ■

$$\begin{aligned}x \in (A \cap (B \cap C)) &\Rightarrow \\&\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in (B \cap C)) \Rightarrow \\&\Rightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \in C)) \Rightarrow \\&\Rightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \in C) \Rightarrow \\&\Rightarrow (x \in (A \cap B)) \wedge (x \in C) \Rightarrow \\&\Rightarrow x \in ((A \cap B) \cap C)\end{aligned}$$

Первое включение установлено. ■ Второе включение:

$$\begin{aligned}x \in ((A \cap B) \cap C) &\Rightarrow \\&\Rightarrow (x \in (A \cap B)) \wedge (x \in C) \Rightarrow \\&\Rightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \in C) \Rightarrow \\&\Rightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \in C)) \Rightarrow \\&\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in (B \cap C)) \Rightarrow \\&\Rightarrow x \in (A \cap (B \cap C)) \Rightarrow\end{aligned}$$

Оба включения имеют место, тождество доказано.

Для доказательства теоретико-множественных тождеств могут быть использованы *метод характеристических функций* и *метод эквивалентных преобразований*. ■

При доказательстве теоретико-множественных тождеств **методом эквивалентных преобразований** используются ранее доказанные тождества для преобразования левой части к правой или наоборот. ■

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C,$$

Преобразуем левую часть к правой:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= \\ &= A \cap \overline{(B \cup C)} = \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = \\ &= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = \\ &= (A \setminus B) \cap \overline{C} = \\ &= (A \setminus B) \setminus C \end{aligned}$$

Тождество доказано.

1.2. Кортеж. Декартово произведение

Пусть A и B — произвольные множества. **Неупорядоченная пара** это любое множество $\{a, b\}$, где $a \in A$, $b \in B$ или $a \in B$, $b \in A$. ■

Упорядоченная пара (a, b) на множествах A и B , определяется не только самими элементами $a \in A$ и $b \in B$, но и порядком, в котором они записаны. ■
Если $A = B$, то говорят об упорядоченной паре на множестве A .

Определение 1.1. Две упорядоченные пары (a, b) и (a', b') на множествах A и B называют **равными**, если $a = a'$ и $b = b'$. ■

Кортеж (упорядоченный n -набор) — обобщение понятия упорядоченной пары. Кортеж (a_1, \dots, a_n) на множествах A_1, \dots, A_n характеризуется входящими в него элементами $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$ и порядком, в котором они перечисляются.

Число n называется **длиной кортежа** (или **размерностью кортежа**), а элемент a_i — i -й **проекцией** (компонентой) кортежа.

Для двух кортежей одинаковой размерности их компоненты с одинаковыми номерами называют **одноименными компонентами**. ■

Определение 1.2. Два кортежа одинаковой размерности (a_1, \dots, a_n) и (b_1, \dots, b_n) на множествах A_1, \dots, A_n равны тогда и только тогда, когда их одноименные компоненты совпадают $a_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$.

Определение 1.3. Множество всех кортежей длины n на множествах A_1, \dots, A_n называют **декартовым (прямым) произведением множеств** A_1, \dots, A_n и обозначают $A_1 \times \dots \times A_n$.

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}. \blacksquare$$

Если все множества $A_i, i = \overline{1, n}$, равны между собой, то указанное декартово произведение называют **n -й декартовой степенью множества** A и обозначают A^n .

При $n = 2$ получаем **декартов квадрат**, при $n = 3$ — **декартов куб** множества A . Первая декартова степень любого множества A есть само множество A , т.е. $A^1 = A$.

Свойства декартова произведения :

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C); \blacksquare$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C); \blacksquare$
- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset.$

Отображение f из множества A в множество B ($f: A \rightarrow B$) считается заданным, если каждому элементу $x \in A$ сопоставлен единственный элемент $y \in B$.

Элемент $y \in B$, который отображением f сопоставляется элементу $x \in A$, называют **образом элемента x при отображении f** и обозначают $f(x)$. ■

Каждое отображение однозначно определяет множество **упорядоченных пар** $\{(x, y): x \in A, y = f(x)\}$, являющееся подмножеством *декартова произведения* $A \times B$ множества A на множество B и называемое **графиком отображения f** .

Обратно, если в декартовом произведении $A \times B$ фиксировано подмножество упорядоченных пар f , такое, что для любых двух пар (x, y) и (x', y') множества f из $x = x'$ следует равенство $y = y'$, то f единственным образом определяет некоторое отображение из A в B .

Отображение f множества A в себя называют **тождественным**, если $f(x) = x$ при всех x из A . ■

В общем случае для отображения $f: A \rightarrow B$ может существовать несколько различных элементов множества A , образы которых совпадают.

Множество всех элементов $x \in A$, для которых $f(x) = y_0$, называют **прообразом элемента $y_0 \in B$ при отображении f** .

Отображение есть подмножество декартова произведения. ■

Множество A называют **областью определения отображения** f . ■

Область определения отображения f будем обозначать $D(f)$. ■

Множество всех $y \in B$, таких, что найдется $x \in A$, для которого $y = f(x)$, называют **областью значений отображения** f . ■

Область значений отображения f будем обозначать $R(f)$.

Отображение $f: A \rightarrow B$ называют **инъективным (инъекцией)**, если каждый элемент из области его значений имеет единственный прообраз, т.е. из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$. ■

Отображение $f: A \rightarrow B$ называют **сюръективным (сюръекцией)**, если его область значений совпадает со всем множеством B , **отображением множества A на множество B** . ■

Отображение $f: A \rightarrow B$ называют **биективным (биекцией)**, если оно одновременно инъективно и сюръективно.

Если отображение $f: A \rightarrow B$ биективно, то каждому элементу множества A отвечает единственный элемент множества B и наоборот. Множества A и B находятся между собой во **взаимно однозначном соответствии**.

Биекцию множества A на себя называют **автоморфизмом множества A** .

Для любого отображения $f: A \rightarrow B$ образ $f(A)$ всего множества A есть область значений данного отображения. Для произвольного множества $D \subseteq B$ множество всех элементов $x \in A$, таких, что $f(x) \in D$, называют **прообразом множества D** при отображении f . ■

Прообраз области значений произвольного отображения $f: A \rightarrow B$ совпадает со всем множеством A .

Множество всех отображений из A в B будем обозначать как B^A . ■

1. Частичное отображение.

Если образ определен не для каждого элемента множества A , а лишь для некоторых элементов этого множества, то говорят о **частичном отображении** (отказ от полной определенности отображения).

Подмножество всех элементов A , для которых определен образ, называют **областью определения** данного **частичного отображения**. ■

2. Соответствие.

Если данному $x \in A$ сопоставлен не один, а несколько образов (множество образов) в множестве B (отказ от однозначности отображения), то говорят, о **соответствии**.

Соответствие ρ из A в B будем обозначать $\rho(x)$.

$\rho(x)$ есть элемент **подмножества B** .

Графиком соответствия **график соответствия** ρ из множества A в множество B называется множество C_ρ упорядоченных пар (x, y) , таких, что $x \in A$, $y \in B$ и элементы x , y связаны соответствием ρ , т.е. $y \in \rho(x)$. Множество C_ρ упорядоченных пар есть подмножество декартова произведения $A \times B$. ■

Обратно, фиксируя на декартовом произведении $A \times B$ какое-либо подмножество C , мы однозначно определяем некоторое соответствие ρ_C из A в B , а именно $\rho_C(x) = \{y: y \in B \wedge (x, y) \in C\}$. ■

Соответствие из множества A в множество B есть некоторое подмножество ρ декартова произведения $A \times B$, т.е. $\rho \subseteq A \times B$. ■

При $\rho = \emptyset$ получаем **пустое соответствие**.

При ρ , совпадающем со всем указанным декартовым произведением, — **универсальное соответствие**. ■

$(x, y) \in \rho$ — упорядоченные пары, связанных соответствием ρ .

Область определения соответствия $\rho \subseteq A \times B$ из множества A в множество B — это множество всех первых компонент упорядоченных пар из ρ : $D(\rho) = \{x: (\exists y \in B)(x, y) \in \rho\}$.

Область значения соответствия ρ — это множество всех вторых компонент упорядоченных пар из ρ : $R(\rho) = \{y: (\exists x \in A)(x, y) \in \rho\}$.

$$D(\rho) \subseteq A, R(\rho) \subseteq B.$$

Соответствие из A в B называют **всюду определенным**, если его область определения совпадает с множеством A : $D(\rho) = A$.

Сечением соответствия $\rho \subseteq A \times B$ для фиксированного элемента $x \in A$ называют множество $\rho(x) = \{y: (x, y) \in \rho\}$. ■

Сечение соответствия $\rho(x)$ есть множество всех „образов“ элемента x при данном соответствии. ■

Сечением соответствия ρ по множеству $C \subseteq A$ называют множество $\rho(C) = \{y: (x, y) \in \rho, x \in C\}$. ■

Соответствие $\rho \subseteq A \times A$ из множества A в себя, т.е. подмножество множества A^2 , называют **бинарным отношением на множестве A** . ■

Пример 1.1. Отношение нестрогого неравенства на множестве действительных чисел \mathbb{R} . Здесь каждому $x \in \mathbb{R}$ поставлены в соответствие такие $y \in \mathbb{R}$, для которых справедливо $x \leq y$. ■

Для произвольного бинарного отношения на некотором множестве часто используют запись $x \rho y$ вместо $(x, y) \in \rho$.

Бинарное отношение на множестве A , состоящее из всех пар (x, x) , т.е. пар с совпадающими компонентами, называют **диагональю** множества A и обозначают id_A . Диагональ A есть **тождественное отображение** A на себя.

Наглядное изображение соответствий из A в B . ■

1. График соответствия Соответствие интерпретируется как подмножество декартова произведения и изображается на плоскости как подмножество декартова квадрата числовых множеств. ■

2. Граф соответствия Для конечных множеств A и B , применяется построение графа соответствия. ■

Соответствие $\rho \subseteq A \times B$ называют **функциональным по второй** (первой) **компоненте**, если для любых двух упорядоченных пар $(x, y) \in \rho$ и $(x', y') \in \rho$ из равенства $x = x'$ следует $y = y'$ (и из $y = y'$ следует $x = x'$).

Соответствие, функциональное по второй компоненте, есть отображение (возможно, частичное). ■

Соответствие $f \subseteq A \times B$ является отображением из A в B , если и только если оно всюду определено (т.е. $D(f) = A$) и функционально по второй компоненте.

Отображение из A в B является инъекцией тогда и только тогда, когда оно функционально по первой компоненте.

Определение 1.4. Произвольное подмножество ρ декартова произведения $A_1 \times \dots \times A_n$ называют (**n -арным** или **n -местным**) **отношением** на множествах A_1, \dots, A_n .

Если все множества A_1, \dots, A_n совпадают, т.е. $A_1 = \dots = A_n = A$, говорят об **n -арном отношении на множестве A** . ■

Если ρ — n -арное отношение на множествах A_1, \dots, A_n и $(a_1, \dots, a_n) \in \rho$, то говорят об **элементах a_1, \dots, a_n , связанных отношением ρ** . ■

При $n = 2$ получаем **бинарное отношение** на множествах A_1, A_2 . При $A_1 = A_2 = A$ получаем бинарное отношение на множестве, т.е. подмножество декартова квадрата A . ■

Пусть n -арное отношение $\rho \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ удовлетворяет условию: для любых двух кортежей $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \rho$ и $(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n) \in \rho$ из выполнения равенств $x_k = y_k$ для любого $k \neq i$ ($0 \leq k \leq n$) следует, что и $x_i = y_i$. Тогда отношение ρ называют **функциональным по i -й компоненте** ($1 \leq i \leq n$). ■

Функциональность n -местного отношения по i -й ($i \leq n$) компоненте равносильна условию, что, фиксируя все компоненты, кроме i -й, мы однозначно определяем и i -ю компоненту.

1.3. Операции над соответствиями

Поскольку **соответствия** можно считать множествами, то все операции над множествами (**пересечение, объединение, разность, дополнение** и т.д.) можно применить и к соответствиям. ■

Говоря о дополнении соответствия из A в B , мы имеем в виду дополнение до **универсального соответствия** из A в B , т.е. до **декартова произведения** $A \times B$. ■

Равенство соответствий можно трактовать как **равенство множеств**. ■

На соответствия можно распространить операции, определяемые для отображений.

Композиция соответствий

Композицией (произведением) соответствий $\rho \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq B \times C$ называют соответствие

$$\rho \circ \sigma = \{(x, y): (\exists z \in B)((x, z) \in \rho) \wedge ((z, y) \in \sigma)\}. \quad (1.2)$$

Пример 1.2. Соответствие ρ задано следующим образом:

Есть множество программистов $A = \{И, П, С\}$, множество программ $B = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$ и множество заказчиков ПО $C = \{З_1, З_2, З_3, З_4\}$.

Соответствие ρ из A в B связывает программистов и разрабатываемые ими программы:

$$\rho = \{(И, n_1), (И, n_3), (И, n_5), (П, n_2), (П, n_4), (С, n_2), (С, n_5)\} \subseteq A \times B.$$

Соответствие σ из B в C связывает программы и заказчиков

$$\sigma = \{(n_1, З_3), (n_1, З_4), (n_2, З_1), (n_3, З_2), (n_4, З_4), (n_5, З_3)\}.$$

Композиция соответствий ρ и σ :

$$\text{Имеем } \rho(И) = \{n_1, n_3, n_5\}, \sigma(n_1) = \{З_3, З_4\}, \sigma(n_3) = \{З_2\} \text{ и } \sigma(n_5) = \{З_3\}.$$

Получаем $\sigma(n_1) \cup \sigma(n_3) \cup \sigma(n_5) = \{З_2, З_3, З_4\}$ сечение композиции по элементу $И$.

Аналогично, получим $(\rho \circ \sigma)(П) = \{З_1, З_4\}$ и $(\rho \circ \sigma)(С) = \{З_1, З_3\}$.

Область определения композиции **соответствий** содержится в области определения первого соответствия, а **область значений** композиции соответствий — в области значений второго соответствия. ■

Для того, чтобы композиция соответствий была отлична от пустого соответствия, необходимо и достаточно, чтобы пересечение области значений первого соответствия и области определения второго соответствия было не пусто. ■

Пример 1.3. Рассмотрим соответствие τ из множества $A = \{1, 2, 3\}$ в множество $B = \{a, b, d\}$ ■

$$\tau = \{(1, a), (2, a), (3, d)\} \blacksquare$$

и соответствие φ из множества $C = \{b, c, d\}$ в множество $D = \{e, f\}$ ■

$$\varphi = \{(b, d), (b, f), (c, f)\}. \blacksquare$$

Найдем $\tau \circ \varphi$. ■

$B \cap C \neq \emptyset$, но $\tau \circ \varphi = \emptyset$, поскольку $R(\tau) = \{a, d\}$, $D(\varphi) = \{b, c\}$ и $R(\tau) \cap D(\varphi) = \emptyset$.

Бинарное отношение на множестве является частным случаем соответствия. Для двух бинарных отношений ρ и σ , заданных на множестве A , их композиция $\rho \circ \sigma$ (1.2) как соответствий является бинарным отношением на том же множестве A . В этом случае говорят о **композиции бинарных отношений на множестве A** .

Свойства композиции соответствий.

Композиция соответствий $\rho \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq C \times D$ **не коммутативна**. В общем случае $\rho \circ \sigma \neq \sigma \circ \rho$, поскольку $\rho \circ \sigma \subseteq A \times D$, а $\sigma \circ \rho \subseteq C \times B$. ■

1) $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$; ■

2) для любого соответствия ρ имеет место $\rho \circ \emptyset = \emptyset \circ \rho = \emptyset$; ■

3) $\rho \circ (\sigma \cup \tau) = (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \tau)$; ■

4) для любого бинарного отношения на множестве A имеет место равенство $\rho \circ \text{id}_A = \text{id}_A \circ \rho = \rho$. ■

5) $\rho \circ (\sigma \cap \tau) \subseteq \rho \circ \sigma \cap \rho \circ \tau$, обратное включение в общем случае не имеет места. ■

Роль **пустого соответствия** в операции композиции, определенной на множестве всех бинарных отношений на A , аналогична роли нуля при умножении чисел. ■

Диагональ множества A играет роль, аналогичную роли единицы.

Докажем свойство

$$\rho \circ (\sigma \cup \tau) = (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \tau). \blacksquare$$

Доказательство 1-го включения

$$\rho \circ (\sigma \cup \tau) \subseteq ((\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \tau)) \blacksquare$$

$$(x, y) \in \rho \circ (\sigma \cup \tau) \Rightarrow$$

$$\blacksquare \Rightarrow (\exists z)((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in (\sigma \cup \tau)) \Rightarrow$$

$$\blacksquare \Rightarrow (\exists z)((x, z) \in \rho \wedge ((z, y) \in \sigma \vee (z, y) \in \tau)) \Rightarrow$$

$$\blacksquare \Rightarrow (\exists z)((x, z) \in \rho \wedge ((z, y) \in \sigma) \vee ((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \tau)) \Rightarrow$$

$$\blacksquare \Rightarrow ((x, y) \in \rho \circ \sigma) \vee ((x, y) \in \rho \circ \tau) \Rightarrow$$

$$\blacksquare \Rightarrow ((x, y) \in (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \tau)).$$

Доказательство 2-го включения

$$(\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \tau) \subseteq \rho \circ (\sigma \cup \tau) \blacksquare$$

$$\begin{aligned} (x, y) \in (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \tau) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow ((x, y) \in (\rho \circ \sigma)) \vee ((x, y) \in (\rho \circ \tau)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists u)((x, u) \in \rho \wedge (u, y) \in \sigma) \vee \\ &\quad \vee (\exists v)((x, v) \in \rho \wedge (v, y) \in \tau) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists z)((x, z) \in \rho \wedge ((z, y) \in \sigma \vee (z, y) \in \tau)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists z)((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \sigma \cup \tau) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x, y) \in \rho \circ (\sigma \cup \tau). \end{aligned}$$

Обратное соответствие

Соответствие, обратное к соответствию $\rho \subseteq A \times B$, есть соответствие из B в A , обозначаемое ρ^{-1} и равное, по определению,
 $\rho^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \rho\}$. ■

Пример 1.4. Соответствие ρ из A в B , связывает множество программистов $A = \{И, П, С\}$ и разрабатываемые ими программы ($B = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$) (см. пример 1.2):

$$\rho = \{(И, n_1), (И, n_3), (И, n_5), (П, n_2), (П, n_4), (С, n_2), (С, n_5)\} \subseteq A \times B.$$

Обратное соответствие: $\rho^{-1} = \{(n_1, И), (n_2, П), (n_2, С), (n_3, И), (n_4, П), (n_5, И), (n_5, С)\}$. ■

Свойства обратного соответствия

- 1) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
- 2) $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$.

Для бинарного отношения ρ на множестве A обратное соответствие есть бинарное отношение на том же множестве.

В общем случае для бинарного отношения ρ на множестве A $\rho \circ \rho^{-1} \neq \rho^{-1} \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1} \neq \text{id}_A$ и $\rho^{-1} \circ \rho \neq \text{id}_A$.

1.4. Специальные свойства бинарных отношений

Бинарное отношение ρ на множестве A называют

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \in \rho)$, т.е. $\text{id}_A \subseteq \rho$.

2) **иррефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \notin \rho)$, т.е. $\text{id}_A \cap \rho = \emptyset$.

Иррефлексивное отношение нерефлексивно, но не всякое нерефлексивное отношение иррефлексивно. ■

3) **симметричным**, если $(\forall x \forall y)((x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho)$, т.е. $\rho^{-1} = \rho$.

График симметричного бинарного отношения на множестве A симметричен относительно диагонали. ■

4) **антисимметричным**, если

$(\forall x \forall y)((x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \Rightarrow (x = y))$ т.е. $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \text{id}_A$ (частный случай $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$).

Эквивалентное определение: $(\forall x \forall y)((x, y) \in \rho \wedge x \neq y \Rightarrow ((y, x)) \notin \rho)$. ■

5) **транзитивным**, если

$(\forall x \forall y \forall z)((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow ((x, z) \in \rho))$, т.е. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. ■

6) **плотным**, если $(\forall x \forall y)((x, y) \in \rho \Rightarrow (\exists z)((z \neq x) \wedge (z \neq y) \wedge ((x, z) \in \rho) \wedge ((z, y) \in \rho))$. ■

Соответствующие свойства называют **рефлексивностью, иррефлексивностью, симметричностью, антисимметричностью и транзитивностью..**

Теорема 1. Бинарное отношение ρ на множестве A симметрично, если и только если бинарное отношение на множестве A , обратное к ρ , совпадает с ρ : $\rho^{-1} = \rho$. ■

Теорема 2. Бинарное отношение ρ на множестве A антисимметрично тогда и только тогда, когда $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \text{id}_A$. ■

Для антисимметричного бинарного отношения на множестве A может иметь место равенство $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$. ■

Теорема 3. Бинарное отношение ρ на множестве A транзитивно тогда и только тогда, когда его квадрат содержится в нем, т.е. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ($\rho \circ \rho = \rho^2$).

Среди всех бинарных отношений на произвольном множестве выделяют классы отношений в зависимости от свойств, которыми эти отношения обладают. ■

Бинарное отношение на некотором множестве называют:

- 1) **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно; ■
- 2) **толерантностью**, если оно рефлексивно и симметрично; ■
- 3) **порядком** (или **частичным порядком**), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно; ■
- 4) **предпорядком** (или **квазипорядком**), если оно рефлексивно и транзитивно; ■
- 5) **строгим порядком**, если оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно; ■
- 6) **строгим предпорядком**, если оно иррефлексивно и транзитивно. ■

Определенные выше бинарные отношения называют **отношениями эквивалентности, толерантности, порядка (частичного порядка), предпорядка (квазипорядка), строгого порядка, строгого предпорядка.**

1.5. Семейства множеств

Пусть U — универсальное множество. ■

Если каждому натуральному числу n взаимно однозначно сопоставлено некоторое подмножество $A_n \subseteq U$, то тем самым определена последовательность множеств $A_1, \dots, A_n, \dots, (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ■

Пусть вместо множества \mathbb{N} натуральных чисел задано произвольное множество I и каждому элементу $i \in I$ взаимно однозначно сопоставлено подмножество $A_i \subseteq U$.

Тогда говорят, что задано **(индексированное) семейство множеств** $(A_i)_{i \in I}$. ■

Множество I называют множеством индексов, а множества A_i — элементами семейства $(A_i)_{i \in I}$.

В случае $I = \mathbb{N}$ получаем последовательность множеств, или **счетное семейство множеств**. ■

Если множество I конечно, получаем **конечное семейство множеств**. ■

Семейство $(A_i)_{i \in I}$ определено, если задано *отображение* $\nu: I \rightarrow 2^U$.

Операции **объединения** и **пересечения** множеств можно распространить на произвольные семейства множеств. ■

1. Объединение семейства множеств:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x: (\exists i)(x \in A_i)\}. \blacksquare$$

2. Пересечение семейства множеств: $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x: (\forall i)(x \in A_i)\}. \blacksquare$

Основные тождества для произвольных семейств множеств:

$$A \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cup B_i), \quad A \cap \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cap B_i). \blacksquare \quad (1.3)$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i), \quad A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i), \blacksquare \quad (1.4)$$

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}. \blacksquare \quad (1.5)$$

Тождества (1.4) выражают свойство **бесконечной дистрибутивности** операций пересечения и объединения.

Тождества (1.5) называют **бесконечными законами де Моргана**.

1.6. Отношения эквивалентности

Пусть A — произвольное множество.

Семейство $(B_i)_{i \in I}$ **непустых** и попарно **не пересекающихся** множеств называют **разбиением** множества A , если **объединение** множеств семейства

$(B_i)_{i \in I}$ равно A , т.е. $\bigcup_{i \in I} B_i = A$. ■

Сами множества B_i называют **элементами** (или **членами**) **разбиения** $(B_i)_{i \in I}$. ■

Множества $[0, 1/3)$, $[1/3, 2/3)$ и $[2/3, 1]$ образуют разбиение отрезка $[0, 1]$. ■

Тривиальными разбиениями A являются, по определению, разбиение $\{A\}$, состоящее только из самого A , и разбиение, состоящее из всех одноэлементных подмножеств множества A .

Пусть ρ — **эквивалентность** на множестве A и $x \in A$. ■

Классом эквивалентности по отношению ρ называют множество всех элементов A , **эквивалентных** x , т.е. множество $\{y: y \rho x\}$ ($[x]_\rho$).

Для любого элемента $x \in A$ класс эквивалентности не пуст в силу рефлексивности, так как $x \in [x]_\rho$. ■

Фактор-множеством множества A по отношению ρ называют множество всех классов эквивалентности по данному отношению эквивалентности ρ на множестве A и обозначают A/ρ .

Утверждение 1.1. Любые два класса эквивалентности по отношению ρ либо не пересекаются, либо совпадают. ■

◀ Пусть два класса эквивалентности $[x]_\rho$ и $[y]_\rho$ имеют общий элемент $z \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$. ■

Тогда $z \rho x$ и $z \rho y$. ■

В силу *симметричности* отношения $\rho : x \rho z$, тогда $x \rho z$ и $z \rho y$. ■

В силу *транзитивности* отношения ρ получим $x \rho y$. ■

Пусть

$$h \in [x]_\rho \Rightarrow (h \rho x \wedge x \rho y) \Rightarrow h \rho y \Rightarrow h \in [y]_\rho. \blacksquare$$

Это верно для любого элемента $h \in [x]_\rho$. ■

Обратно,

если

$$\begin{aligned} h \in [y]_\rho &\blacksquare \Rightarrow (h \rho y) \wedge (x \rho y) \Rightarrow \\ &\blacksquare \Rightarrow (\text{то в силу симметричности } \rho) (h \rho y) \wedge (y \rho x) \Rightarrow \\ &\blacksquare \Rightarrow (\text{в силу транзитивности}) h \rho x \blacksquare \Rightarrow h \in [x]_\rho \blacksquare \Rightarrow [x]_\rho = [y]_\rho. \end{aligned}$$



Теорема 4. Для любого отношения эквивалентности на множестве A множество классов эквивалентности образует разбиение множества A .
Обратно, любое разбиение множества A задает на нем отношение эквивалентности, для которого классы эквивалентности совпадают с элементами разбиения. ■

◀ Отношение эквивалентности ρ на множестве A определяет некоторое разбиение этого множества.

$\forall x \in A \quad x \in [x]_\rho$ в силу рефлексивности ($x \rho x$). ■

Множество всех классов эквивалентности по отношению ρ образует разбиение исходного множества A . ■

Т. о. , любое отношение эквивалентности однозначно определяет некоторое разбиение.

Пусть $(B_i)_{i \in I}$ — некоторое разбиение множества A . ■

Рассмотрим отношение ρ , такое, что
$$x \rho y \Leftrightarrow (\exists i \in I)(x \in B_i \wedge (y \in B_i)).$$

Введенное отношение ρ рефлексивно и симметрично. ■

Если для любых x, y и z имеет место $x \rho y$ и $y \rho z$, то x, y и z в силу определения отношения ρ принадлежат одному и тому же элементу B_i разбиения. ■

Следовательно, $x \rho z$ и отношение ρ транзитивно. ■

Таким образом, ρ — эквивалентность на A . ►

Любая эквивалентность определяет единственное разбиение и наоборот.

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Композиция двух отображений (частный случай соответствий).

Пусть заданы отображения : f из A в B и g из B в C .

Композиция $f \circ g$ определяется как отображение из A в C , задаваемое формулой $y = g(f(x))$.

Тем самым задается **график отображения** $f \circ g$, т.е. множество **упорядоченных пар** (x, y) , таких, что $y = g(f(x))$.

При этом упорядоченная пара (x, y) будет принадлежать графику отображения $f \circ g$,

если и только если найдется элемент $z \in B$, такой, что $z = f(x)$ и $y = g(z)$.

График композиции отображений f и g есть

$$\begin{aligned} f \circ g &= \{(x, y) : (\exists z)(z = f(x) \text{ и } y = g(z))\} = \\ &= \{(x, y) : y = g(f(x))\}. \quad (1.6) \end{aligned}$$

Пример композиции линейной функции Пусть отношение ρ на множестве действительных чисел определено как функция $y = ax + b$. Найдем квадрат этого отношения (линейной функции от одного переменного).

Согласно (1.6), Это будет функция h , такая, что $h(x) = a(ax + b) + c$, т.е. $h(x) = a^2x + (ab + c)$.

Это тоже линейная функция, но с другими коэффициентами. Таким образом, квадрат линейной функции снова есть линейная функция. #

Обратное соответствие (дополнение).

Если $f: A \rightarrow B$ — отображение, то оно является соответствием. Обратное к f соответствие из B в A в общем случае не является отображением.

Соответствие f^{-1} , обратное к f , состоит из всех упорядоченных пар вида $(f(x), x)$, $x \in A$.

В общем случае могут найтись такие два различных элемента x и x' , что $f(x) = f(x')$, то соответствие f^{-1} в случае не будет *функционально по второй компоненте* и поэтому не будет отображением.

Если *отображение f инъективно*, то обратное соответствие есть *частичное отображение* из B в A .

Если **отображение f биективно**, то обратное соответствие является отображением из B в A , причем имеют место равенства

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_A, \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_B.$$

Отображение f^{-1} в этом случае называют **отображением, обратным к f** .

ТЕОРЕМА 1. Бинарное отношение ρ на множестве A симметрично, если и только если бинарное отношение на множестве A , обратное к ρ , совпадает с ρ : $\rho^{-1} = \rho$.

◀ Пусть бинарное отношение ρ на множестве A симметрично. Докажем, что $\rho^{-1} = \rho$.

$$\begin{aligned}(x, y) \in \rho^{-1} &\Rightarrow (y, x) \in \rho \Rightarrow \\ &\text{(в силу симметричности } \rho : (x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho) \\ &\Rightarrow (x, y) \in \rho \Rightarrow \rho^{-1} \subseteq \rho\end{aligned}$$

Аналогично доказывается включение $\rho \subseteq \rho^{-1}$.

Пусть $\rho = \rho^{-1}$.

Докажем, что бинарное отношение ρ на множестве A симметрично.

$$\begin{aligned}(x, y) \in \rho &\Rightarrow (x, y) \in \rho^{-1} \Rightarrow \\ &\text{(по определению обратного отношения)} \\ &\Rightarrow (y, x) \in \rho.\end{aligned}$$

Следовательно, ρ — симметричное бинарное отношение. ▶

ТЕОРЕМА 2. Бинарное отношение ρ на множестве A антисимметрично тогда и только тогда, когда $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \text{id}_A$.

◀ Пусть отношение ρ на множестве A антисимметрично, т.е.
 $\forall (x, y) \in A : (x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \Rightarrow x = y$
Докажем, что $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \text{id}_A$.

$$(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1} \Rightarrow (x, y) \in \rho \wedge (x, y) \in \rho^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \Rightarrow$$

(по определению антисимметричности) $\Rightarrow x = y \Rightarrow (x, y) \in \text{id}_A$

Пусть $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \text{id}_A$.

Докажем, что отношение ρ на множестве A антисимметрично.

От противного: пусть отношение ρ на множестве A не антисимметрично, т.е. $\exists (x, y) : ((x, y) \in \rho) \wedge ((y, x) \in \rho) \wedge x \neq y$.

$$((x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho^{-1}) \wedge x \neq y \Rightarrow \\ \Rightarrow ((x, y) \in (\rho \cap \rho^{-1})) \wedge (\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \text{id}_A) \text{ (по условию)} \wedge \\ \wedge (x, y) \notin \text{id}_A \text{ (т.к. условию } x \neq y)$$

Получаем противоречие: $(x, y) \in \text{id}_A$ и $(x, y) \notin \text{id}_A$ одновременно.



ТЕОРЕМА 3 . Бинарное отношение ρ на множестве A транзитивно тогда и только тогда, когда его *квадрат* содержится в нем, т.е. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ($\rho \circ \rho = \rho^2$).

◀ Пусть бинарное отношение ρ на множестве A транзитивно, т.е. $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho$.

Докажем, что: $\rho^2 \subseteq \rho$.

$$\begin{aligned}(x, z) \in \rho^2 &\Rightarrow \exists y : (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\text{по определению транзитивности}) (x, z) \in \rho \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho^2 \subseteq \rho\end{aligned}$$

Пусть $\rho^2 \subseteq \rho$.

Докажем, что: бинарное отношение ρ транзитивно ($(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho$)

$$\begin{aligned}(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \\ \Rightarrow (\text{по определению композиции бинарных отношений}) (x, z) \in \rho^2 \\ \Rightarrow (\text{т.к. } \rho^2 \subseteq \rho) \quad (x, z) \in \rho\end{aligned}$$



Бинарное отношение ρ на множестве A называется **плотным**, если для любых $x, y \in A$, отличных друг от друга и таких, что $(x, y) \in \rho$, найдется z , отличный и от x и от y , такой, что $(x, z) \in \rho$ и $(y, z) \in \rho$.

для любой пары элементов, связанных плотным отношением, всегда найдется третий элемент, который встраивается между ними и связан с каждым из них тем же отношением. Отношения неравенства (строгого и нестрогого) на множествах рациональных и действительных чисел плотны, отношения неравенства на множествах целых и натуральных чисел плотными не являются.

Каковы бы ни были рациональные (или действительные) числа x и y , из того, что $x < y$, следует, что существует число z , отличное как от x , так и от y , такое, что $x < z < y$. Например, число $z = (x + y)/2$. Но для целых чисел m и $m + 1$ такого промежуточного целого числа нет.

Пусть ρ — плотное бинарное отношение на множестве A . Тогда

$$\begin{aligned} & \forall x, y \in A : (x, y) \in \rho \\ \exists z \in A : x \neq z \wedge y \neq z : (x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \rho & \Rightarrow \\ & \Rightarrow \text{по определению композиции } (x, y) \in \rho^2 \end{aligned}$$

Если ρ плотно, то оно содержится в своем квадрате. Для транзитивного бинарного отношения $\rho^2 \subseteq \rho$. Если бинарное отношение ρ плотно и транзитивно одновременно, то $\rho = \rho^2$.

Пример 1.5. На множестве \mathbb{R} действительных чисел зададим отношение $a \equiv_{(\text{mod } 1)} b$, полагая, что числа a и b равны по модулю 1 тогда и только тогда, когда число $a - b$ является целым.

Из определения следует, что каждое число по модулю 1 равно своей дробной части

Так как отношение $\equiv_{(\text{mod } 1)}$ определено через равенство, все свойства отношения эквивалентности для него выполняются.

Каждый класс эквивалентности будет содержать числа с равными дробными частями.

Каждый класс эквивалентности по данному отношению однозначно определяет некоторое число из полуинтервала $[0, 1)$.

Наоборот, каждому числу $\gamma \in [0, 1)$ однозначно сопоставляется класс эквивалентности, состоящий из всех действительных чисел, дробная часть которых равна γ .

Таким образом, фактор-множество $\mathbb{R}/\equiv_{(\text{mod } 1)}$ и полуинтервал $[0, 1)$ на числовой прямой находятся во взаимно однозначном соответствии.

Связь между понятиями эквивалентности и отображения.

Для любого отношения эквивалентности ρ на множестве A можно определить отображение $f_\rho: A \rightarrow A/\rho$, сопоставив каждому $x \in A$ содержащий его класс эквивалентности.

$$f_\rho(x) = [x]_\rho$$

Это *отображение сюръективно*, так как каждый элемент множества A принадлежит некоторому классу эквивалентности, т.е. для каждого $[x]_\rho \in A/\rho$ справедливо $[x]_\rho = f_\rho(x)$.

Отображение f_ρ , определенное таким образом, называют **канонической сюръекцией** множества A .

Любое отображение односторонне определяет некоторое отношение эквивалентности.

Теорема 5. Пусть $f: A \rightarrow B$ — произвольное отображение. На множестве A определим отношение $\rho_f : (x, y) \in \rho_f$, если и только если $f(x) = f(y)$. Это отношение ρ_f является отношением эквивалентности, причем существует биекция фактор-множества A/ρ_f на множество $f(A)$.

◀ Рефлексивность : $f(x) = f(x)$;

Симметричность : $f(x) = f(y)$ и $f(y) = f(x)$;

Транзитивность : $f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z)$;

т.е. ρ_f — эквивалентность.

Зададим отображение φ фактор-множества A/ρ_f в множество $f(A)$ следующим образом: $\varphi: A/\rho_f \rightarrow f(A)$ $\varphi([x]_{\rho_f}) = f(x)$.

Каждому классу эквивалентности поставлен в соответствие единственный элемент $y \in f(A)$ (отображение определено корректно).

Докажем, что φ — биекция (инъекция и сюръекция одновременно).

Пусть классы эквивалентности $[x]_{\rho_f}$ и $[y]_{\rho_f}$ не совпадают.

В силу теоремы 4 они не пересекаются, т.е. x не эквивалентно y .

Из определения отношения ρ_f следует, что $f(x) \neq f(y)$.

Таким образом, φ — инъекция.

Если элемент $u \in f(A)$, то найдется такой элемент $x \in A$, что $u = f(x) = \varphi([x]_{\rho_f})$, т.е. φ — сюръекция.

Итак, φ — биекция. ▶

Следовательно, в силу доказанных теорем 4 и 5 существует связь между тремя понятиями — отображением множества, отношением эквивалентности на множестве и разбиением множества.

Но **неверно**, что существует взаимно однозначное соответствие между отображениями и отношениями эквивалентности.

Два разных отображения могут определять одно и то же разбиение отображаемого множества, тем самым задавая на нем одно и то же отношение эквивалентности.

Пример 1.6.

- а.** Любое биективное отображение $f: A \rightarrow B$ задает на A одно и то же разбиение — тривиальное разбиение на одноэлементные множества.
- б.** Тожественное отображение множества целых чисел и отображение, сопоставляющее каждому целому n число $n + 1$, задают одинаковые разбиения множества целых чисел.

Отношение порядка

Пример 1.7. Рассмотрим множество действительных чисел \mathbb{R} с естественным числовым порядком.

Пусть $a < c$.

Для любых a и c найдется такое b , что $a < b < c$.

Отношение порядка на множестве действительных чисел является плотным. Поэтому отношение доминирования будет пустым.

Пустым будет и отношение доминирования, ассоциированное с естественным числовым порядком на множестве рациональных чисел.

На множестве целых чисел с естественным числовым порядком отношение доминирования не пусто.

$1 \triangleleft 2$, $-5 \triangleleft -4$;

между 1 и 2 не существует „промежуточный“ элемент.

Записывать $1 \triangleleft 3$ **неверно**, что, поскольку между единицей и тройкой существует „промежуточный“ элемент — двойка.