Модуль 1 "Теория множеств и высшая алгебра"
курса "Дискретная математика", 2-й курс, 4 семестр, ИУ-8, 2012 г.

Задачи для подготовки к рубежному контролю

Теория множеств

1. Используя метод двух включений, для произвольных бинарных отношений ρ, τ и σ выяснить, справедливо ли тождество $(\rho \cup \sigma) \cup \tau = (\tau \cup \sigma) \cup \rho$.

2. Покажите, что для произвольных множеств A, B и C справедливо тождество

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C).$$

3. Пусть τ — бинарное отношение на множестве $\mathbb{N}$: $(a,\ b)\,\tau\,(c,\ d)$, если и только если $a \le c$ и $b \ge d$; Является ли τ отношением порядка? Если да, установить, существует ли наименьший элемент по отношению τ? Является ли этот порядок линейным?

4. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана плоскость $ax + by + cz = 0$. Точки с радиус-векторами $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ связаны бинарным отношением τ, если $((\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}),\ \mathbf{n}) = 0$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к указанной плоскости, а $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение векторов. Показать, что τ есть отношение эквивалентности. Что будет классом эквивалентности точки из $\mathbb{R}^3$?

5. Пусть на множестве P последовательностей длины 3, элементами которых являются натуральные числа, задано бинарное отношение τ: $a_1a_2a_3\,\tau\,b_1b_2b_3$, если и только если a_i делит b_i нацело, $i = 1, 2, 3$. Установите, является ли τ отношением порядка? Линейного порядка? Существует ли наименьший элемент?

6. Пусть A — конечное множество. Какое отношение эквивалентности на нем дает наибольшее число эквивалентных классов? Сколько? Сколькими способами можно задать отношение эквивалентности, разбивающее A на два класса?

7. Пусть F — множество функций, непрерывных на $[a,\ b]$, и на множестве F задано бинарное отношение τ: $f(x)\,\tau\,g(x)$, если $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Установите, будет ли отношение τ отношением толерантности? эквивалентности? Если отношение является эквивалентностью, опишите классы эквивалентности по этому отношению.

8. Пусть на множестве P последовательностей длины 2, элементами которых являются целые числа (кроме нуля), задано бинарное отношение τ: $a_1a_2\,\tau\,b_1b_2$, если и только если a_i делит b_i нацело, $i = 1, 2$. Установите, является ли τ отношением предпорядка? порядка?

9. Пусть на множестве неотрицательных рациональных чисел определено бинарное отношение υ: $(a/b)\,\upsilon(c/d)$, если и только если $ad \le bc$. Показать, что υ является отношением порядка. Существует ли наименьший элемент? Является ли этот порядок линейным?

10. Пусть F — множество функций, непрерывных на $[a,\ b]$, и на множестве F задано бинарное отношение τ: $f(x)\,\tau\,g(x)$ если и только если $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$. Установите, является ли τ отношением предпорядка? порядка?

11. На множестве упорядоченных пар (x, y), $x,\ y \in \mathbb{R}$, задано отношение τ по правилу $(x_1, y_1)\ \tau\ (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2$. Показать, что τ — отношение эквивалентности. Указать классы эквивалентности. Для точки $(1, \sqrt{2})$ изобразить класс эквивалентности графически.

12. Пусть $\preceq_a$ есть отношение порядка на множестве A, а $\preceq_b$ — на множестве B. На множестве $A \times B$ зададим бинарное отношение $\preccurlyeq$: $(a1,\ b1) \preccurlyeq (a2,\ b2)$, если и только если $a1 \preceq_a a2$ и $b1 \preceq_b b2$. Докажите, что $\preccurlyeq$ есть отношение порядка на $A \times B$. Является ли этот порядок линейным, если линейными являются порядки на множествах A и B?

13. На множестве упорядоченных пар (x, y), $x,\ y \in \mathbb{R}$, задано отношение π по правилу $(x_1, y_1)\ \pi\ (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \le x_2$ и $y_1 \le y_2$. Показать, что π — отношение порядка. Установить, является ли этот порядок линейным? Найти множество нижних и верхних граней множества $\{A, B\}$, где $A = (1, 2)$ и $B = (2, 1)$. Указать $\inf\{A, B\}$ и $\sup\{A, B\}$, если последние существуют. Привести графическую иллюстрацию.

14. Доказать, что множество натуральных чисел равномощно множеству рациональных чисел.

15. Доказать, что отрезок $[0,1]$ равномощен интервалу $(0,1)$.

Элементы высшей алгебры

1. На множестве M определена операция $\circ$ по правилу $x \circ y = x$. Установите, является ли алгебра $(M,\ \circ)$ полугруппой. Существуют ли в ней правые (левые) нейтральные элементы?

2. Пусть на множестве M^2, где M — некоторое множество, определена бинарная операция $\circ$ по правилу $(x,\ y) \circ (z,\ t) = (x,\ t)$. Является ли $(M^2,\ \circ)$ полугруппой? Существует ли в ней нейтральный элемент?

3. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ определена операция $\circ$ по правилу $a \circ b = a + b + ab$. Покажите, что алгебра $(\mathbb{Z},\ \circ\ )$ является коммутативным моноидом.

4. Является ли моноидом алгебра $(2^A, \cup)$, где A — некоторое множество.

5. Пусть $A = \{x, y, z\}$ — множество букв, а A^* — множество всех слов, которые можно составить из этих букв с повторениями. Соединением слова $a_1 \dots a_m$ длины m и слова $b_1 \dots b_k$ длины k называют слово $a_1 \dots a_m b_1 \dots b_k$ длины $m + k$. Например: $xxy + yzxx = xxyyzxx$. Пустое слово (слово нулевой длины) обозначают символом λ. Показать, что $(A^*, +)$ — моноид.

6. В аддитивной группе $\mathbb{Z}_7^{\oplus}$ вычетов по модулю 7 решить уравнение $4 \oplus_7 x = 2$.

7. В мультипликативной группе $\mathbb{Z}_7^{\odot}$ решите уравнение $3^{2011} \cdot x = 2$.

8. В группе подстановок S_4 решите уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. В группе подстановок S_7 решите уравнение $(1\,3\,6)(5\,6)x(1\,4\,2\,7) = (1\,3\,5)$.

10. В мультипликативной группе вычетов $\mathbb{Z}_{31}^{\odot}$ решите уравнение $2 \odot x \odot 8 = 5$.

11. Покажите, что алгебра $(\mathbb{R} \setminus \{0\},\ \odot)$, где $x \odot y = 3xy$, является группой. Решите в этой группе уравнение $3 \odot x = 5$.

12. Установите, является ли кольцом алгебра $(2^A, \cap, \cup)$? Основные теоретико-множественные тождества считать известными.

13. Установите, является ли кольцом алгебра $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$?

14. Установите, является ли кольцом алгебра $(2^A, \triangle, \cap)$, где A — некоторое множество?

15. Установите, являются ли полями следующие кольца вычетов: $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{31}$. Ответ обоснуйте.

16. В поле $\mathbb{Z}_7$ решите систему уравнений

$$\begin{aligned} &3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ &2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ &4x_1 - 6x_3 = 2. \end{aligned}$$

17. Существуют ли делители нуля в кольце Z_4 вычетов по модулю 4? В кольце Z_5?

18. Какие из множеств матриц, элементы которых - действительные числа, образуют кольцо относительно матричных операций умножения и сложения? Какие из колец являются полями?

(а) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$?

(б) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$?

19. Установить, разрешима ли в кольце $\mathbb{Z}_{21}$ система уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1, \\ y - 11x = 13? \end{cases}$$