

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

ФН-12. Магистры - 3 семестр

ЛЕКЦИЯ 5-7. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ.

Параметрическая модель задана ДУ порядка n (системой ДУ).

Подлежат идентификации: параметры модели (значения коэффициентов ОДУ, начальных условий, коэффициентов передаточных функций для линейных моделей).

СУ обычно описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Процесс преобразования нелинейных уравнений в линейные называют **линеаризацией**.

Объект называется **линейным**, если для него справедлив принцип суперпозиции, реакция объекта на линейную комбинацию (суперпозицию) двух входных воздействий равна той же самой комбинации реакций данного объекта на каждое из воздействий:

$$f(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)) = \alpha f(u_1(t)) + \beta f(u_2(t)),$$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — входные воздействия, α и β — произвольные коэффициенты. В противном случае объект считается нелинейным.

Линеаризация.

Уравнение динамики

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, v) = 0,$$

где y - выходная переменная; u и v - входные переменные;

Если значение выходной переменной y_t в момент времени t зависит от значения выходной переменной до момента времени t (от предистории), имеет место **динамическое запаздывание**.

Уравнение статики

$u = u^0$ и $v = v^0$ (входные воздействия постоянные), процесс установится $y = y^0$.

$$F^0 = F(y^0, 0, 0, u^0, 0, v^0) = 0.$$

Пусть заданному режиму соответствуют значения $y = y^0$, $\dot{y} = 0$, $\ddot{y} = 0$, $u = u^0$, $\dot{u} = 0$, $v = v^0$.

Отклонения реальных значений Δy , Δu и Δv от требуемых, $y = y^0 + \Delta y$, $\dot{y} = \Delta \dot{y}$, $\ddot{y} = \Delta \ddot{y}$, $u = u^0 + \Delta u$, $\dot{u} = \Delta \dot{u}$, $v = v^0 + \Delta v$.

Разложение $F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, v)$ в ряд Тейлора в точке $(y^0, 0, 0, u^0, 0, v^0)$.

$$F^0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{y^0} \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)\Big|_{y^0} \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)\Big|_{y^0} \Delta \ddot{y} + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\Big|_{y^0} \Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right)\Big|_{y^0} \Delta \dot{u} + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\Big|_{y^0} \Delta v + \dots = 0$$

Получим

$$a_0 \Delta \ddot{y} + a_1 \Delta \dot{y} + a_2 \Delta y + b_0 \Delta \dot{u} + b_1 \Delta u + c_0 \Delta v = 0, \text{ где } a_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)\Big|_{y^0}, \\ a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)\Big|_{y^0}, \quad a_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{y^0}, \quad b_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right)\Big|_{y^0}, \quad b_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\Big|_{y^0}, \\ c_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\Big|_{y^0}.$$

Условия линеаризации.

- 1) отклонения выходной величины и входных величин достаточно малы;
- 2) функция F обладает непрерывными частными производными по всем аргументам в окрестности точки, соответствующей заданному режиму.

Линейные динамические непрерывные модели в теории управления могут быть заданы в виде ОДУ n -го порядка или передаточных функции.

ОДУ n-го порядка.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t) \quad (4.1)$$

где $a_i, b_j, i = \overline{0, n}; j = \overline{0, m}, m \leq n$ — параметры модели, подлежащие идентификации.

Модель в операторной форме

$$a(p)y(t) = b(p)u(t), \quad (4.2)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, $p^i = \frac{d^i}{dt^i}$,

$a(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ — характеристический полином (собственный оператор), корни уравнения $a(p) = 0$ — полюса системы, $b(p) = b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n$ — характеристический полином правой части (оператор воздействия).

Для описания переходного процесса к (4.1) добавляются начальные условия, (значения выходной величины y и ее $n - 1$ производных в момент времени $t = 0$, т.е. $y(0), \frac{d^i y(0)}{dt^i}, i = 0, n - 1$).

Передаточные функции.

Связь $y(t)$ и $u(t)$ переменных в операторной форме (из 4.2)

$$y(t) = \frac{b(p)}{a(p)}u(t) = W(p)u(t) \quad (4.3)$$

Передаточной функцией в операторной форме называется отношение оператора воздействия к собственному оператору.

$$W(p) = \frac{b(p)}{a(p)} \quad (4.4)$$

Собственный оператор $a(p)$ — дифференциальный оператор при выходной переменной, оператор воздействия $b(p)$ — дифференциальный оператор при входной переменной.

ПФ системы определяется только её статическими и динамическими свойствами, результатом обратного ПФ преобразования является переходная функция, то есть реакция системы на входное воздействие.

Справка

Преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа называют соотношение

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad (4.5)$$

ставящее функции $x(t)$ вещественного переменного в соответствие функцию $X(s)$ комплексного переменного s ($s = \sigma + j\omega$). При этом $x(t)$ – оригинал, $X(s)$ – изображение (изображение по Лапласу), s – переменная преобразования Лапласа.

Свойства преобразования Лапласа

1. Однозначность. Существует однозначное соответствие между оригиналом и изображением. функции $x(t)$ соответствует единственное изображение $X(s)$ и, наоборот.

2. Линейность. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют изображения $X_1(s)$ и $X_2(s)$, коэффициенты α_1 и α_2 – постоянные, не зависящие от времени, то справедливо равенство

$$L\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$$

3. Дифференцирование оригинала во временной области. Если производная $\dot{x}(t)$ является функцией-оригиналом, то

$$L\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0)$$

Если (n) -я производная $x^{(n)}(t)$ является функцией оригиналом, то

$$L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \dots - x^{(n-1)}.$$

При $x(0) = \dot{x}(0) = \dots = x^{(n-1)} = 0$, $L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s)$

4. Интегрирование оригинала во временной области. Интегрирование

оригинала сводится к делению изображения на s : $L\left\{\int_0^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s}$

5. Теорема запаздывания. Для любого $\tau > 0$

$$L\{x(t - \tau)\} = e^{-s\tau} L\{x(t)\}$$

6. Теорема о свертке (умножение изображений). Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – оригиналы, $X_1(s)$ и $X_2(s)$ – изображения, то

$$X_1(s)X_2(s) = L\left\{\int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t x_2(\tau)x_1(t - \tau)d\tau\right\}$$

7. Теоремы о предельных значениях. Если $x(t)$ – оригинал, $X(s)$ – изображение, то

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s);$$

если существует $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, то $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow 0} sX(s)$

8. Теорема разложения. Если $X(s) = B(s)/A(s)$ является дробно-рациональной функцией $B(s)$, $A(s)$ – полиномы от s и степень полинома числителя меньше полинома знаменателя, то ее оригиналом является функция

$$x(t) = \sum_{k=1}^q \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} (X(s)(s - s_k)^{n_k} e^{st})$$

где s_k – корни уравнения $A(s) = 0$, n_k – их кратности, q – число различных корней. Если указанные корни простые, то

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{B(s)}{A'(s)} e^{st},$$

где n – степень полинома $A(s)$, $A'(s) = \left. \frac{dA(s)}{ds} \right|_{s=s_k}$

Передаточные функции (в изображениях Лапласа) для системы 4.1.

Передаточной функцией системы в изображениях Лапласа называют имеющее наименьший порядок отношение изображений ее выходной и входной переменных при нулевых начальных условиях.

К обеим частям 4.1 применим преобразование Лапласа, используя свойство линейности преобразования Лапласа, получим

$$a_n L\{y^n(t)\} + \dots + a_0 L\{y(t)\} = b_m L\{u^m(t)\} + \dots + b_0 L\{u(t)\}. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) с учетом свойства 3 преобразования Лапласа запишем в виде:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_0) U(s), \quad (4.7)$$

где $Y(s) = L\{y(t)\}$, $U(s) = L\{u(t)\}$

$$Y(s) = W(s)U(s). \quad (4.8)$$

Передаточная функция (ПФ) линейной стационарной системы управления (системы автоматического регулирования) – отношение изображений (результатов преобразования Лапласа) выходного и входного сигналов с нулевыми начальными данными. Передаточная функция линейного объекта имеет вид

$$W(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (4.9)$$

где $L\{z\}$ — символ преобразования Лапласа, s – комплексная переменная.

При описании объектов, обладающих **запаздыванием** τ , ДУ (4.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t - \tau)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t - \tau)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t - \tau) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Передаточная функция определяется выражением:

$$W(p) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \exp(-s\tau) \quad (4.11)$$

Идентификация с использованием переходных характеристик.

Переходные характеристики $h(t)$ с использованием ступенчатого изменения управляющего воздействия на входе применяются для идентификации детерминированных объектов по экспериментально полученной реакции объекта. Пусть

$$u(t) = c\mathbf{1}(t) \quad (4.12)$$

где c – интенсивность сигнала, $\mathbf{1}(t)$ – единичная ступенчатая функция:

$$\begin{cases} \mathbf{1}(t) = 0, & t < 0; \\ \mathbf{1}(t) = 1, & t \geq 0; \end{cases} \quad (4.13)$$

Изображение Лапласа единичной ступенчатой функции $\mathbf{1}(t)$ имеет вид $\frac{1}{s}$.

Аппроксимация экспериментально полученной функции $h(t)$ решением линейного ДУ с постоянными коэффициентами, нулевыми начальными условиями и входным воздействием $u(t)$ в виде единичной ступенчатой функции – один из способов определения коэффициентов ЛДУ (параметров ПФ, ЧХ объекта).

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Передаточная функция система в операторной форме имеет вид

$$W(p) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (4.15)$$

Идентификация передаточной функции

с использованием переходной характеристики (кривой разгона).

Кривая разгона $h(t)$ — процесс изменения во времени выходной переменной, вызванный ступенчатым входным воздействием, служит для определения динамических свойств объекта.

Необходимо подобрать такой набор параметров $a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0$, чтобы ”совпали” экспериментально полученная функции $h(t)$ и вычисленная функции $\hat{h}(t)$.

Аддитивный шум.

Будем считать, что в реальных условиях проведения эксперимента помехи ε выходной сигнал объекта $z(t)$ являются аддитивными.

$$z(t) = y(t) + \varepsilon(t), \quad (4.16)$$

где $y(t)$ — полезный сигнал.

Полагаем, что шум имеет следующие характеристики: $M(\varepsilon(t)) = 0$, $M(\varepsilon^2(t)) = \sigma^2$.

Методы уменьшения влияния случайной составляющей (шума).

Уменьшить погрешности в экспериментальных данных, внесенные шумом при, можно путем повторения экспериментов. Обозначим $z^{(l)} = z(t_l)$, $y^{(l)} = y(t_l)$, $\varepsilon^{(l)} = \varepsilon(t_l)$ $M[\varepsilon^{(l)}] = 0$. Пусть в каждый из моментов времени t_l , $l = \overline{1, N}$ проведено k экспериментов. Считаем, что шумы некоррелируемые, т.е. $M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$.

Значения выходных сигналов:

$$z_i^{(l)} = y_i^{(l)} + \varepsilon_i^{(l)}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (4.17)$$

Среднее значение выходной величины по k испытаниям:

$$\bar{z}^{(l)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i^{(l)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (y_i^{(l)} + \varepsilon_i^{(l)}) = y^{(l)} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i^{(l)}. \quad (4.18)$$

Считаем детерминированную составляющую сигнала постоянной. Математическое ожидание среднего значения зашумленного сигнала равно его истинному значению, выборочная дисперсия уменьшается в k раз

$$M(\bar{z}^{(l)}) = y^{(l)}, \quad M((\bar{z}^{(l)} - y^{(l)})^2) = \frac{1}{k} (\sigma^{(l)})^2. \quad (4.19)$$

Методы фильтрации

Задача. Выделить полезный сигнал из зашумленного сигнала.

Возможное решение. С целью исключения влияния случайной составляющей применить метод сглаживания.

Метод скользящего среднего.

Скользящее среднее в статистике (Moving Average) — последовательная серия средних значений с определенным периодом сглаживания. Цель — определение тенденции изменения случайной величины, чем больше период (окно) сглаживания, тем более плавным будет график полученной линии.

Метод скользящего среднего заключается в последовательном усреднении экспериментальных данных $z(t)$ на интервале сглаживания T в окрестности текущего значения времени t .

Скользящее среднее можно рассматривать как фильтр низких частот (как вид свертки), используемых в обработке сигналов.

Для применения метода скользящего среднего интервал (период, размер "окна скольжения") сглаживания выбирается в зависимости от характера сигнала, целей исследования и влияет на устранение случайных факторов.

Чем шире интервал, тем сильнее сглаживание колебаний (при слишком большом окне может быть потеряна информация).

Замечание. Сглаживание с использованием полиномов Фурье, полиномов Чебышева дают лучшие результаты, но требуют больших затрат (временных, машинных).

Простое сглаживание.

Сглаживание непрерывных сигналов:

$$\bar{z}_i = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} t(\tau) d\tau. \quad (4.20)$$

Сглаживание дискретных сигналов. Интервал сглаживания $T = m\Delta t$, где m число точек для усреднения.

$$\bar{z}_{j+\frac{m}{2}} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m z_{j+k}, \quad (4.21)$$

где z_j – истинное значение входного сигнала (переходного процесса) сглаженный текущий отсчет сигнала в j -й момент времени,

\bar{z}_j – оценка значение входного сигнала (переходного процесса) в j -й момент времени (сглаженный j -й отсчет сигнала), полученные при дискретизации с интервалом $\Delta t = t_j - t_{j+1} = \text{const}$, $j = \overline{0, N}$.

Взвешенное сглаживание. При взвешенном сглаживании средние значения, вычисленные по ”окну”, берутся с некоторыми весами.

$$\bar{z}_{j+\frac{m}{2}} = \frac{\sum_{k=0}^m w_{i+k} z_{j+k}}{\sum_{k=0}^m w_{i+k}}, \quad (4.22)$$

где w_{i+k} — вес, с которым z_{j+k} используется в расчетах.

Количество отсчетов в ”скользящей” группе определяется исходя из требований к точности сглаживания и к сложности фильтра.

В качестве критерия оптимальности сглаживания можно использовать, например, минимум суммы квадратов отклонений отсчетов реального сигнала от сглаженного:

$$\sum_{k=0}^m (z_k - \bar{z}_k)^2 \rightarrow \min ,$$

где z_k — текущее значение входного сигнала в k -й момент времени, \bar{z}_k — сглаженный текущий отсчет сигнала, m — количество отсчетов.

Недостатки метода.

1. Первые и последние отсчеты теряются (не сглаживаются).
2. Метод применим сигналов, изменяющихся достаточно монотонно.

Алгоритм сглаживания для уменьшения потерь первых/последних отсчетов

Алгоритм описывает сглаживание дискретных сигналов линейным фильтром, длина памяти фильтра $T = m\Delta t$, амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W_f(j\omega) = \frac{2}{\omega m \Delta t} \sin\left(\frac{\omega m \Delta t}{2}\right).$$

Вся последовательность отсчетов (результатов измерений) делится на **три** части. Первые и последние m отсчетов, где m – число точек для усреднения, усредняются по ”односторонним формулам”, т.е. значения результатов измерения берутся из правой или левой окрестности текущего значения времени t .

В основном алгоритме сглаживания применяется формула (4.21).

Вход. Экспериментальные данные. Представляют собой:

1) в случае дискретной функции выхода – набор отсчетов $z(t_i)$ $i = \overline{1, N}$, где N размер выборки,

2) в случае непрерывной функцией выхода – функция $z(t)$ (или передаточная функция) и длина интервала сглаживания T (время наблюдения).

Выход. Выборка оценок значений переходного процесса (сглаженных отсчетов сигнала).

Алгоритм сглаживания по простой скользящей средней.

1. Определить длину интервала сглаживания.
2. Разбить весь период наблюдений на участки.
3. Рассчитать арифметические средние значения на каждом участке (окне).
4. Заменить фактические значения ряда на каждом участке на средние значения.

Удобно брать длину интервала сглаживания g в виде нечетного числа (в этом случае полученные значения скользящей средней приходятся на средний член интервала).

Пример выполнения задачи сглаживания.

1. В случае непрерывной функцией выхода задать сетку (шаг дискретизации Δt), и вычислить размер выборки N . в случае дискретной функции выхода перейти на шаг 2.

2. Выполнить моделирование единичного входного воздействие. Выполнить моделирование помехи $\varepsilon \rightarrow N(0, 1)$.

3. Выполнить моделирование выходного воздействия с учетом аддитивной выходной помехи.

4. Задать m – количество отсчетов (число точек для усреднения).

5. Выполнить усреднение начального участка. Присвоить \bar{z}_1 значение z_1 , для отсчетов с номерами от $k = 2$ до $k = m$ вычислить значения

$$\bar{z}_k = \frac{\sum_{i=1}^{2k-1} z(i)}{2k-1}.$$

6. Выполнить ”основной” алгоритм усреднения ”скользящим средним”. Для отсчетов с номерами от $k = m + 1$ до $k = N - m$ вычислить значения

$$\bar{z}_k = \frac{\sum_{i=k-m}^{k+m} z(i)}{2m+1}.$$

7. Выполнить усреднение конечного участка. Для отсчетов с номерами от $k = N - m + 1$ до $k = N$ вычислить значения

$$\bar{z}_k = \frac{\sum_{i=2k-N}^N z(i)}{2(N - k) + 1}.$$

8. Провести анализ результатов и сохранить результаты сглаживания.

Алгоритм фильтрации с помощью скользящего среднего реализован в MatLab: функция $smooth(inp, win)$, где inp массив входящих данных win окно усреднения.

Пример.

Передаточная функция объекта: $W(p) = \frac{25}{36s^2 + 15s + 1}$. Время наблюдения $T = 60$, шаг дискретизации $\Delta t = 0.2$. Выполнить сглаживание зашумленной переходной функции объекта.

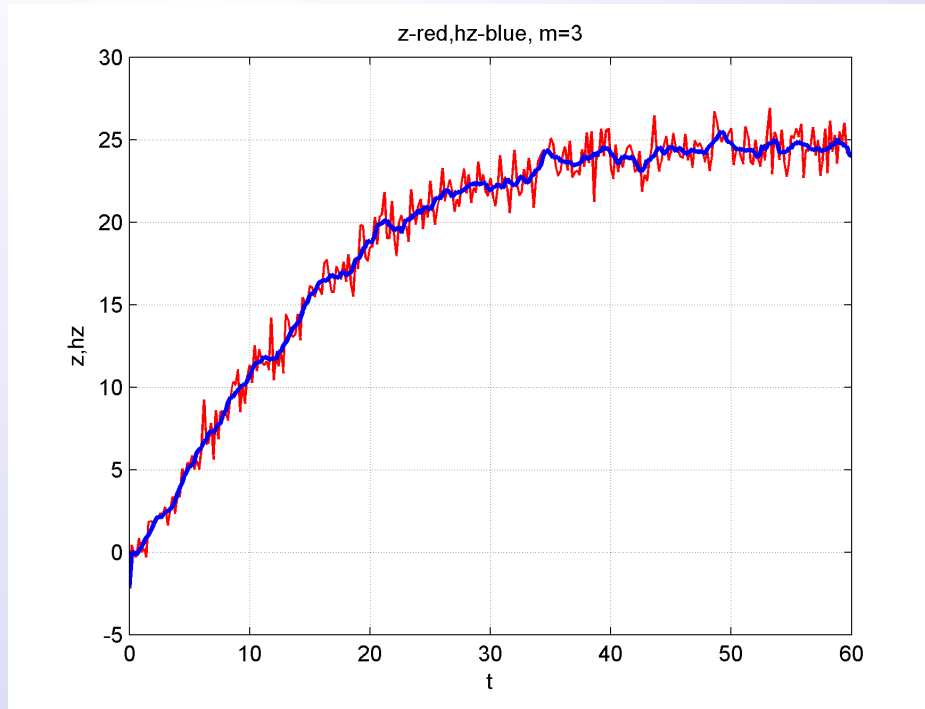


Рис. 1. Сглаживание. $m=3$

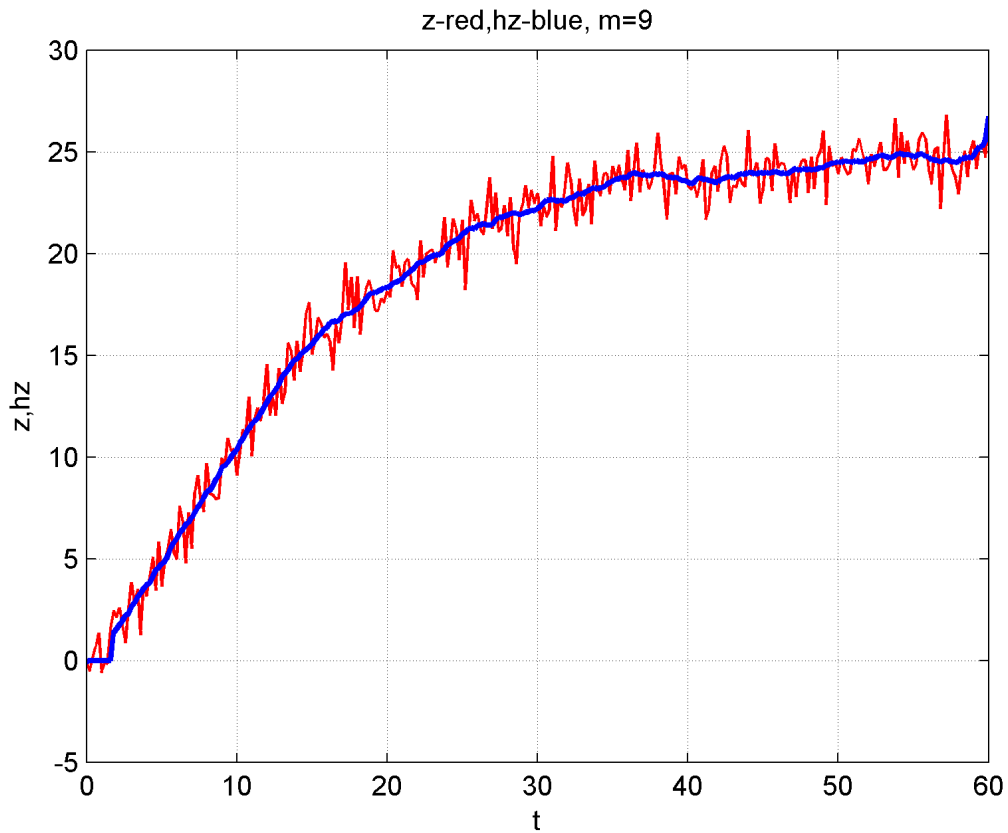


Рис. 2. Сглаживание. $m=9$

Процедурой параметрической идентификации (оценивания) параметров ДС (коэффициенты дифференциальных или разностных уравнений, передаточных функций, частотных характеристик и т.д) является определение значений оценок параметров ДС с использованием экспериментальных данных.

Структура модели объекта предполагается известной, но в процессе параметрической идентификации текущее предположение о структуре объекта может быть и опровергнуто.

Подходы (основные) к определению оценок параметров моделей.

1. Метод наименьших квадратов (МНК).
2. Метод максимального правдоподобия.
3. Метод максимума апостериорной информации.
4. Байесовские оценки.
6. Алгоритмы стохастической аппроксимации.

Модификации МНК:

обобщенный МНК (марковские оценки),
метод взвешенных наименьших квадратов,
метод штрафных функций и др.

Получаемые оценки параметров модели должны быть точными и достигаться достаточно быстро.

Методы оценивания параметров должны быть:

- формализуемыми в достаточно общем виде;
- легко реализуемыми и обеспечивающими приемлемую скорость сходимости;
- обеспечивающими получение оптимальных оценок искомых параметров.

Процедуры оценивания зависят от наблюдаемости сигналов и наличия априорной информации о вероятностных характеристиках входных и выходных сигналов.

Входной сигнал может быть:

наблюдаем точно

наблюдаем в смеси с шумом.

Выходной сигнал всегда **искажен шумом.**

Процедура оценивания заключается в построении алгоритма получения числовой оценки \hat{b} неизвестного вектора параметров b объекта на основе результатов измерений значений его входного и выходного сигналов.

Для оценивания параметров имеется конечное число N экспериментальных данных.

Оценка является функцией этих выборочных значений и является случайной величиной и зависит от размера выборки N .

Характерикой оценки вектора параметров b может служить ФПРВ $f(\hat{b}, N)$.

Обычно ФПРВ $f(\hat{b}, N)$ представляется её числовыми характеристиками: математическим ожиданием $M[\hat{b}]$, смещением $M[\hat{b} - b]$, ковариационной матрицей $cov[\hat{b}] = M\{[\hat{b} - M[\hat{b}]]\{[\hat{b} - M[\hat{b}]]\}^T$

Оценки \hat{b} вектора параметров a должны быть несмещенными, состоятельными, эффективными.

1. \hat{b} – несмещенная оценка, если $\forall N M[\hat{b}] = b$.
2. \hat{b} – состоятельная оценка, если $\hat{b} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} b$.
3. \hat{b} – эффективная оценка, если при заданном объеме выборки имеет наименьшую возможную дисперсию.

Задача идентификации динамического объекта.

Определение передаточной функции объекта управления по его переходной характеристике.

На вход объекта подается ступенчатое входное воздействие, выход объекта управления – реакция на данное воздействие.

Пусть система стационарна и линейна в диапазоне изменения амплитуды входного сигнала и в окрестностях рабочего режима.

Исходными данными для идентификации являются экспериментальные значения переходной функции z_j , $j = \overline{1, N}$, полученные в дискретные моменты времени t_j , $j = \overline{1, N}$, где N размер выборки измерений. z_j представляют собой аддитивную смесь полезного сигнала и шума.

Переходная характеристика (переходная функция) $h(t)$ - реакция системы на входное единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях.

Невязка — разность между выходами объекта и модели, складывается из неточностей структуры модели, погрешностей измерений и неучтённых взаимодействий среды и объекта.

Невязки ε :

- 1) являются случайными величинами;
- 2) $M(\varepsilon(k)) = 0$ ($k = 1, \dots, N$);
- 3) $D(\varepsilon(k)) = \sigma^2$ ($k = 1, \dots, N$);
- 4) $M(\varepsilon(k)\varepsilon(j)) = 0$ ($k \neq j$) $M(\varepsilon(k)\varepsilon(j)) = \sigma^2$ ($k = j$) (случайные величины $\varepsilon(k)$ и $\varepsilon(j)$ не коррелированы).

Задача.

Определить значения коэффициентов передаточной функции объекта, используя МНК.

Передаточная функция объекта задана выражением (4.9) и имеет вид

$$W(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^l a_i p^i}$$

Передаточная функция объекта (как правило) представляется в виде комбинации типовых звеньев.

Критерий оптимальности: минимум суммы квадратов невязок между модельными \tilde{z}_j и экспериментальными данными z_j :

$$\sum_{k=0}^n (z_k - \tilde{z}_k)^2 \rightarrow \min,$$

где z_k – экспериментальное значение переходной функции в момент времени t_k , $k = \overline{1, N}$, $\tilde{z}_k = z_M(k, \alpha, \beta)$ – расчетные значения переходной функции в момент времени t_k , $\alpha = x[a_0, \dots, a_l]$, $\beta = x[b_0, \dots, b_m]$.

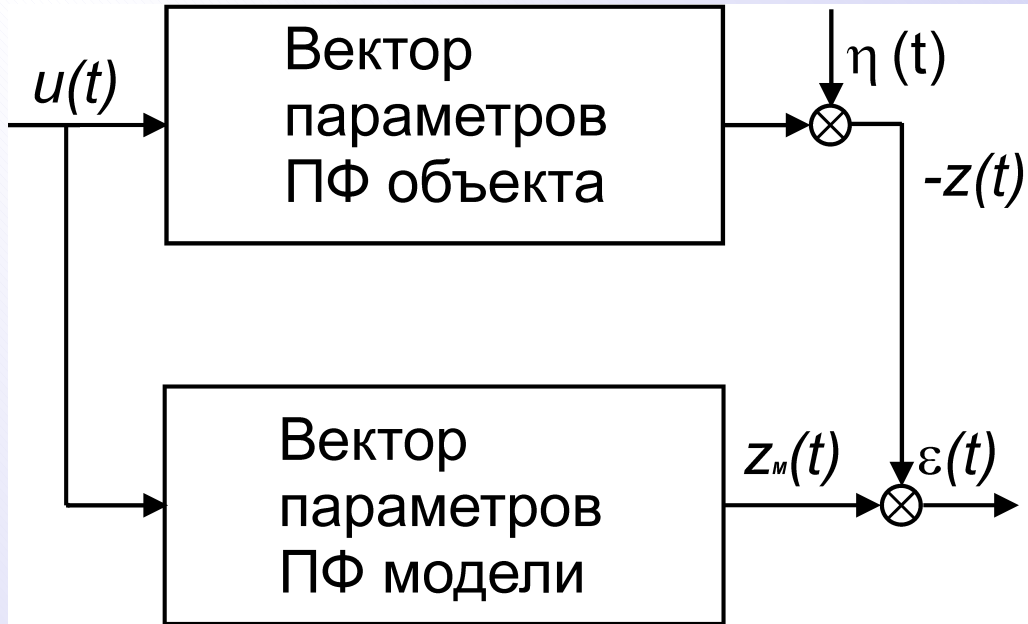


Рис. 3. Схема идентификации

$u(t)$ – входное (единичное ступенчатое) воздействие; $\eta(t)$ – неконтролируемое случайное воздействие (шум); $z(t)$ – выходное воздействие объекта; $z_M(t)$ – выходное воздействие модели; $\varepsilon(t)$ – невязка;

Оценивание параметров объектов по методу наименьших квадратов

Наиболее распространенный метод оценивания.

Выходной сигнал объекта y — аддитивная смесь отклика на входное воздействие u и шума η :

$$y(j) = y(u, \eta, b, j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

где $b = [b_0, b_1, \dots, b_m]^T$ — вектор параметров объекта размерностью $[(m + 1) \times 1]$;

j — номер наблюдаемого измерения выходной величины y ;

N — размер выборки измерений ($N \geq m + 1$).

Сигналы y и u могут быть измерены точно, помеха η характеризуется математическим ожиданием $M[\eta] = 0$ и ковариационной матрицей H :

$$H = cov[\eta] = M[\eta \times \eta^T] = \begin{bmatrix} M[\eta(1) \cdot \eta(1)] & \dots & M[\eta(k) \cdot \eta(1)] \\ \dots & \dots & \dots \\ M[\eta(1) \cdot \eta(k)] & \dots & M[\eta(k) \cdot \eta(k)] \end{bmatrix}.$$

В результате эксперимента имеется выборка измерений входного сигнала $u = [u(1), u(2) \dots u(N)]^T$, выходного сигнала $y = [y(1), y(2) \dots y(N)]^T$.

Для получения на основе экспериментальных данных числовых оценок $\hat{b} = \hat{b}\{u(1), u(2), \dots, u(N), y(1), y(2), \dots, y(N)\}$ используется модель:

$y(j) = y(u, 0, \hat{b}, j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, где $\hat{b} = [\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m]^T$ — оценка вектора параметров модели, размерность $[(m + 1) \times 1]$.

Рассмотрим линейные модели типа $y_M(j) = \sum_{i=0}^m b_i u_i(j)$,

в векторной форме $y_M = U \hat{b}$,

где U — совокупность значений входных воздействий на объект:

$$U = \begin{bmatrix} u_0(1) \dots u_m(1) \\ \dots \\ u_0(N) \dots u_m(N) \end{bmatrix},$$

$\hat{b} = [\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m]^T$ — оценка вектора параметров модели,

$y = [y(1), y(2) \dots y(N)]^T$ — выборка измерений выходного сигнала.

Задача. По имеющимся выборочным данным наблюдений за входным и выходным сигналами с интервалом дискретизации Δt требуется оценить значения параметров.

Критерий оптимальности: минимум величины функционала невязки ε между модельными $y_M = [y_M(\Delta t), y_M(2\Delta t) \dots y_M(N\Delta t)]^T$ и фактическими данными $y = [y(\Delta t), y(2\Delta t) \dots y(N\Delta t)]^T$

$$J = (y - U\hat{b})^T (y - U\hat{b}) = \varepsilon^T \varepsilon = \sum_{j=1}^N \varepsilon^2(j), \quad (4.23)$$

$$\varepsilon(j) = y(j) - y_M(j), \quad j = 1, 2 \dots N. \quad (4.24)$$

Допущение: помеха является случайным процессом типа белого шума.

Важное свойство оценок по МНК — существование только одного локального минимума, совпадающего с глобальным.

Оценка \hat{b}^* является единственной.

Оценка по МНК \hat{b}^* минимизирующая критерий (4.23) находится из условия существования минимума функционала:

$$J = \min_{\hat{b}} J|_{\hat{b}=\hat{b}^*} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{b}}|_{\hat{b}=\hat{b}^*} = 2U^T(y - U\hat{b}^*) = 0. \quad (4.26)$$

$$U^T U \hat{b}^* = U^T y. \quad (4.27)$$

если $U^T U$ — невырожденная матрица:

$$\hat{b}^* = [U^T U]^{-1} U^T y. \quad (4.28)$$

если U — квадратная матрица: т.е. размер выборки равен числу оцениваемых параметров ($m = N$)

$$\hat{b}^* = U^{-1} y. \quad (4.29)$$

Процедура параметрической идентификации производится на основе использования конечного числа экспериментальных данных о значениях входного и выходного сигналов.

Для оценивания параметров объекта можно использовать АРСС-модель или дискретную передаточную функцию.

АРСС-модель — модель авторегрессии и скользящего среднего. Система подвержена влиянию внешних помех типа белого шума $e(k)$. Действие помех можно отобразить аддитивной случайной составляющей выходного сигнала $y(k)$, соответствует прохождению белого шума через фильтр с некоторой передаточной функцией $W_F(z^{-1})$.

Порядки числителя и знаменателя передаточной функции модели n и m заданы.

Измерения выполнены на интервале из $(n+N)$ моментов времени.

Выборка из N измерений для входного сигнала:

$$u(k) = [u(0), u(1), \dots, u(N-1)]^T.$$

Выборка из N измерений для выходного сигнала:

$$y(k) = [u(n), u(n+1), \dots, u(n+1)]^T.$$

На основе выборок по каждым k экспериментально сделанным измерениям входного и выходного сигналов можно приближенно рассчитать следующее $k+1$ значение выходной величины, это значение можно считать его оценкой, сделанной на основе k предшествующих измерений для последующего $k+1$ момента времени ($k+1$ — предсказанное значение).

Обозначения: $u(k)$, $y(k)$ — экспериментальные данные для входного и выходного воздействий соответственно, полученные в момент времени k ; $\hat{y}(k)$ — значение выходного сигнала в k момент времени, рассчитанное по совокупности $k-1$ предшествующих измерений.

АРСС-модель идентифицируемого объекта имеет вид

$$\hat{y}(k) = a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m). \quad (4.30)$$

n и m — порядки числителя и знаменателя передаточной функции модели.

Система соотношений для предсказаний для всей временной выборки из N измерений имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(n) \\ \hat{y}(n+1) \\ \dots \\ \hat{y}(n+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(n-1) & \dots & y(0) & u(m) & \dots & u(1) \\ y(n) & & \dots & y(1) & u(m+1) & \dots & u(2) \\ \dots & & & \dots & & & \\ y(n+N-1) & \dots & y(N) & u(m+N) & \dots & u(N+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Столбец $\hat{Y}^T(k) = [\hat{y}(n) \ \hat{y}(n+1) \ \dots \ \hat{y}(n+N)]$ — вектор предсказанных значений выходного сигнала;

Матрица

$$\Psi = \begin{bmatrix} y(n-1) & \dots y(0) & u(m) & \dots u(1) \\ y(n) & \dots y(1) & u(m+1) & \dots u(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(n+N-1) & \dots y(N) & u(m+N) & \dots u(N+1) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

массив экспериментальных данных наблюдений за входным и выходным сигналами;

$\hat{b} = [a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m]$ — вектор параметров модели.

В матричной форме соотношение (4.31) имеет вид:

$$\hat{Y}^T(k) = \Psi(k)\hat{b}. \quad (4.33)$$

Разность между векторами измеренных значений выходного сигнала $Y^T(k)$ и предсказанных по модели $\hat{Y}^T(k)$ (4.30)—ошибка аппроксимации (погрешности измерений выходного сигнала и неточностей значений параметров модели)

$$e(k, \hat{b}) = Y^T(k, \hat{b}) - \hat{Y}^T(k, \hat{b}). \quad (4.34)$$

Функционал среднеквадратичной ошибки:

$$J(\hat{b}) = e^T(\hat{b}) \cdot e(\hat{b}) = \sum_{j=n}^{n+N} e^2(k, \hat{b}). \quad (4.35)$$

условия существования минимума:

$$\frac{\partial J(\hat{b})}{\partial \hat{b}} \Big|_{\hat{b}=\hat{b}^*} = 0.$$

В явной форме оценка параметров модели методом наименьших квадратов имеет вид:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \begin{bmatrix} \hat{y}(n) \\ \hat{y}(n+1) \\ \dots \\ \hat{y}(n+N) \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Матричная форма:

$$\hat{b} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T Y \quad (4.37)$$

Недостатки метода:

1. Необходимость проведения сложных вычислительных операций.
2. Невозможность оперативно обрабатывать исходные данные по мере их поступления.

Рекуррентные вычислительные схемы.

Построение текущей оценки производится на основании k наблюдений и результатов вычисления оценки $\hat{b}(k-1)$ на предыдущем шаге схемы.

Оценка вектора параметров $\hat{b}(k)$ на k шаге получена путем корректировки оценки на шаге $k-1$.

$$\hat{b}(k) = \hat{b}(k-1) + \gamma(k-1)[y(k) - U(k)\hat{b}(k-1)], \quad (4.38)$$

где $U(k+1) \in M_{N \times m}$ — совокупность значений входных воздействий на объект, $y(k+1) \in M_{N \times 1}$ — выборка измерений выходного сигнала, вновь поступающие данные, соответствующие наблюдению $k+1$ входного и выходного сигналов,

$\hat{b} \in M_{m \times 1}$ — оценка вектора параметров модели,

$\gamma(k) \in M_{m \times N}$ — матрица коррекции предыдущей оценки на основании текущих данных:

$$\gamma(k-1) = (P(k-1)U^T(k))(I + U(k)P(k-1)U^T(k))^{-1}, \quad (4.39)$$

где I — единичная матрица, $I \in M_{N \times N}$ $P(k) \in M_{m \times m}$ (или $P(k) \in M_{(N+m) \times (N+m)}$ для АРСС модели) — матрица текущих значений входного сигнала (вычисляется заранее):

$$P(k) = [I - \gamma(k-1)U(k)]P(k-1). \quad (4.40)$$

При использовании АРСС-модели вектор или матрица исходных данных U заменяется на матрицу входо-выходных данных (4.18) Формулы рекуррентного МНК имеют вид:

$$\hat{b}(k) = \hat{b}(k-1) + \gamma(k-1)[y(k) - \Psi(k)\hat{b}(k-1)], \quad (4.41)$$

$$\gamma(k-1) = (P(k-1)\Psi^T(k))(I + \Psi(k)P(k-1)\Psi^T(k))^{-1}, \quad (4.42)$$

$$P(k) = [I - \gamma(k-1)\Psi(k)]P(k-1). \quad (4.43)$$

Алгоритм вычисления вектора параметров на основе МНК

0. Начальное приближение вектора оценок \hat{b} и начальное приближение матрицы текущих значений входного сигнала $P(0)$:

- 1) при наличии априорной информации: $\hat{b}(0) = 0$, $P(0) = \alpha I$, $\alpha \gg 1$;
- 2) могут быть рассчитаны для некоторого номера наблюдений l на основе МНК:

$$P(l) = [U_l^T U_l]^{-1}, \hat{b}(l) = P(l) U_l^T y_l$$

1. На основании k наблюдений сформировать новый вектор данных U^T , $y(k)$ или $\Psi(k)$.
2. Вычислить матрицу коррекции $\gamma(k-1)$ предыдущей оценки с учетом вновь поступивших данных используя (4.39) (или (4.42)).
3. Определить вектор новых оценок параметров $\hat{b}(k)$, используя (4.38)(или (4.41)).
4. Вычислить матрицу $P(k)$, используя (4.40)(или (4.43)).

Повторить пп.1-4 на каждом k -м такте процедуры идентификации, $k = \overline{1, N}$.

Идентификация статического объекта регрессионным МНК.

Исходные данные (экспериментальные значения):

$\{x_i\}$ — конечная последовательность входных величин объекта;

$\{y_i\}$ — конечная последовательность выходных величин объекта.

Математическая модель связи между входными и выходными (модельными) переменными y_M :

$$y_M = f(x), \quad (4.44)$$

где $f(x)$ – аналитическая зависимость, например, степенные полиномы:

$$y_M = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m. \quad (4.45)$$

Задача идентификации: найти такие оценки неизвестных параметров a_i , $i = 0, 1, \dots, m$, при которых аналитическая зависимость (4.45) будет аппроксимировать экспериментальные данные наилучшим образом.

Критерий качества: минимум квадратичной невязки J значений y_j и y_{M_j} в j -ый момент времени:

$$\begin{aligned} J(a_i) &= \sum_{j=1}^N e_j^2 = \sum_{j=1}^N (y_j - y_{M_j})^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N (y_j - (a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \dots + a_m x_j^m))^2 \rightarrow \min \end{aligned} \quad (4.46)$$

Коэффициенты регрессии находят из системы $m + 1$ уравнений (экстремум по каждому параметру a_i , $i = \overline{0, m}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial a_0} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial J}{\partial a_m} = 0, \end{array} \right. \quad (4.47)$$

Замечание. Универсальные методики обоснования выбора вида и порядка полинома m отсутствуют.

Пример 4.1. Аппроксимация опытных данных квадратичным полиномом
 $y_M = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Критерий минимума среднеквадратичной ошибки:

$$\min_{a_i} J(a_i) = \min_{a_0, a_1, a_2} \sum_{j=1}^N [y_j - (a_0 + a_1x_j + a_2x_j^2)]^2$$

Система уравнений для нахождения коэффициентов a_i

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial a_0} = 2 \sum_{j=1}^N (y_j - (a_0 + a_1x_j + a_2x_j^2)) = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial a_1} = 2 \sum_{j=1}^N (y_j - (a_0 + a_1x_j + a_2x_j^2))x_j = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial a_2} = 2 \sum_{j=1}^N (y_j - (a_0 + a_1x_j + a_2x_j^2))x_j^2 = 0. \end{array} \right. \quad (4.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 N + a_1 \sum_{j=1}^N x_j + a_2 \sum_{j=1}^N x_j^2 = \sum_{j=1}^N y_j, \\ a_0 \sum_{j=1}^N x_j + a_1 \sum_{j=1}^N x_j^2 + a_2 \sum_{j=1}^N x_j^3 = \sum_{j=1}^N y_j x_j, \\ a_0 \sum_{j=1}^N x_j^2 + a_1 \sum_{j=1}^N x_j^3 + a_2 \sum_{j=1}^N x_j^4 = \sum_{j=1}^N y_j x_j^2. \end{array} \right. \quad (4.49)$$

Запишем систему (4.49) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{j=1}^N x_j & \sum_{j=1}^N x_j^2 \\ \sum_{j=1}^N x_j & \sum_{j=1}^N x_j^2 & \sum_{j=1}^N x_j^3 \\ \sum_{j=1}^N x_j^2 & \sum_{j=1}^N x_j^3 & \sum_{j=1}^N x_j^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N y_j \\ \sum_{j=1}^N y_j x_j \\ \sum_{j=1}^N y_j x_j^2 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum_{j=1}^N x_j & \sum_{j=1}^N x_j^2 \\ \sum_{j=1}^N x_j & \sum_{j=1}^N x_j^2 & \sum_{j=1}^N x_j^3 \\ \sum_{j=1}^N x_j^2 & \sum_{j=1}^N x_j^3 & \sum_{j=1}^N x_j^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N y_j \\ \sum_{j=1}^N y_j x_j \\ \sum_{j=1}^N y_j x_j^2 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Обозначим:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \sum_{j=1}^N x_j, \quad S_2 = \sum_{j=1}^N x_j^2, \quad S_3 = \sum_{j=1}^N x_j^3, \quad S_4 = \sum_{j=1}^N x_j^4, \\ S_5 = \sum_{j=1}^N y_j, \quad S_6 = \sum_{j=1}^N y_j x_j, \quad S_7 = \sum_{j=1}^N y_j x_j^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Программную реализацию метода выполнить на семинаре.

Параметрическая идентификация динамического объекта МНК

Пусть система стационарна и линейна в диапазоне изменения амплитуды входного сигнала и в окрестностях рабочего режима.

Динамическим звеном называется часть системы управления, либо вся система, описываемая дифференциальным (или иным) уравнением определенного вида.

Исходные данные: экспериментальные значения переходной функции (кривой разгона) объекта y_j , полученные в дискретные моменты времени t_j , $j = \overline{1, N}$.

Переходная характеристика — реакция системы на единичное ступенчатое воздействие.

Определить значения коэффициентов передаточной функции, тип передаточной функции известен (определен ранее).

Пусть экспериментальные данные y_j могут быть аппроксимированы динамическими характеристиками апериодического звена второго порядка.

Динамическим звеном называется часть системы управления, либо вся система, описываемая дифференциальным (или иным) уравнением определенного вида.

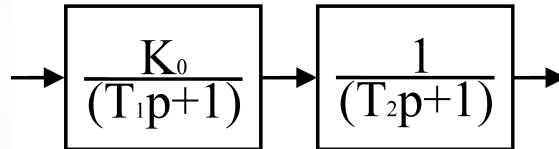


Рис. 4. Аperiodическое звено второго порядка

Математическая модель аperiodического звена второго порядка имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} T_1 T_2 + \frac{dy}{dt} (T_1 + T_2) + y(t) = k_0 u(t). \quad (4.53)$$

Передаточная функция аperiodического звена второго порядка:

$$W_{obj}(p) = \frac{k_0}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \frac{k_0}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1} = \frac{k_0}{T_3 p^2 + T_4 p + 1}. \quad (4.54)$$

где $T_3 = T_1 T_2$, $T_4 = T_1 + T_2$.

Определить параметры k_0 , T_3 , T_4 .

Переходная функция объекта $h(t)$ завит от параметров k_0 , T_1 , T_2 и времени t .

$$h(t) = L^{-1} \left\{ W_{obj}(p) \frac{1}{p} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{k_0}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \right\} =$$

$$k_0 \left(1 - \frac{T_1}{(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (4.55)$$

Запишем минимум суммы квадратов невязок между модельными $h(t_j)$ и экспериментальными данными \tilde{z}_j для моментов времени $t = t_j$:

$$J = \sum_{j=1}^N (h(t_j) - \tilde{z}_j)^2,$$

$$\min_{k_0, T_1, T_2} J(k_0, T_1, T_2) = \quad (4.56)$$

$$= \min_{k_0, T_1, T_2} \sum_{j=1}^N \left[k_0 \left(1 - \frac{T_1}{(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) - y_j \right]^2,$$

где $h(t_j)$ – определена в (4.55).

Условия минимума функционала (4.56):

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial k_0} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial T_1} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial T_2} = 0. \end{cases} \quad (4.57)$$

Исходные данные — массивы значений входных сигналов u_j , выходных сигналов y_j , полученные в дискретные моменты времени с периодом квантования Δt часто оказывается удобнее применять дискретные модели объекта вида (4.30).

Замечание. В случае непрерывной модели объекта (4.55) решение системы ДУ (4.57) связано с аналитическими вычислениями (возможно достаточно сложными).

Пример 4.2. Пусть модель объекта задана в форме передаточной функции:

$$W_0(T) = \frac{k_0}{(T_3 p^2 + T_4 p + 1)}.$$

Для нахождения минимума функции $J(k_0, T_1, T_2)$ можно применить один из методов минимизации используя пакет MatLab (Optimization Toolbox).

Пусть: $k_0 = 25$, $T_1 = 12$, $T_2 = 3$.

Подставим в (4.54), получим $W_0(T) = \frac{25}{36p^2 + 15p + 1}$.

Использование функции *fminsearch* Matlab для минимизации $J(k_0, T_1, T_2)$ (4.56).

fminsearch — находит минимум скалярной функции нескольких переменных, стартуя с некоторой начальной точки. $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Метод прямого поиска не использует численные или аналитические значения градиентов.

$$[x, z] = \text{fminsearch}(\text{fun}, x_0, \text{options}),$$

где:

fun — имя М-функции, вычисляющей значение ($@\text{fun}$);

$x_0 \in M_{n \times 1}$ — координаты точки начального приближения;

options – параметры, управляющие ходом решения;

$x \in M_{n \times 1}$ — координаты точки минимум функции;

z – значение функции в точке x .

Исходные данные: переходная характеристика объекта управления z_j . Пусть экспериментальные данные z_j могут быть аппроксимированы динамическими характеристиками апериодического звена второго порядка. Определить параметры модели объекта k_0 , T_1 , T_2 на основе экспериментальных данных.

Рассмотрим переходную функцию $h(t)$, как функцию от коэффициентов k_0 , T_1 , T_2 и от времени t .

Переходная функция $h(t)$ апериодического звена второго порядка имеет вид

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1} \left(\frac{k_0}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \right) = \\ &= k_0 \left(1 - \frac{T_1}{(T_1 - T_2)} e^{\frac{-t}{T_1}} + \frac{T_2}{(T_1 - T_2)} e^{\frac{-t}{T_2}} \right). \end{aligned}$$

Пример использования функции *fminsearch*

```
function trFun
```

```
    global z1 t kt, ...
```

```
    hk0 = 20; hT1 = 30; hT2 = 20; pr(1) = hk0; pr(2) = hT1;
```

```
pr(3) = hT2;
```

```
    pr1 = fminsearch(@FunMin, pr,
```

```
                    optimset('MaxIter', 1000, 'TolFun', 1e - 8))
```

```
    ...,
```

где

```
function JSum = FunMin(par)
```

```
    JSum1 = 0.0;
```

```
    for k = 1 : kt
```

```
        i = t(k); hti = HFun(par, ti);
```

```
        JSum1 = JSum1 + (hti - z1(k))^2;
```

```
    end;
```

```
    JSum = JSum1;
```

```
end
```

```
function hi = HFun(par, ti)
```

```
    hk0 = par(1); hT1 = par(2); hT2 = par(3);
```

```
    hi = ...
```

```
end
```

Оценки параметров передаточной функции:

$b_0 = 24.84$ (25) , $a_1 = 35.28$ (36) , $a_2 = 15.27$ (15) .

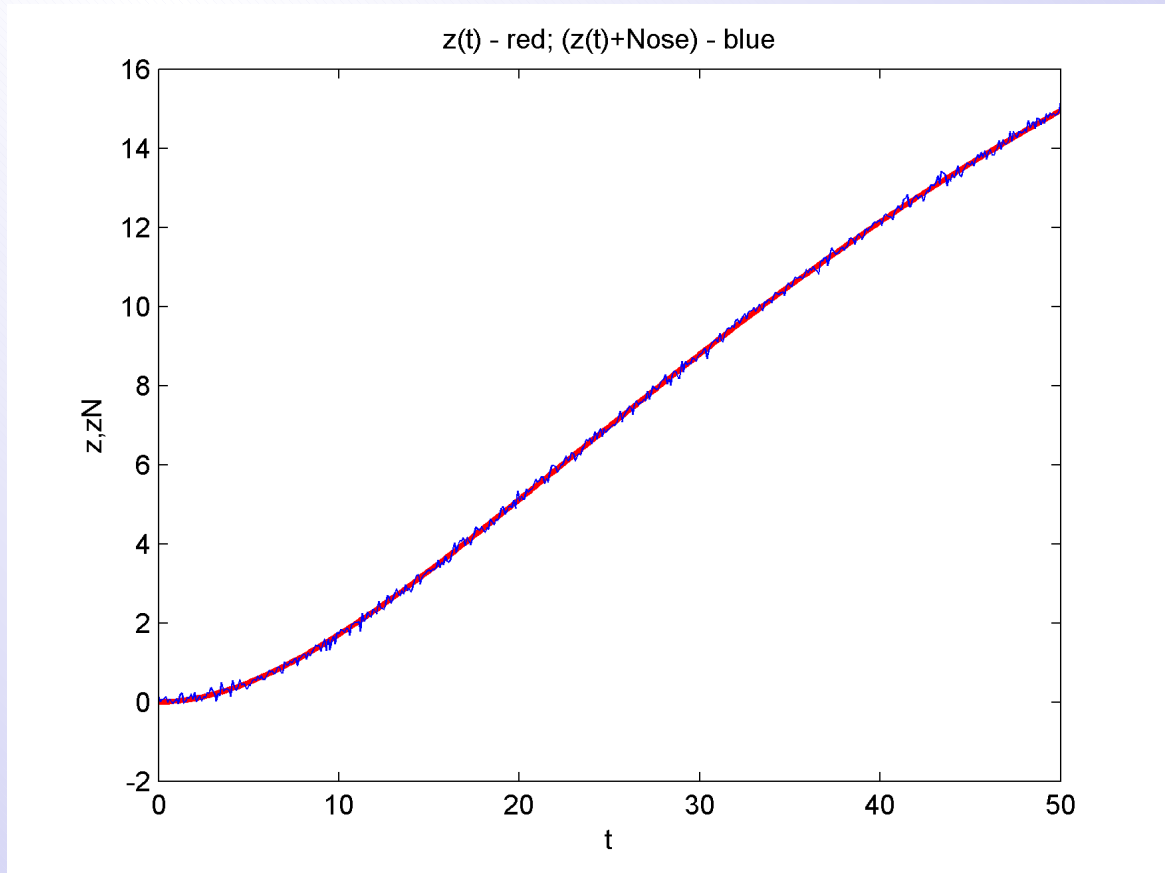


Рис. 5. Переходная функция $z(t)$ с шумом и без шума.

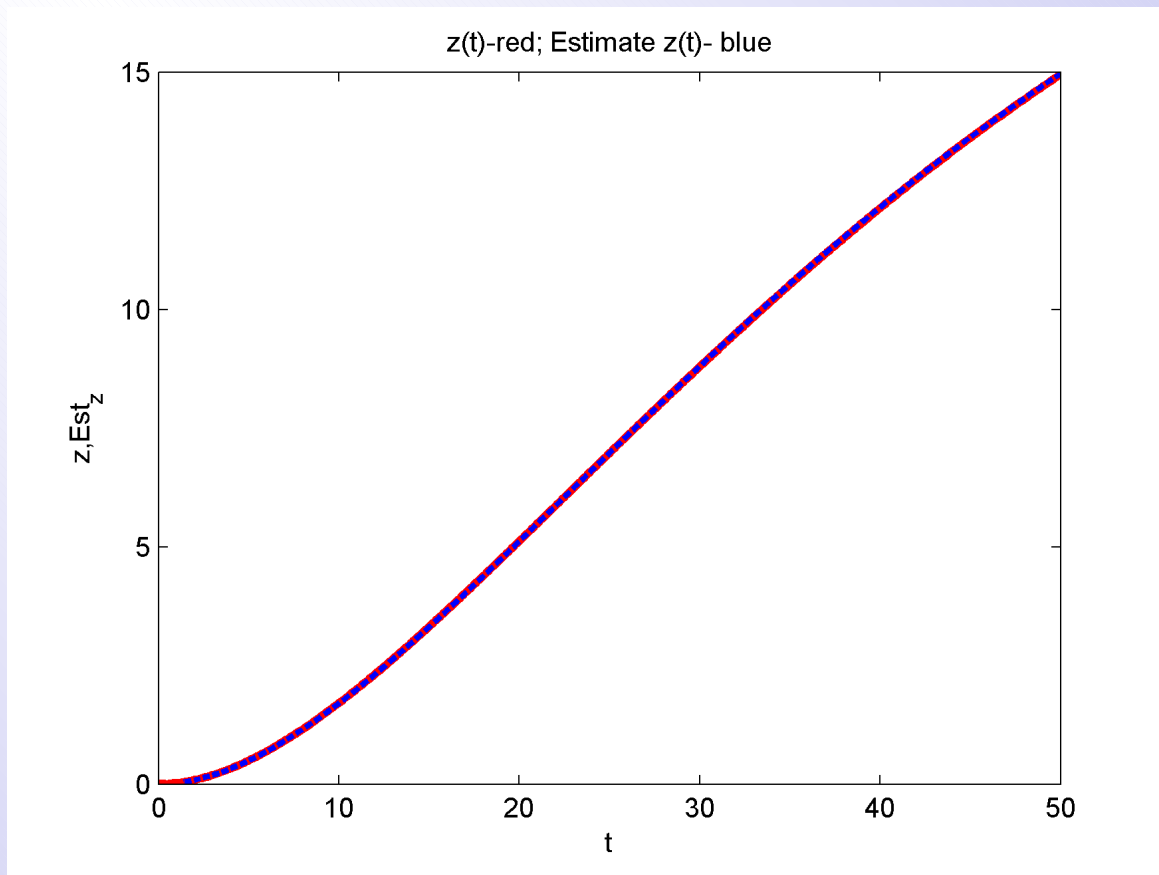


Рис. 6. Переходная функция $z(t)$ и оценка ПФ $z(t)$.

Идентификация динамического объекта регрессионным МНК

Запишем уравнение (4.53) в виде:

$$\frac{d^2y}{dt^2}T_3 + \frac{dy}{dt}T_4 + y(t) = k_0u(t), \quad (4.58)$$

Запишем дискретный аналог уравнения (4.58), используя 3-х точечный шаблон:

$$\frac{T_3(y(i+1) - 2y(i) + y(i-1)))}{\Delta t^2} + \frac{T_4(y(i) - y(i-1)))}{\Delta t} + y(i-1) = k_0u(i-1), \quad (4.59)$$

Пусть $k = i - 1$. В итоге получим уравнение линейной регрессии, частный случай уравнения АРСС-модели (4.30), для $n = 2$, $m = 1$.

$$y(k) = a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + bu(k-1), k = \overline{1, N}, \quad (4.60)$$

где $a_1 = \frac{2T_3 - T_4\Delta t}{T_3}$, $a_2 = \frac{T_4\Delta t - T_3 - \Delta t^2}{T_3}$, $b = \frac{k_0\Delta t^2}{T_3}$, Δt — период квантования.

Напомним, что функционал J (4.35) среднеквадратичной ошибки имеет вид

$$J(\hat{b}) = e^T(\hat{b}) \cdot e(\hat{b}) = \sum_{j=n}^{n+N} e^2(k, \hat{b}).$$

Для дискретной модели порядка $n = 2$ функционал J минимизирующий квадратичную ошибку идентификации:

$$J = \sum_{k=3}^N [y(k) - (a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + bu(k-1))]^2 \rightarrow \min. \quad (4.61)$$

Система уравнений для нахождения неизвестных параметров a_1, a_2, b :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial a_1} = -2 \sum_{k=3}^N [y(k) - (a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + bu(k-1))] y(k-1) = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial a_2} = -2 \sum_{k=3}^N [y(k) - (a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + bu(k-1))] y(k-2) = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial b} = -2 \sum_{k=3}^N [y(k) - (a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + bu(k-1))] y(k-1) = 0. \end{cases} \quad (4.62)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{j=1}^N y^2(k), \quad S_2 = \sum_{j=1}^N y^2 y(k) y(k-1), \quad S_3 = \sum_{j=1}^N y^2(k-1), \\
 S_4 &= \sum_{j=1}^N y(k) y(k-2), \quad S_5 = \sum_{j=1}^N y(k) u(k-1), \quad S_6 = \sum_{j=1}^N y(k-1) y(k-2), \\
 S_7 &= \sum_{j=1}^N y(k-1) u(k-1), \quad S_8 = \sum_{j=1}^N y_j y^2(k-2), \\
 S_9 &= \sum_{j=1}^N y(k-2) u(k-1), \quad S_{10} = \sum_{j=1}^N u^2(k-1).
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Система уравнений (4.63) примет вид: a_1 , a_2 , b :

$$\begin{cases}
 \frac{\partial J}{\partial a_1} = -2S_2 + 2a_1 S_3 + 2a_2 S_6 + 2b S_7 = 0, \\
 \frac{\partial J}{\partial a_2} = -2S_4 + 2a_1 S_6 + 2a_2 S_8 + 2b S_9 = 0, \\
 \frac{\partial J}{\partial b} = -2S_5 + 2a_1 S_7 + 2a_2 S_9 + 2b S_{10} = 0.
 \end{cases} \tag{4.64}$$

Матричная форма (4.64)

$$\begin{bmatrix} S_3 & S_6 & S_7 \\ S_6 & S_8 & S_9 \\ S_7 & S_9 & S_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Вектор параметров дискретной модели

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_3 & S_6 & S_7 \\ S_6 & S_8 & S_9 \\ S_7 & S_9 & S_{10} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Формулы для вычисления параметров непрерывной модели k_0 , T_3 , T_4

$$T_1 = \frac{\Delta t^2}{1 - a_1 - a_2}, \quad T_2 = \frac{(1 + a_2)T_1 + \Delta t^2}{\Delta t}, \quad k_0 = \frac{bT_1}{\Delta t^2}$$

Пример 4.3. Результаты регрессионной процедуры оценивания параметров дискретной и непрерывной моделей по входным и выходным (незашумленным и зашумленным) данным для объекта второго порядка с коэффициентами

$k_0 = 25.00$; $T_3 = 36.00$; $T_4 = 15.00$, интервал измерений: $T = 60$, шаг дискретизации: $\Delta t = 0.2$.

% Сравнение переходных характеристик объекта и модели

Без учета помехи:

Оценки параметров дискретной модели:

$$a_1 = 1.9250 ; a_2 = -0.9260 ; b = 0.0247 .$$

Оценки параметров непрерывной модели:

$$k_0 = 24.927 ; T_3 = 40.3510 ; T_4 = 15.1222 .$$

При учете помехи в виде белого шума:

Оценки параметров дискретной модели:

$$a_1 = 0.5685 ; a_2 = 0.4171 ; b = 0.3861 .$$

Оценки параметров непрерывной модели:

$$k_0 = 26.8585 ; T_3 = 2.7822 ; T_4 = 19.9138 .$$

Сравнение переходных характеристик объекта и модели без учета помехи:

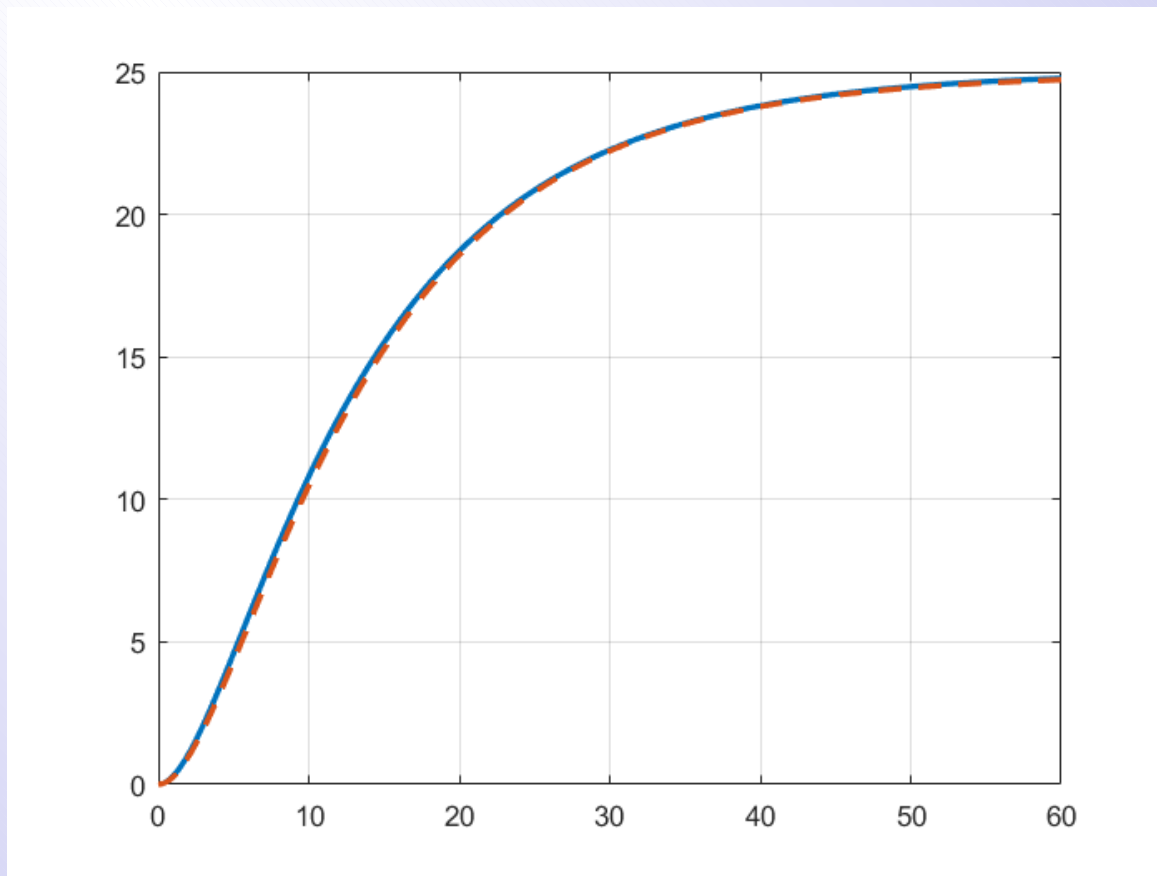


Рис. 7

Сравнение переходных характеристик объекта и модели при зашумленных входных данных:

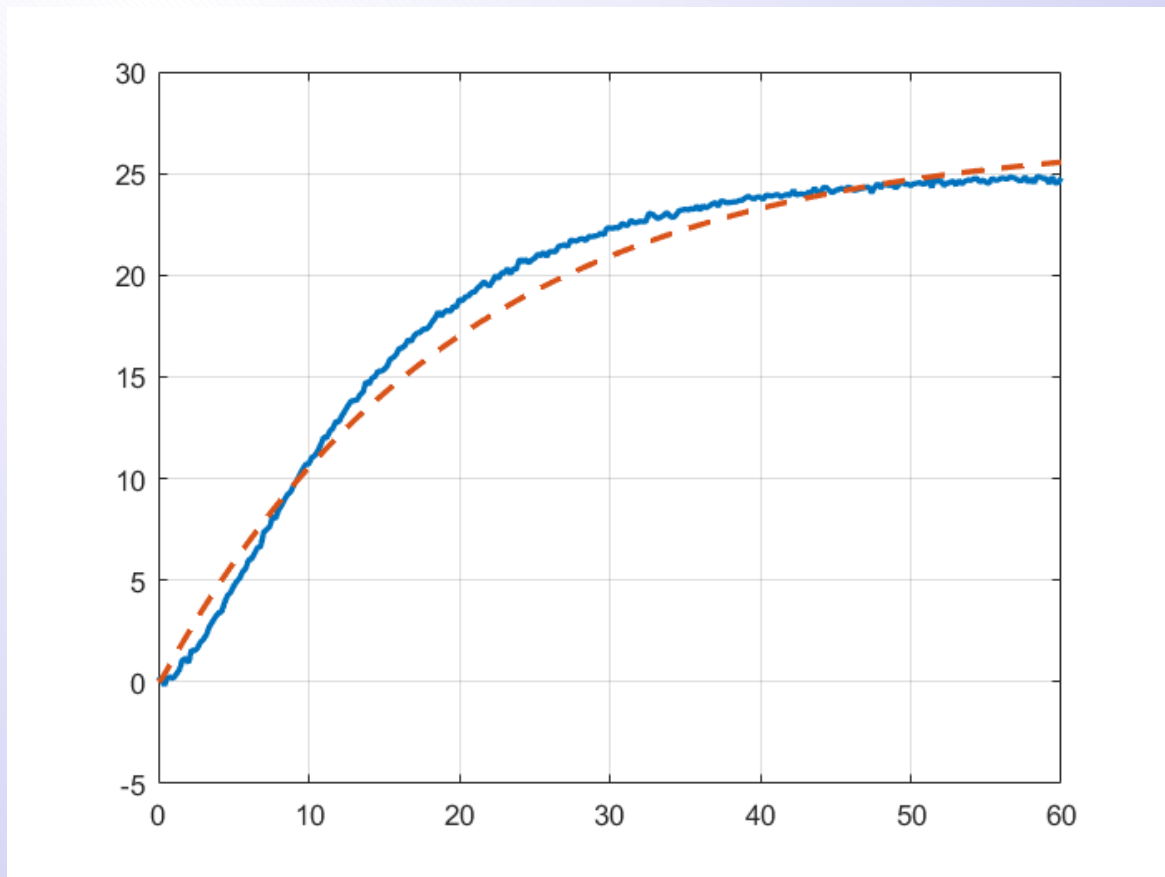


Рис. 8

Из графиков видно, что шум (помехи) существенно влияют на точность оценивания. Необходимо предварительно отфильтровывать шумы.

Точность оценок зависит от шага дискретизации и выбранного интервала измерений.

Ошибки оценок полученных МНК называются смещением оценок.

Для уменьшения ошибок необходимо:

1. Тестирующий сигнал на входе объекта управления должен иметь широкий спектр.
2. Объем исследуемой выборки N должен быть достаточным для получения представительных оценок, чем ниже уровень тестового сигнала $u(t)$, тем больше должно быть N .

Пример 4.4. Идентификация динамического объекта явным МНК

Параметрическая идентификация АРСС - модели объекта второго порядка $n = 2$, $m = 1$ (4.60),

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + bu(k-1), k = \overline{1, N}.$$

Определить a_1 , a_2 , b на основе выборки экспериментальных данных, размер выборки N .

$$\begin{cases} a_1 y(1) + a_2 y(0) + bu(1) = y(2), \\ a_1 y(2) + a_2 y(1) + bu(2) = y(3), \\ \dots \\ a_1 y(N-1) + a_2 y(N-2) + bu(N-1) = y(N). \end{cases} \quad (4.67)$$

Матричная форма (4.67)

$$\begin{bmatrix} y(1) & y(0) & u(1) \\ y(2) & y(1) & u(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ y(N-1) & y(N-2) & u(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ \dots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} y(1) & y(0) & u(1) \\ y(2) & y(1) & u(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ y(N-1) & y(N-2) & u(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

параметры дискретной модели a_1 , a_2 , b :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{bmatrix} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Рассчитанные оценки параметров дискретной модели:

$$a_1 = 1.9190, \quad a_2 = -0.9200, \quad b = 0.0266.$$

Рассчитанные оценки параметров непрерывной модели

$$T_1 = 37.5243, \quad T_2 = 15.2014, \quad K = 25.00.$$

Метод чувствителен к помехам, помехи требуется отфильтровывать.

Идентификации импульсной переходной функции линейного стационарного объекта (ЛСО) с помощью МНК.

Определить импульсную переходную функцию ЛСО $w(t)$ по результатам измерений входного $u(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов на конечном промежутке времени длительностью T в условиях действия помехи η (белый шум).

ЛСО с одним входом и одним выходом.

Выходной сигнал линейной стационарной системы при нулевых начальных условиях:

$$y(t) = \int_0^T w(t)u(t - \tau)d\tau + \eta(t) \quad (4.71)$$

Запишем дискретный аналог уравнения (4.71),

$$y(j\Delta t) = \sum_{i=0}^{N-1} w(i\Delta t)u((j - i)\Delta t)\Delta t + \eta_j, \quad \overline{j = 0, N - 1} \quad (4.72)$$

где Δt — интервал квантования (равномерный), N — количество отсчетов выходного сигнала, $T = N\Delta t$ — время измерения выходного сигнала, η_j — шум: невязка в дискретные моменты времени и ошибки аппроксимации непрерывной зависимости $u(t)$.

Требуется оценить конечное множество параметров w_0, \dots, w_{N-1} .

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 & u_{-1} & \dots & u_{1-N} \\ u_1 & u_0 & \dots & u_{2-N} \\ \dots & & & \\ u_{N-1} & u_{N-2} & \dots & u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \Delta t \\ w_1 \Delta t \\ \dots \\ w_{N-1} \Delta t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \dots \\ \eta_{N-1} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$y = U\hat{b} + \eta$$

где $\hat{b} = (w_0 \Delta t \ w_1 \Delta t \ \dots \ w_{N-1} \Delta t)^T$ — вектор-столбец идентифицируемых параметров, y — вектор-столбец значений выходного сигнала в узлах сетки, η — вектор-столбец значений ошибки в узлах сетки, U — матрица значений входного сигнала в узлах сетки.

Минимизируем сумму квадратов невязок на интервале измерения T :

$$J(\hat{b}) = (y - U\hat{b})^T (y - U\hat{b}) \rightarrow \min \quad (4.74)$$

Оценку \hat{b}^* МНК находим из условия экстремума функционала (4.74).

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \hat{b}} \Big|_{\hat{b}=\hat{b}^*} &= 2U^T (y - U\hat{b}^*) = 0. \\ U^T U \hat{b}^* &= U^T y. \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}^* &= [U^T U]^{-1} U^T y. \\ w &= \frac{1}{\Delta t} [U^T U]^{-1} U^T y. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Градиентные методы. Градиентные методы оптимизации

Общая задача минимизации квадратичной невязки выходных сигналов модели и объекта:

$$J = (y_{obj}(t) - y_M(t))^2 dt \quad (4.77)$$

Задача определения параметров модели интерпретируется как задача оптимизации целевой функции $J = J(\hat{b})$.

Градиентные методы являются основой для идентификации достаточно сложных объектов, для оптимизации нелинейных критериев качества идентификации. Основная идея методов заключается в том, чтобы идти в направлении наискорейшего спуска, направление задается антиградиентом $(-\nabla J)$ (градиент ∇J указывает направление наискорейшего роста ф-ции).

$$\nabla J(\hat{b}) = \left[\frac{\partial J}{\partial \hat{b}_1}, \frac{\partial J}{\partial \hat{b}_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial \hat{b}_n} \right]$$

Рассмотрим методы, основанные на итерационной процедуре приближения к экстремуму целевой функции (в общем случае, получают решение за бесконечное число шагов).

$$\hat{b}(k+1) = \hat{b}(k) - \lambda(k) \nabla J(\hat{b}(k))$$

где $\lambda(k)$ — длина k -го шага итерационного процесса, k — номер итерации, $\lambda(k)$ выбирается постоянной (в этом случае метод может расходиться) или длина шага в процессе спуска делится на некое число (дробный шаг).

Метод **наискорейшего спуска** реализует движение к минимуму из некоторой произвольной точки начального приближения по траектории, обеспечивающей наиболее быстрое уменьшение ошибки - в направлении антиградиента минимизируемой функции. Траектория движения в каждой точке ортогональна к линиям уровня $J(\hat{b}) = const$.

$$\hat{b}(k+1) = \hat{b}(k) - \lambda(k) \nabla s(k),$$

где $s(k) = -\frac{\nabla J(\hat{b}(k))}{\|\nabla J(\hat{b}(k))\|}$,

$$\|\nabla J(\hat{b}(k))\| = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial \hat{b}_1(k)}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial \hat{b}_2(k)}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial J}{\partial \hat{b}_n(k)}\right)^2}$$

Величина шага $\lambda(k)$ выбирается таким образом, чтобы целевая функция в выбранном направлении не перестала убывать. Значение $\lambda(k)$ находится из условия минимума квадратической аппроксимации целевой функции $J(\hat{b})$ по $\lambda(k)$ в точке $\hat{b}(k)$:

$$\lambda(k) = -\frac{[\nabla J(\hat{b}(k))]^T s(k)}{[s(k)]^2 \nabla^2 J(\hat{b}(k)) s(k)},$$

где $\nabla^2 J(\hat{b}(k))$ — матрица вторых производных

$$\nabla^2 J(\hat{b}(k)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{b}_1^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{b}_1 \partial \hat{b}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{b}_1 \partial \hat{b}_n} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{b}_2 \partial \hat{b}_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{b}_2^2} & & \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{b}_2 \partial \hat{b}_n} \\ \cdots & & \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{b}_n \partial \hat{b}_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{b}_n \partial \hat{b}_2} & \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{b}_n^2} \end{vmatrix}$$

В каждой очередной точке $\hat{b}(k + 1)$ определяется новое направление движения к минимуму, ортогональное предыдущему, процесс повторяется пока не будет достигнута заданная точность.

Алгоритм

0. Задать точку начального приближения $\hat{b}(0)$.
1. Вычислить вектор градиента целевой функции $\nabla J(k)$.
2. Вычислить нормирующий коэффициент вектора градиента $\|\nabla J(\hat{b}(k))\|$.
3. Вычислить вектор $s(k)$.
4. Вычислить матрицу вторых производных $\nabla^2 J(\hat{b}(k))$.
5. Вычислить значение шага $\lambda(k)$.
6. Вычислить новое значение приближения $\hat{b}(k + 1)$.