ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

ФН-12. Магистры - 3 семестр

Лекция 6. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ НА ОГРАНИЧЕННЫХ МАЛЫХ ВЫБОРКАХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии. М.: Статистика, 1980. 440 с.

Рассмотрим задачу параметрической идентификации линейной детерминированной дискретной математической модели состояния, не содержащей управления.

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= a^0 X_k, \\ Y_{k+1} &= a^1 Y_k + b^1 X_k, \end{aligned} \tag{6.1}$$

или нелинейной детерминированной дискретной ММ состояния

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= h^d_{01} X_k + h^d_{02} X_k^2 + h^d_{03} X_k Y_k, \\ Y_{k+1} &= h^d_{11} X_k + h^d_{12} Y_k + h^d_{13} X_k^2 + h^d_{14} X_k Y_k + h^d_{15} Y_k^2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Особенности задачи идентификации:

1. Возможна только пассивная идентификация.
2. Процесс невозможно повторить в тех же условиях.
3. Имеется ограниченное количество наблюдений, проведенных через равные промежутки времени.
4. Математическая модель состояния должна быть линейной относительно параметров модели.

Наблюдаемые величины: X_k и Y_k, наблюдения проводятся через промежутки времени τ.

Теорема 1. Задача линейного оценивания неизвестных параметров дискретной линейной модели динамической системы на ограниченных выборках экспериментальных данных о значениях векторов состояния и внешних воздействий в смысле совпадения функций правдоподобия эквивалентна соответствующей ей задаче линейного оценивания с ошибками в инструментальных переменных, записанной на максимально возможной системе непересекающихся шаблонов разностного уравнения математической модели динамической системы.(И.К. Волков).

Справка

Стандартная модель линейной регрессии имеет вид $y = X\beta + \varepsilon$.
$X \in M_{n\times k}$ – матрица регрессоров, независимых (объясняющих) переменных, неслучайная величина; $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ – вектор наблюдений для случайной зависимой переменной; $\beta \in M_{k\times 1}$ – неизвестный вектор регрессионных параметров; $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^T \in M_{k\times 1}$ – возмущающая переменная (возмущение, остаточная переменная, остаток, ошибка) СВ, характеризует отклонение y от функции регрессии.

Требования

1. $\varepsilon_k \to N(0, D[\varepsilon_k])$, $\forall n\ \varepsilon_k = \sigma^2 = const$, $\forall i, j,\ i \neq j\ M[\varepsilon_i, \varepsilon_i] = 0$.
2. Регрессоры и возмущения были независимыми.

Для идентифицируемости параметров предполагается, что $rang X = k < n$.

Метод инструментальных переменных является обобщением МНК. МИП основан на использовании дополнительного набора переменных Z, называемых инструментальными.

Инструментальные переменные должны быть некоррелированными с ошибкой ε ($M[\varepsilon Z] = 0$), не должны иметь прямого влияния на y.

Стандартная модель регрессии с инструментальными переменными имеет вид:

$$y = X\beta + \varepsilon, \qquad X = Z\Pi + \Xi,$$

где y, X, и β определены ранее, Z – матрица инструментальных переменных размера $n \times q$, Ξ – матрица ошибок размера $n \times k$.

Матрица Π отражает эффект влияния инструментов на регрессоры.

Для идентифицируемости предполагается, что $q \geq k$ и $rang Z = q < n$.

Корреляция между X и ε возникает из-за корреляции между ε и Ξ.

Для оценки коэффициентов используется формула:

$$\beta_n = \left(X^T\{Z(Z^T Z)^{-1} Z^T\}X\right)^{-1} X^T\{Z(Z^T Z)^{-1} Z^T\}y$$

Общая схема решения задачи оценивания параметров исходной математической модели.

Рассмотрим дискретную динамическую систему (ДС)

$$V(t_{k+1}) = AV(t_k), \tag{6.3}$$

где $V(t_k)$ – n -мерный вектор состояния системы; $A \in M_{n\times n}$ – неизвестная матрица параметров ДС; $\{\mathcal{W}_k,\ \ k = \overline{1,2N}\}$ – известные значения наблюдений вектора состояния ДС в дискретные моменты времени t_k, $k = 1,\ldots,2N$, $\mathcal{W}_k \equiv \mathcal{W}_k(\omega)$ случайная величина; $2N$ – общее количество наблюдений.

Допущения:

1) последовательность $\{t_k,\ \ k = 1,\ldots,2N\}$ является возрастающей и $\Delta t_k = t_{2k} - t_{2k-1} \equiv const$;

2) наблюдения являются прямыми и содержат случайные ошибки наблюдения $\{\epsilon_k,\ k = \overline{1,2N}\}$

$$\mathcal{W}_k = V(t_k) + \epsilon_k, \tag{6.4}$$

3) ошибки наблюдения ϵ_k – независимые СВ, распределенные по $N_n(0,\Sigma)$, где Σ – неизвестная положительно определенная ковариационная матрица.

Задача оценивания – задача нахождение оценки матрицы A неизвестных параметров ДС по данным наблюдений $\{\mathcal{W}_k,\ k = \overline{1, 2N}\}$.

Согласно теор.1 построим непересекающиеся шаблоны.
Сформируем из множества $\{\mathcal{W}_k,\quad k = \overline{1, 2N}\}$ множество четных и множество нечетных узлов. Задача линейного оценивания матрицы A неизвестных параметров модели (6.3) по известным значениям наблюдений вектора состояния (6.4) в смысле совпадения функций правдоподобия эквивалентна задаче линейного оценивания с ошибками в инструментальных переменных:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{2k} &= AV(t_{2k-1}) + \epsilon_{2k},\ k = \overline{1, N}, \\ \mathcal{W}_{2k-1} &= V(t_{2k-1}) + \epsilon_{2k-1},\ k = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{6.5}$$

где $\mathcal{W}_k$ — n -мерный случайный вектор.

Значения вектора состояния V и значения наблюдений вектора $\mathcal{W}$ в k-е моменты времени представим в виде матриц $M_{n\times N}$:

$$\begin{aligned}
&V \triangleq (V(t_1), V(t_3), \ldots, V(t_{2N-1}));\\
&\mathcal{W}_{ч} \triangleq (\mathcal{W}(t_2), \mathcal{W}(t_4), \ldots, \mathcal{W}(t_{2N}));\\
&\mathcal{W}_{нч} \triangleq (\mathcal{W}(t_1), \mathcal{W}(t_3), \ldots, \mathcal{W}(t_{2N-1}));\\
&\epsilon_{ч} \triangleq (\epsilon(t_2), \epsilon(t_4), \ldots, \epsilon(t_{2N}));\\
&\epsilon_{нч} \triangleq (\epsilon(t_1), \epsilon(t_3), \ldots, \epsilon(t_{2N-1})).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Задача линейного оценивания (6.5) с ошибками в инструментальных переменных примет вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{ч} &= AV + \epsilon_{ч},\\
\mathcal{W}_{нч} &= V + \epsilon_{нч}.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

При известных экспериментальных данных объемом $2nN$, представленных матрицами $\mathcal{W}_{ч}$ и $\mathcal{W}_{нч}$, необходимо оценить nN элементов матрицы V неизвестных значений вектора состояния изучаемой системы, n^2 элементов матрицы A ее неизвестных параметров и $n(n+1)/2$ элементов неизвестной положительно определенной коварицонной матрицы Σ размерности $n \times n$ случайных ошибок измерений $\{\epsilon_k,\ \ k = \overline{1, 2N}\}$, имеющих нормальный закон распределения $N_n(\theta_{n1}, \Sigma)$.

Условие статистической разрешимости задачи (6.7):

$$\{2nN > nN + n^2 + n(n+1)/2\} \Rightarrow \{N > (3n+1)/2\} \tag{6.8}$$

При выполнении условия (6.8) задача линейного оценивания с ошибками в инструментальных переменных (6.7) может быть представлена как задача регрессионного анализа – оценка неизвестной матрицы A, определяемой соотношениями

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_{ч} = A\mathcal{W}_{нч} + \zeta, \\ &\zeta \triangleq \epsilon_{ч} - A\epsilon_{нч}, \ k = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

где каждый столбец случайной матрицы ζ является независимым n-мерным случайным вектором, имеющими закон распределения $N(\theta_{n1}, \Sigma_\zeta)$, где $\Sigma_\zeta \in M_{n\times n}$ – коварционная матрица, зависит от матрицы параметров A ДС (6.3).

$$\Sigma_\zeta = \Sigma + A\Sigma A^{\mathbb{T}}, \tag{6.10}$$

Задача оценивания (6.9) не является задачей классического регрессионного анализа (только похожа), ее разрешимость проблематична. Можно показать, что при условии коммутативности матриц A и $(A\Sigma)^{\mathbb{T}}$ имеют место равенства

$$|\Sigma + A\Sigma A^{\mathbb{T}}| = |\Sigma||I_n + AA^{\mathbb{T}}|,$$
$$(\Sigma + A\Sigma A^{\mathbb{T}})^{-1} = (I_n + AA^{\mathbb{T}})^{-1}(\Sigma)^{-1}.$$

Функция правдоподобия (ФП) задачи регрессионного анализа (6.9), (6.10) может быть представлена в виде:

$$
\begin{aligned}
&J(A, \Sigma_\zeta | W_{ч} W_{нч}) \sim \\
&\sim |\Sigma_\zeta|^{-\frac{N}{2}} \exp[-\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}((W_{ч} - AW_{нч})(W_{ч} - AW_{нч})^{\mathbb{T}}\Sigma_\zeta^{-1})] = \\
&= |\Sigma|^{-\frac{N}{2}} ||I_n + AA^{\mathbb{T}}|^{-\frac{N}{2}} \times \\
&\times \exp[-\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}((W_{ч} - AW_{нч})(W_{ч} - AW_{нч})^{\mathbb{T}}(I_n + AA^{\mathbb{T}})^{-1}\Sigma^{-1})]
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

где $\mathrm{tr}[M]$ – след матрицы M, а $W_{ч}$ и $W_{нч}$ – реализации случайных матриц $\mathcal{W}_{ч}$ и $\mathcal{W}_{нч}$ соответственно.

Реализация $\hat{A}$ оценки матрицы неизвестных параметров A определена равенством

$$\hat{A} = W_{ч} W_{нч}^{+}, \tag{6.12}$$

где $W_{нч}^{+}$ – матрица, псевдообратная по отношению к матрице $W_{нч}$. Реализация оценки и оценка максимального правдоподобия для матрицы параметров A в рассматриваемом случае совпадает с ее оценкой, полученной методом наименьших квадратов:

$$\hat{A}(\omega) \triangleq \mathcal{W}_{ч} \mathcal{W}_{нч}^{+}.$$

Представим математическую модель (**??**), (**??**) в следующем виде:

$$\tilde{X}_{n+1} = a^0 \tilde{X}_n \ ,$$

$$\tilde{Y}_{n+1} = a^1 \tilde{Y}_n + b^1 \tilde{X}_n \ ,$$

где $\tilde{X}_{n+1}$ и $\tilde{Y}_{n+1}$ – значения векторов состояния системы в момент времени t_{n+1}, X_k и Y_k – наблюдаемые значения величин $\tilde{X}_k$ и $\tilde{Y}_k$.
С учетом введенных обозначений ДС примет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 & 0 \\ b^1 & a^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

Матрица параметров системы имеет нижнетреугольный вид.
Задачу идентификации можно разбить на две независимые подзадачи: нахождение оценки параметра a^0, и нахождение оценок параметров a^1 и b^1.

Три этапа решения задачи параметрической идентификации ДС (6.13):
1) найти точечные оценки параметров модели;
2) проверить статистическую гипотезу о виде закона распределения случайных возмущений;
3) найти законы распределения параметров модели и построить доверительные интервалы для параметров модели.
В случае, если проверка статистической гипотезы о виде закона распределения случайных возмущений показала, что гипотеза о нормальном распределении случайных возмущений отклонена, решить задачу параметрической идентификации математической модели (6.13) предложенным далее методом не удается.
В этом случае необходимо проверить экспериментальные данные и условия проведения эксперимента.
Если с заданным уровнем значимости нет оснований для отклонения основной гипотезы о том, что матрицы-строки невязок ε, η, определенные равенствами (6.23), являются матрицами реализаций нормальных случайных величин.
Полученные доверительные интервалы могут служить основой для оценки вероятности реализации различных сценариев развития клеточных популяций.

6.1. Основные принципы байесовского подхода

В теории статистических выводов используются два основных направления: «классический» подход, развитый в работах Дж. Неймана, Е.С. Пирсона и др., используемый при выборках большого объема, и байесовский подход, основанный на применении теоремы Байеса, часто используемый при небольших объемах данных и при неизвестной коварицонной матрице Σ.
Байесовский подход применяется в основном для оценивания биологических и экономических параметров, при ограниченном объеме экспериментальных данных.
Для построения функций плотности распределения вероятностей параметров a^0, a^1, b^1 модели (6.13) воспользуемся байесовским подходом и теорией инвариантности Джеффриса
Г.Джеффрис Теория вероятностей (Jeffreys H. The theory of probability. Oxford, 1939).

Основные сведения о байесовском подходе для оценивания параметров. Подход к интерпретации истинных параметров модели основан на использовании имеющейся априорной информации об изучаемом объекте и пересмотре этой информации с учетом получаемых выборочных данных об исследуемом объекте.

Полагают, что точное значение параметров неизвестно, и они являются случайными величинами с какими-то заранее заданными распределениями.

Случайность рассматривается как неотъемлемое свойство объекта, присущее ему по самой природе (имманентное свойство).

Сам физический объект постоянно подвержен случайным физическим изменениям.

Случайность можно интерпретировать как **меру незнания**, что позволяет проводить рассуждения в условиях неопределенности.

Идея байесовского подхода:

объединяя априорную ФПРВ вектора параметров с информацией выборки при помощи теоремы Байеса, получают апостериорную ФПРВ вектора параметров.

Формула Байеса для непрерывных случайных величин может быть представлена в виде

$$f(\theta|y) = f(\theta)f(y|\theta)/f(y), \tag{6.14}$$

$f(\theta|y)$ – апостериорная ФПРВ вектора θ при данной эмпирической информации относительно вектора y.

Апостериорная ФПРВ содержит как априорную, так и выборочную информацию и используется в байесовском подходе для построения вероятностных утверждений о параметре $p(\theta)$, например для построения доверительных интервалов для параметров.

$f(y|\theta)$ – условная ФПРВ новых наблюдений y при определенных значениях параметра θ, рассматривается как функция от второго аргумента θ при фиксированном первом аргументе, и является функцией правдоподобия для параметра $p(\theta)$.

$f(\theta)$ – априорная ФПРВ для вектора θ. Она базируется на первоначальной информации о векторе параметров, полученной из предыдущих наблюдений или моделирования.

Априорное распределение $p(\theta)$ вектора параметров θ необязательно задавать точно, необходимо только определить семейство априорных распределений, к которому принадлежит $p(\theta)$.

$f(y)$ в формуле (6.14) есть ФПРВ наблюдений y для всех возможных значений параметра θ .

Учитывая, что ФПРВ наблюдений y для всех возможных значений параметра θ имеет вид

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) f(y|\theta) d\theta$$

является константой ($f(y) = const \neq 0$), формула Байеса может быть записана в виде:

$$f(\theta|y) \sim f(\theta) f(y|\theta) \,.$$

В случае, если априорная информация базируется на данных, полученных ранее в результате эксперимента, то априорную ФПРВ называют априорной ФПРВ, базирующейся на данных.

Если данных нет или их очень мало и они носят случайный характер, то априорная информация может получена из теоретических соображений или моделированием.

В подобных случаях априорную ФПРВ называют априорной функцией плотности распределения вероятностей, не базирующейся на данных.

При отсутствии ранее полученных данных и крайне ограниченной информации об изучаемом явлении или объекте, говорят, что априорная информация является «неясной» или «расплывчатой».

Если априорная информация относится к параметрам некоторой модели и является «неясной» или «расплывчатой», то для анализа данных используют расплывчатую априорную ФПРВ.

Правила выбора априорного распределения:

1. Если параметр существует в интервале от $-\infty$ до $+\infty$, то его априорная вероятность считаем равномерно распределенной.

Данное правило для представления незнания значения предлагает принять

$$p(\theta)d\theta \sim d\theta, \; -\infty < \theta < \infty,$$

то есть $p(\theta) \sim const$.ФПРВ является несобственной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\theta)d\theta = \infty.$$

2. Если параметр θ существует в интервале от 0 до $+\infty$, то априорная вероятность его логарифма должна считаться равномерно распределенной: $\vartheta = log(\theta)$.

Для представления незнания значения принимаем правило:

$$p(\vartheta)d\vartheta \sim d\vartheta, -\infty < \vartheta < \infty,$$

где $\vartheta = log(\theta)$.

Поскольку $d\vartheta = d\theta/\theta$, можно записать

$$p(\theta)d\theta \sim d\theta/\theta, \; 0 < \theta < \infty .$$

6.2. Нахождение точечных оценок параметров линейной модели

Для нахождения точечных оценок $\hat{a}^0$, $\hat{a}^1$, $\hat{b}^1$ элементов матрицы параметров a^0, a^1, b^1 запишем модель (6.13) в виде:

$$\begin{pmatrix} X_{2k} \\ Y_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 & 0 \\ b^1 & a^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{2k-1} \\ Y_{2k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

где матрицы-строки

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in M_{1\times N}(R), \\ \eta &= (\eta_1, \ldots, \eta_N) \in M_{1\times N}(R), \end{aligned} \tag{6.16}$$

являются реализациями случайных ошибок наблюдения, обусловленных как случайными возмущениями самой математической модели, так и погрешностями в экспериментальных данных (возмущениями).

Задачу идентификации матрицы параметров системы разбивают на две независимые подзадачи.

Считая, что X_{k+1} зависит только от X_k, разделим массив экспериментальных данных на два.

Сначала сформируем массивы экспериментальных данных для нахождения оценки параметра a^0, затем массивы экспериментальных данных для нахождения оценок параметров a^1 и b^1.

Формируем двухточечные шаблоны для первого и второго уравнения ДС (6.1) в узлах которых известны экспериментальные значения вектора состояния ДС X_{2n-1}, X_{2n} и Y_{2n-1}, Y_{2n} в моменты фиксации t_{2n-1} и t_{2n} соответственно, $t_{2n-1} = (2n-1)\Delta t$, $t_{2n} = 2n\Delta t$.

Массивы экспериментальных данных для первого уравнения ДС имеют вид:

$$X_{ч} \triangleq (X_2, X_4, \ldots, X_{2N}) \in M_{1\times N}(R),$$
$$X_{нч} \triangleq (X_1, X_3, \ldots, X_{2N-1}) \in M_{1\times N}(R). \tag{6.17}$$

Согласно (6.15) и (6.17)

$$X_{ч} = a^0 X_{нч} + \varepsilon\ , \tag{6.18}$$

где матрица-строка ε определена в (6.16).
Реализация оценки параметра a^0 МНК может имеет вид:

$$\hat{a}^0 = X_{ч} X_{нч}^{+}\ , \tag{6.19}$$

где $X_{нч}^{+}$ – матрица, псевдообратная по отношению к матрице $X_{нч}$, определенной в (6.17).

Массивы экспериментальных данных для второго уравнения ДС имеют вид:

$$Y_{ч} \triangleq (Y_2, Y_4, \dots, Y_{2N}) \in M_{1\times N}(R),$$

$$Y_{нч} \triangleq (Y_1, Y_3, \dots, Y_{2N-1}) \in M_{1\times N}(R).$$

$$Z \triangleq \begin{pmatrix} Y_1, Y_3, \dots, Y_{2N-1} \\ X_1, X_3, \dots, X_{2N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{нч} \\ X_{нч} \end{pmatrix} \in M_{2\times N}(R). \tag{6.20}$$

и согласно (6.15), (6.20) получаем

$$Y_{ч} = (a^1, b^1)Z + \eta, \tag{6.21}$$

где матрица-строка η определена в (6.16). Реализация оценки параметров имеет вид: a^1 , b^1 :

$$(\hat{a}^1, \hat{b}^1) = Y_{ч} Z^+, \tag{6.22}$$

где Z^+ — матрица, псевдообратная по отношению к матрице Z , определенной в (6.20).

6.3. Проверка статистической гипотезы о виде закона распределения случайных возмущений

Необходимо проверить статистическую гипотезу H_0 о том, что невязки

$$\begin{aligned} \varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) &\triangleq X_{ч} - a^0 X_{нч}, \\ \eta \equiv (\eta_1, \ldots, \eta_N) &\triangleq Y_{ч} - (a^1, b^1) Z, \end{aligned} \qquad (6.23)$$

где матрицы экспериментальных данных $X_{ч}, X_{нч}, Y_{ч}, Z$ определены равенствами (6.17), (6.20), представляют собой реализации нормальных случайных величин.

Стандартной альтернативной гипотезы о том, что невязки не являются реализациями нормальных случайных величин.

Используем критерий Колмогорова в модификации Тюрина Ю.Н., адаптированный к выборкам малого объема.

1. Тюрин Ю.Н. "Непаметрические методы статистики. М.: Знание, 1978."

2. Тюрин Ю.Н. "О предельном распределении Колмогорова – Смирнова для сложной гипотезы", Известия АН СССР. Математика. 1984. Т. 48, № 6.

Мера расхождения между теоретическим и эмпирическим распределением – максимальное значение абсолютной разности между теоретической ФРВ $F(x)$ и эмпирической ФРВ $F_n(x)$:

$$D_n = \sup_{-\infty<x<\infty} \left|F(x) - F_n(x)\right|. \tag{6.24}$$

Распределение статистики критерия D_n при гипотезе H_0 не зависит от вида функции распределения $F(x)$ (теор. Колмогорова), и если функция $F(x)$ непрерывна, то при любом фиксированном $\lambda > 0$
$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}D_n \le \lambda\right) = K(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left((-1)^j \exp(-2j^2\lambda^2)\right)$.
Величина $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} \left|F(x) - F_n(x)\right|$ имеет порядок $1/\sqrt{n}$, в качестве статистики используют величину $\sqrt{n}D_n$.
Предельная функция распределения $K(\lambda)$ используется при $n \ge 20$, критическая граница $\lambda_\alpha/\sqrt{n}$.
При заданном уровне значимости α, критическое значение λ_α находят из соотношения $1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha$.
Для малых выборок используют модифицированную форму статистики (Тюрин Ю.Н.), критическое значение λ_α определяют по таблице [1].
$D_n\left(\sqrt{N} - 0,01 + \frac{0{,}85}{\sqrt{N}}\right)$,

Алгоритм проверки статистической гипотезы о нормальном распределении невязок

Алгоритм проверки статистической гипотезы H_0 о том, что невязки распределены по нормальному закону с неизвестными параметрами. .

1. Построение теоретической функцией распределения $F(x)$ и эмпирической функцией распределения $F_n(x)$. Оптимальной оценкой для значения каждой точке x теоретической функцией распределения $F(x)$ является значение в этой точке эмпирической функции распределения $F_n(x)$, которое можно считать равным относительной частоте произвольного события в n испытаниях

2. Определение статистики критерия D_n согласно равенству (6.24) и вычисление значения величины λ в модифицированной форме

$$\lambda = D_n \left(\sqrt{N} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{N}} \right).$$

3. Задание уровня значимости α и определение критического значения λ_α критерия Колмогорова в модификации Тюрина по таблице

4. Применение решающего правила: если $\lambda > \lambda_\alpha$, то основная гипотеза H_0 отклоняется, если $\lambda \leq \lambda_\alpha$, то гипотеза H_0 не противоречит данным и с уровнем значимости α нет оснований для ее отклонения.

Пример.
Рассмотрим матрицу строки невязок ε, определенной в (6.23).
1. Вычисление выборочного среднего

$$\bar{\varepsilon} \triangleq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k$$

и исправленной выборочной дисперсии

$$S^2 \triangleq \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(\varepsilon_k - \bar{\varepsilon})^2$$

матрицы-строки невязок ε.
2. Центрирование и нормирование элементов матрицы-строки ε, сортировка чисел

$$\frac{\varepsilon_k - \bar{\varepsilon}}{S}, \quad k = \overline{1, N},$$

в порядке возрастания.
3. Определение по таблицам значения $F(y_n)$, $n = \overline{1, N}$ функции распределения стандартного нормального закона, где через y_n, $n = \overline{1, N}$, обозначен n-ый элемент упорядоченного множества, полученного в пункте 2.
4. Вычисление значения статистики критерия

$$\lambda \triangleq \max_n \left| F(y_n) - \tfrac{n}{N} \right| \left(\sqrt{N} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{N}}\right).$$

5. Применение решающего правила. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и пороговом значении квантиля $\lambda_\alpha = 0,895$ воспользоваться следующим решающим правилом:

если $\lambda \le \lambda_\alpha$, то нет оснований для отклонения основной гипотезы;

если $\lambda > \lambda_\alpha$, то следует отклонить основную гипотезу в пользу конкурирующей и вернуться к анализу экспериментальных данных и уточнению используемой математической модели.

Если с заданным уровнем значимости нет оснований для отклонения основной гипотезы о том, что матрицы-строки невязок ε, η , являются матрицами реализаций нормальных случайных величин, то можно доказать, что байесовские апостериорные законы распределения параметров a^0, a^1, b^1 , построенные с учетом теории инвариантности Джеффриса, являются обобщенными распределениями Стьюдента.

6.4. Законы распределения параметров и их интервальное оценивание

На третьем этапе решения задачи параметрической идентификации математической модели (6.13) необходимо построить интервальные оценки параметров модели. Для построения интервальных оценок параметров a^0, a^1, b^1 необходимо знать параметры соответствующих законов распределения.

Построение функции плотности распределения вероятностей параметра a^0

Согласно (6.15) и (6.18)

$X_{ч} = a^0 X_{нч} + \varepsilon$,

где a^0 – идентифицируемый параметр, матрица-строка ε определена равенством (6.16), а матрицы-строки

$$X_{ч} \triangleq (X_2, X_4, \dots, X_{2N}] \in M_{1\times N}(R) \,,$$
$$X_{нч} \triangleq (X_1, X_3, \dots, X_{2N-1}] \in M_{1\times N}(R) \,,$$

представляют используемую выборку.

Элементы матриц-строк $X_{нч}$ и $X_{ч}$ являются реализациями независимых случайных величин, будем обозначать их $x_k^{нч}$ $(k = \overline{1, N})$ и $x_k^{ч}$ $(k = \overline{1, N})$ соответственно. Зависимая переменная $X_{ч}$ есть линейная функция от $X_{нч}$ с точностью до случайного возмущения ε .

Примем допущение, что все $x_k^{нч}$ элементы матрицы $X_{нч}$ являются фиксированными нестохастическими переменными.

В случае, если гипотеза о том, что матрица-строка невязок $\hat{\varepsilon}$, определенная первым равенством (6.23), является матрицей реализаций нормальных случайных величин с нулевым математическим ожиданием, не была отклонена, воспользуемся основными положениями регрессионого анализа.

Независимые случайные величины (возмущения) $\{\varepsilon_k\,,\ k=\overline{1,N}\}$ имеют распределение $N(0,\sigma^2)$ $(\forall k=\overline{1,N}\ \ M(\varepsilon_k)\equiv 0\,,\ D(\varepsilon_k)=\mathrm{const}\equiv\sigma^2\,,$ $M(\varepsilon_k\varepsilon_j)\equiv 0$ при $k\neq j$.

σ^2 определяет воздействие неучтенных случайных факторов и ошибок в ДС (6.1).

Выборочная остаточная дисперсия S_ε^2 – несмещенная оценка σ^2

$$S_\varepsilon^2=\frac{(X_{ч}-\hat{a}^0X_{нч})(X_{ч}-\hat{a}^0X_{нч})^{\mathbb{T}}}{N-1}=\frac{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}^{\mathbb{T}}}{(N-1)}=\frac{\sum_{k=1}^{N}\hat{\varepsilon}_k^2}{N-1},$$

где $\hat{\varepsilon_k}=x_k^{ч}-\hat{a}^0x_k^{нч}$ – выбочная оценка реализации сл. возмущения ε_k (остаток регрессии).

При построении ФПРВ параметра a^0 для оценки параметра $\hat{a}^0$ применим МНК (без использования псевдообратных матриц).

Обозначим сумму квадратов отклонений расчетных значений состояния $\hat{a}^0 X_{нч}$ от их экспериментальных значений $X_ч$ через S^2 :

$$S^2 = (X_ч - \hat{a}^0 X_{нч})(X_ч - \hat{a}^0 X_{нч})^{\mathbb{T}} = \hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}^{\mathbb{T}}. \tag{6.25}$$

S^2 – пропорциональную оценке дисперсии.
Оценка параметра a^0 МНК предполагает, что величина $\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}^{\mathbb{T}} = \sum_{k=1}^{N}(\hat{\varepsilon}_k^2)$ минимизируется. Имеем

$$\begin{aligned} S^2 &= \varepsilon\hat{\varepsilon}^{\mathbb{T}} = (X_ч - \hat{a}^0 X_{нч})(X_ч - \hat{a}^0 X_{нч})^{\mathbb{T}} = \\ &= X_ч X_ч^{\mathbb{T}} - \hat{a}^0 X_{нч} X_ч^{\mathbb{T}} - X_ч X_{нч}^{\mathbb{T}} \hat{a}^0 + \hat{a}^0 X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} \hat{a}^0 = \\ &= X_ч X_ч^{\mathbb{T}} - 2\hat{a}^0 X_ч X_{нч}^{\mathbb{T}} + (\hat{a}^0)^2 X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}}, \end{aligned} \tag{6.26}$$

$\hat{a}^0 X_{нч} X_ч^{\mathbb{T}} = X_ч X_{нч}^{\mathbb{T}} \hat{a}^0$, так как $X_{нч} X_ч^{\mathbb{T}} = \sum\limits_{k=1}^{N}(x_k^{нч} x_k^{ч})$ и $\hat{a}^0$ являются скалярными величинами.

Для нахождения экстремума продифференцируем функцию $S^2(a^0)$ и получим

$$dS^2/da^0 = -2X_{ч}X_{нч}^{\mathbb{T}} + 2\hat{a}^0 X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}} = 0.$$

Отсюда $X_{ч}X_{нч}^{\mathbb{T}} = \hat{a}^0 X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}}$. Решая это уравнение относительно $\hat{a}^0$, найдем

$$\hat{a}^0 = X_{ч}X_{нч}^{\mathbb{T}}(X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}})^{-1} \equiv X_{ч}X_{нч}^{+}. \qquad (6.27)$$

Поскольку $X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}} > 0$, то найденное значение $\hat{a}^0$ соответствует минимуму функции $S^2(a^0)$.

Совместная апостериорная ФПРВ параметра a^0 и дисперсии σ^2 согласно теореме Байеса может быть представлена в виде

$$f(a^0, \sigma^2 | X_{ч}, X_{нч}) \sim f(a^0, \sigma^2) f(X_{ч} | X_{нч}, a^0, \sigma^2), \qquad (6.28)$$

$f(X_{ч} | X_{нч}, a^0, \sigma^2)$ – условная ФПРВ новых наблюдений $X_{ч}$ при определенных значениях параметра a^0, σ^2 и $X_{нч}$, рассматривается как ФП;
$f(a^0, \sigma^2)$ – совместная априорная ФПРВ величин a^0 и σ^2.
Знак $\sim$ обозначает пропорциональность, коэффициент пропорциональности может быть найден из условий нормировки после определения остальных параметров совместной апостериорной ФПРВ.

Апостериорная ФПРВ имеет вид:

$$f(X_{ч}|X_{нч}, a^0, \sigma^2) \sim \\ \sim (\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(X_{ч} - a^0 X_{нч})(X_{ч} - a^0 X_{нч})^{\mathbb{T}}], \tag{6.29}$$

$tr(X_{ч} - X_{нч}a^0)(X_{ч} - X_{нч}a^0)^{\mathbb{T}}$ – след матрицы S^2;
σ^2 – выборочная дисперсия;
ошибки $\{\varepsilon_i\}$ распределены нормально;
значения a^0, $X_{нч}$, σ^2 заданы.
Учитывая (6.25) и (6.27), выражение $(X_{ч} - a^0 X_{нч})(X_{ч} - a^0 X_{нч})^{\mathbb{T}}$ примет вид:

$$(X_{ч} - a^0 X_{нч})(X_{ч} - a^0 X_{нч})^{\mathbb{T}} = \\ = \{(X_{ч} - \hat{a}^0 X_{нч}) - (a^0 - \hat{a}^0)X_{нч}\}\{(X_{ч} - \hat{a}^0 X_{нч}) - (a^0 - \hat{a}^0)X_{нч}\}^{\mathbb{T}} = \\ = (X_{ч} - \hat{a}^0 X_{нч})(X_{ч} - \hat{a}^0 X_{нч})^{\mathbb{T}} + (a^0 - \hat{a}^0)^2(X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}}) = \\ = S^2 + (a^0 - \hat{a}^0)^2(X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}}). \tag{6.30}$$

Совместная ФП для параметра a^0 и дисперсии σ^2 задается как ФПРВ совместного появления результатов выборки $x_k^{нч}$, $x_k^{ч}$, $k = \overline{1, N}$:

$$l(a^0, \sigma^2|X_{нч}, X_{ч}) = \prod_{k=1}^{N} f(x_k^{нч}, x_k^{ч}|a^0, \sigma^2)\,.$$

Рассмотрим ФПРВ $f(X_{ч}|X_{нч}, a^0, \sigma^2)$ как функцию от a^0 и σ^2 при фиксированных $X_{ч}$ и $X_{нч}$. Учитывая (6.30), получим ФП для a^0 и σ^2:

$$l(a^0, \sigma^2|X_{нч}, X_{ч}) \sim (\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{S^2 - (a^0 - \hat{a}^0)^2(X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}})}{2\sigma^2}\right] \qquad (6.31)$$

Допущения (согласно Джеффрису).

1. $f(a^0, \sigma^2)$ – совместная априорная ФПРВ, расплывчатая.
2. Параметр a^0 и выборочная дисперсия σ^2 независимо распределены, $f(a^0, \sigma^2) = f(a^0)f(\sigma^2)$.
3. Априорная ФПРВ параметра a^0 – константа (формально о значении параметра a^0 ничего сказать нельзя, $a^0 \in (-\infty, +\infty)$).

$$f(a^0) = const. \qquad (6.32)$$

Данное допущения не ограничивает общности, так как совместная апостериорная ФПРВ будет найдена с точностью до константы.
4. Априорная ФПРВ для σ ($\sigma^2 \in (0, +\infty)$) имеет вид:

$$f(\sigma^2) \sim \frac{1}{\sigma}. \qquad (6.33)$$

С учетом (6.31), (6.32) и (6.33) выражение (6.28) примет вид

$$f(a^0,\sigma^2|X_{ч},X_{нч}) \sim (\sigma^2)^{-\frac{N+1}{2}}\exp[(-\frac{S^2+(a^0-\hat{a}^0)^2(X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}})}{2\sigma^2}]. \qquad (6.34)$$

Полагаем $\chi=\sigma^{-2}$, выражение (6.34) можно представить:

$$f(a^0,\chi|X_{ч},X_{нч}) \sim (\chi)^{\frac{N+1}{2}}\exp[-\frac{(S^2+(a^0-\hat{a}^0)^2(X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}}))\chi}{2}]. \qquad (6.35)$$

Для получения апостериорной ФПРВ параметра a^0 необходимо проинтегрировать (6.35) по χ.
В результате получим

$$f(a^0|X_{ч},X_{нч}) \sim (S^2+(X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}})(a^0-\hat{a}^0)^2)^{-\frac{N}{2}} \times$$
$$\times\int_0^\infty \frac{\chi^{\frac{N-1}{2}}\exp[-\frac{\chi}{2}(S^2+(a^0-\hat{a}^0)^2(X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}}))]}{(S^2+(a^0-\hat{a}^0)(X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}})^2)^{-N/2}}d\chi. \qquad (6.36)$$

Функция плотности распределения вероятностей параметра a^0 **имеет вид:**

$$f(a^0|X_{ч}, X_{нч}) \sim \{S^2 + (a^0 - \hat{a}^0)^2 (X_{нч} X_{нч}{}^{\mathbb{T}})\}^{-\frac{N}{2}}, \qquad (6.37)$$

где

$S^2 \triangleq (X_{ч} - \hat{a}^0 X_{нч})(X_{ч} - \hat{a}^0 X_{нч})^{\mathbb{T}} \equiv \hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}^{\mathbb{T}}$.

Построение функций плотности распределения вероятностей параметров модели a^1 и b^1

Согласно (6.21) вектор экспериментальных данных представлен в виде:
$Y_{ч} = (a^1, b^1)Z + \eta$,
где матрица-строка $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N) \in N_{1\times N}(R)$ является реализацией случайного возмущения;
матрица-строка $Y_{ч}$ и матрица Z определены в (6.20):

$$Y_{ч} \triangleq (Y_2, Y_4, \ldots, Y_{2N}) \in M_{1\times N}(R),$$

$$Z \triangleq \begin{pmatrix} Y_{нч} \\ \\ X_{нч} \end{pmatrix} \in M_{2\times M}(R),$$

$$Y_{нч} \triangleq (Y_1, Y_3, \ldots, Y_{2N-1}) \in M_{1\times N}(R),$$

$$X_{нч} \triangleq (X_1, X_3, \ldots, X_{2N-1}) \in M_{1\times N}(R).$$

$z_k \; (k = \overline{1, M})$, $y_k^{ч}$, $k = \overline{1, N}$ – элементы матриц Z и $Y_{ч}$.

Зависимая переменная $Y_ч$ – линейная функция от Z с точностью до реализации случайного возмущения η.
Допущение. Все элементы матрицы Z являются фиксированными нестохастическими переменными.
Гипотеза H_0 – матрица-строка невязок η – матрица реализаций нормальных случайных величин ($N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = \mathrm{const}$ – неизвестная).
Если H_0 не была отклонена, то СВ η_k , $k = \overline{1, N}$ (зависимые переменные $y_k^ч$) – независимые нормально распределенные СВ $M(\eta_k) = 0$, $k = \overline{1, N}$ и $D(\eta_k) = \sigma^2, k = 1, .., N$.
Для оценки вектора параметров модели (a^1, b^1) применим МНК.

$$S^2 \triangleq (Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)(Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)^{\mathbb{T}} = \hat{\eta}\hat{\eta}^{\mathbb{T}} = \sum_{k=1}^{N} \hat{\eta}_k^2, \qquad (6.38)$$

$\hat{\eta}_k$ – выборочная оценка случайной величины η_k ,

$$\hat{\eta} = Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z, \qquad (6.39)$$

$(\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z$ – расчетные значения, $Y_ч$ – экспериментальные значения состояния, S^2 – пропорциональна оценке дисперсии σ^2 .

Оценка вектора параметров (a^1, b^1) МНК предполагает, что величина S^2 минимизируется:

$$S^2 = \hat{\eta}\hat{\eta}^{\mathbb{T}} = (Y_{ч} - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)(Y_{ч} - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)^{\mathbb{T}} \to min. \qquad (6.40)$$

Раскрыв скобки в (6.40) получим:

$$S^2 = Y_{ч}Y_{ч}^{\mathbb{T}} - 2(\hat{a}^1, \hat{b}^1)ZY_{ч}^{\mathbb{T}} + (\hat{a}^1, \hat{b}^1)ZZ^{\mathbb{T}}(\hat{a}^1, \hat{b}^1)^{\mathbb{T}}. \qquad (6.41)$$

($Y_{ч}(\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)^{\mathbb{T}} = Y_{ч}Z^{\mathbb{T}}(\hat{a}^1, \hat{b}^1)^{\mathbb{T}} = (\hat{a}^1, \hat{b}^1)ZY_{ч}^{\mathbb{T}}$, т.к. $(\hat{a}^1, \hat{b}^1)ZY_{ч}^{\mathbb{T}} \in M_{1\times 1}$ и $Y_{ч}\, Z^{\mathbb{T}}(\hat{a}^1, \hat{b}^1)^{\mathbb{T}} \in M_{1\times 1}$). Находим минимум функции $S^2(\hat{a}^1, \hat{b}^1)$.
Получим: $-2(ZY_{ч}^{\mathbb{T}})^{\mathbb{T}} + 2((\hat{a}^1, \hat{b}^1))(ZZ^{\mathbb{T}}) = 0$.
Находим оценку вектора (a^1, b^1) в виде:

$$(\hat{a}^1, \hat{b}^1) = (Y_{ч}Z^{\mathbb{T}})(ZZ^{\mathbb{T}})^{-1} = Y_{ч}Z^{+}, \qquad (6.42)$$

Матрица $ZZ^{\mathbb{T}}$ является положительно определенной, найденное значение $(\hat{a}^1, \hat{b}^1)$ соответствует минимуму функции S^2 .

Совместную апостериорную ФПРВ вектора параметров (a^1, b^1) и дисперсии σ^2 согласно формуле Байеса представим в виде:

$$f(a^1, b^1, \sigma^2 | Y_ч, Z) \sim f(a^1, b^1, \sigma^2) f(Y_ч | Z, a^1, b^1, \sigma^2), \tag{6.43}$$

где $f(Y_ч | Z, a^1, b^1, \sigma^2)$ – условная ФПРВ новых наблюдений $Y_ч$ при определенных значениях вектора параметров (a^1, b^1), σ^2 и Z, ФП; $f(a^1, b^1, \sigma^2)$ – совместная априорная ФПРВ для вектора параметров (a^1, b^1) и σ^2.

Апостериорная ФПРВ $f(Y_ч | Z, a^1, b^1, \sigma^2)$ имеет вид:

$$f(Y_ч | Z, a^1, b^1, \sigma^2) \sim \\ \sim (\sigma^2)^{-N/2} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(Y_ч - (a^1, b^1)Z)(Y_ч - (a^1, b^1)Z)^{\mathbb{T}}], \tag{6.44}$$

ошибки η_i распределены нормально, значениях Z, a^1, b^1 и дисперсии σ^2 заданы.

Преобразуем выражение $(Y_ч - (a^1, b^1)Z)(Y_ч - (a^1, b^1)Z)^{\mathbb{T}}$.

$$
\begin{aligned}
&(Y_ч - (a^1, b^1)Z)(Y_ч - (a^1, b^1)Z)^{\mathbb{T}} = \\
&= \{(Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z) - (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)Z\} \times \\
&\times \{(Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z) - (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)Z\}^{\mathbb{T}} = \\
&= (Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)(Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)^{\mathbb{T}} - \\
&- (Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)((a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)Z)^{\mathbb{T}} - \\
&- ((a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)Z)(Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)^{\mathbb{T}} + \\
&+ (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)ZZ^{\mathbb{T}}(a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)^{\mathbb{T}} = \\
&= S^2 - \Big[(Y_ч - Y_ч Z^{\mathbb{T}}(ZZ^{\mathbb{T}})^{-1}Z)((a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)Z)^{\mathbb{T}}\Big] - \\
&- ((a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)Z)(Y_ч - Y_ч Z^{\mathbb{T}}(ZZ^{\mathbb{T}})^{-1}Z)^{\mathbb{T}} + \\
&+ (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)ZZ^{\mathbb{T}}(a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)^{\mathbb{T}}.
\end{aligned}
\tag{6.45}
$$

Упростим (6.45). Преобразуем выражение $[*]$

$$
\begin{aligned}
&(Y_ч - Y_ч Z^{\mathbb{T}}(ZZ^{\mathbb{T}})^{-1}Z)((a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)Z)^{\mathbb{T}} = \\
&= (Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)((a^1, b^1)Z - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)^{\mathbb{T}} = \hat{\eta}(\hat{\eta} - \eta)^{\mathbb{T}}.
\end{aligned}
\tag{6.46}
$$

Векторы η и $\hat{\eta}$ – невязки, возникающие при решении СЛАУ $(a^1, b^1)Z = Y_ч$ и $(\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z = Y_ч$.

$L = span(Y_{нч}, X_{нч})$ линейное пространство, $L^{\perp}$ – ортогональное дополнение, $Y_{нч}$ и $X_{нч}$ – строки матрицы Z, определенной в (6.20).
$\hat{\eta}$ – решение задачи минимизации (6.40) МНК, вектор $\hat{\eta} \in L^{\perp}$, вектор $(\hat{\eta} - \eta) \in L$, следовательно $\hat{\eta}(\hat{\eta} - \eta)^{\mathbb{T}} = 0$. Аналогично:

$$((a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)Z)(Y_ч - Y_ч Z^{\mathbb{T}}(ZZ^{\mathbb{T}})^{-1}Z)^{\mathbb{T}} = (\hat{\eta} - \eta)\hat{\eta}^{\mathbb{T}} = 0.$$

В результате выражение (6.45) примет вид:

$$S^2 + (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)ZZ^{\mathbb{T}}(a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)^{\mathbb{T}}. \tag{6.47}$$

ФП для параметров a^1, b^1 и σ^2 задается как ФПРВ совместного появления результатов выборки z_k, $y_k^ч$, $k = \overline{1, N}$:

$$l(a^1, b^1, \sigma^2 | Z, Y_ч) = \prod_{k=1}^{N} f(z_k, y_k^ч | a^1, b^1, \sigma^2).$$

Получим ФП для параметров a^1, b^1 и σ^2. Рассмотрим (6.44) как функцию от a^1, b^1 и σ^2 при фиксированных $Y_ч$ и Z, учтем (6.47):

$$\begin{aligned} l(a^1, b^1, \sigma^2 | Z, Y_ч) \sim \sigma^{2^{-\frac{N}{2}}} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2} S^2 - \\ - \frac{1}{2\sigma^2}(a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)ZZ^{\mathbb{T}}(a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)^{\mathbb{T}}]. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Допущения.

1. Совместную априорную ФПРВ $f(a^1, b^1, \sigma^2)$ считаем расплывчатой.
2. Элементы вектора (a^1, b^1) и дисперсия σ^2 независимо распределены, $f(a^1, b^1, \sigma^2) = f(a^1, b^1) f(\sigma^2)$.
3. Априорная ФПРВ параметров a^1, b^1 – константа ($a^1 \in (-\infty, +\infty)$, $b^1 \in (-\infty, +\infty)$

$$f(a^1, b^1) = const. \tag{6.49}$$

4. $\sigma^2 \in (0, +\infty)$, априорная ФПРВ имеет вид:

$$f(\sigma^2) \sim \frac{1}{\sigma}. \tag{6.50}$$

С учетом (6.48), (6.49) и (6.50) соотношение (6.43), определяющее совместную апостериорною ФПРВ неизвестных параметров a^1, b^1 и выборочной дисперсии σ^2 имеет вид:

$$\begin{aligned} f(a^1, b^1, \sigma^2 | Y_ч, Z) \sim (\sigma^2)^{-\frac{N+1}{2}} \times \\ \times \exp[-\tfrac{1}{2\sigma^2}(S^2 + (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1) Z Z^{\mathbb{T}} (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)^{\mathbb{T}})]. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Положим

$$\chi = \sigma^{-2}. \tag{6.52}$$

Выражение (6.51) примет вид

$$\begin{aligned} & f(a^1, b^1, \chi | Y_{ч}, Z) \sim \chi^{\frac{N+1}{2}} \times \\ & \times \exp[-\tfrac{1}{2}(S^2 + (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1) Z Z^{\mathbb{T}} (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)^{\mathbb{T}})\chi]. \end{aligned} \tag{6.53}$$

Для получения апостериорной ФПРВ параметров модели a^1 и b^1 необходимо проинтегрировать (6.53) по χ.
В результате получим

$$\begin{aligned} & f(a^1, b^1 | Y_{ч}, Z) \sim (S^2 + (\delta_a, \delta_b) Z Z^{\mathbb{T}} (\delta_a, \delta_b)^{\mathbb{T}})^{-\frac{N}{2}} \times \\ & \times \int_0^{\infty} \frac{\chi^{\frac{N+1}{2}} \exp[-\frac{\chi}{2}(S^2 + (\delta_a, \delta_b) Z Z^{\mathbb{T}} (\delta_a, \delta_b)^{\mathbb{T}})]}{(S^2 + (\delta_a, \delta_b) Z Z^{\mathbb{T}} (\delta_a, \delta_b)^{\mathbb{T}})^{-\frac{N}{2}}} d\chi, \end{aligned} \tag{6.54}$$

где $\delta_a = a^1 - \hat{a}^1$, $\delta_b = b^1 - \hat{b}^1$.
Интеграл в (6.54) сходится и его значение равно константе.

Совместная ФПРВ параметров модели a^1 и b^1 :

$$
\begin{aligned}
f(a^1, b^1|Y_ч, Z) &\sim \\
&\sim \{S^2 + (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1) Z Z^{\mathbb{T}} (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)^{\mathbb{T}}\}^{-\frac{N}{2}},
\end{aligned}
\tag{6.55}
$$

где $S^2 \triangleq (Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1) Z)(Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1) Z)^{\mathbb{T}} \equiv \hat{\eta}\hat{\eta}^{\mathbb{T}}$.

Построение маргинальных функций плотности распределения вероятностей параметров модели a^1 и b^1.

Равенство (6.21) в представим в матричном виде:

$$Y_{ч} = (a^1, b^1)Z + \eta = (a^1, b^1)\begin{pmatrix} Y_{нч} \\ X_{нч} \end{pmatrix} + \eta. \tag{6.56}$$

а матрицу $ZZ^{\mathbb{T}}$ — в блочном виде

$$\left(\begin{array}{c|c} Y_{нч}Y_{нч}^{\mathbb{T}} & Y_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}} \\ \hline X_{нч}Y_{нч}^{\mathbb{T}} & X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}} \end{array}\right). \tag{6.57}$$

С учетом представления (6.57) функционал

$$S^2 + (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1) Z Z^{\mathbb{T}} (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)^{\mathbb{T}} \tag{6.58}$$

в (6.55) можно преобразовать к эквивалентному виду:

$$\begin{aligned} & S^2 + (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1) Z Z^{\mathbb{T}} (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)^{\mathbb{T}} = \\ & = S^2 + (a^1 - \hat{a}^1 | b^1 - \hat{b}^1) \left(\begin{array}{c|c} Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}} & Y_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} \\ \hline X_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}} & X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} a^1 - \hat{a}^1 \\ \hline b^1 - \hat{b}^1 \end{array} \right) = \\ & = S^2 + (a^1 - \hat{a}^1) Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}} (a^1 - \hat{a}^1) + (b^1 - \hat{b}^1) X_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}} (a^1 - \hat{a}^1) + \\ & + (a^1 - \hat{a}^1) Y_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} (b^1 - \hat{b}^1) + (b^1 - \hat{b}^1) X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} (b^1 - \hat{b}^1). \end{aligned} \tag{6.59}$$

Все слагаемые в выражении (6.59) являются скалярными величинами,

$$Y_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}} = \sum_{k=1}^{N}(y_k^{нч}x_k^{нч}) = \sum_{k=1}^{N}(x_k^{нч}y_k^{нч}) = X_{нч}Y_{нч}^{\mathbb{T}},$$

$$X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}} = \sum_{k=1}^{N}(x_k^{нч})^2, \quad Y_{нч}Y_{нч}^{\mathbb{T}} = \sum_{k=1}^{N}(y_k^{нч})^2,$$

Запишем выражение (6.59) в виде:

$$S^2+(a^1-\hat{a}^1)^2Y_{нч}Y_{нч}^{\mathbb{T}}+2(a^1-\hat{a}^1)(b^1-\hat{b}^1)X_{нч}Y_{нч}^{\mathbb{T}}+(b^1-\hat{b}^1)^2X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}}. \quad (6.60)$$

Выделив полный квадрат относительно $(b^1 - \hat{b}^1)$ в выражении (6.60), получим

$$S^2 + (a^1 - \hat{a}^1)^2Y_{нч}Y_{нч}^{\mathbb{T}} + 2(a^1 - \hat{a}^1)(b^1 - \hat{b}^1)X_{нч}Y_{нч}^{\mathbb{T}} + (b^1 - \hat{b}^1)^2X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}} =$$
$$= S^2 + ((b^1 - \hat{b}^1) + (a^1 - \hat{a}^1)X_{нч}Y_{нч}^{\mathbb{T}}(X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}})^{-1})^2X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}} +$$
$$+ (a^1 - \hat{a}^1)^2(Y_{нч}Y_{нч}^{\mathbb{T}} - X_{нч}Y_{нч}^{\mathbb{T}}(X_{нч}X_{нч}^{\mathbb{T}})^{-1}X_{нч}Y_{нч}^{\mathbb{T}})$$

Запишем функционал (6.58) в виде:

$$S^2 + (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1) Z Z^{\mathbb{T}} (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)^{\mathbb{T}} = \\ = S^2 + (a^1 - \hat{a}^1)^2 F_a + (b^1 - \Delta_a)^2 X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}}, \tag{6.61}$$

где

$$F_a = Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}} - Y_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} (X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}})^{-1} X_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}}, \\ \Delta_a = \hat{b}^1 - (a^1 - \hat{a}^1) Y_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} (X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}})^{-1}. \tag{6.62}$$

Совместная апостериорная ФПРВ a^1 и b^1 ММ (6.13) имеет вид:

$$f(a^1, b^1 | Y_ч, Z) \sim \\ \sim \{S^2 + (a^1 - \hat{a}^1)^2 F_a + (b^1 - \Delta_a)^2 X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}}\}^{-\frac{N}{2}}. \tag{6.63}$$

Рассмотрим выражение (6.63) как функцию от параметра b^1 при заданном a^1. Проинтегрируем (6.63) по b^1 (F_a и Δ_a от b^1 не зависят) получим маргинальную апостериорную ФПРВ a^1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{S^2 + (a^1 - \hat{a}^1)^2 F_a + (b^1 - \Delta_a)^2 X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}}\}^{-\frac{N}{2}} db^1. \tag{6.64}$$

Выражение (6.64) запишем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} (q^2 + b^2)^{-\frac{N}{2}} db. \tag{6.65}$$

где

$q^2 = S^2 + (a^1 - \hat{a}^1)^2 F_a$ и $b^2 = (b^1 - \Delta_a)^2 X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}}$.

При вычислении интеграла (6.65) возможны два случая.

1. Пусть N — четное число. Обозначим $m = N/2$, тогда

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{db}{(q^2+b^2)^m} = \frac{1}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(q^2+b^2-b^2)db}{(q^2+b^2)^m} =$$

$$= \frac{1}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{db}{(q^2+b^2)^{m-1}} - \underbrace{\left[\frac{1}{2q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b\, d(q^2+b^2)}{(q^2+b^2)^m}\right]}_{*}.$$

Интегрируем по частям $[*]$, обозначим $I_{m-1} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(q^2+b^2)^{m-1}} db$, получим

$$I_m = \frac{1}{q^2} I_{m-1} - \frac{1}{2q^2} \frac{b}{(1-m)(q^2+b^2)^{m-1}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2q^2} \frac{1}{(1-m)} I_{m-1} .$$

$$I_m = \frac{1}{q^2} \frac{2(1-m)+1}{2(1-m)} I_{m-1}. \quad \left(\frac{b}{(1-m)(q^2+b^2)^{m-1}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0 \right),$$

Понизим степень подинтегрального выражения до $m = 1$, что соответствует $N = 2$. Получим

$$
\begin{aligned}
I_m &= \frac{1}{(q^2)^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{2(i-m)+1}{2(i-m)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{db}{(q^2+b^2)} = \\
&= \frac{1}{(q^2)^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{2(i-m)+1}{2(i-m)} \frac{1}{q} \operatorname{arctg}(\frac{b}{q}) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \\
&= \frac{1}{(q^2)^{m-1/2}} K,
\end{aligned}
\tag{6.66}
$$

где

$$
m - \frac{1}{2} = \frac{N-1}{2}, \quad K = \pi \prod_{i=1}^{m-1} \frac{2(i-m)+1}{2(i-m)}.
$$

2. Пусть N — нечетное число.

Обозначим $\dfrac{N}{2} = \dfrac{2m+1}{2} = m + \dfrac{1}{2}$, тогда

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(q^2+b^2)^{m+1/2}} db =$$
$$= \frac{b}{q^2(2m-1)(q^2+b^2)^{m-1/2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{2m-2}{q^2(2m-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{db}{(q^2+b^2)^{m-1/2}}. \tag{6.67}$$

Учитывая, что $\dfrac{b}{q^2(2m-1)(q^2+b^2)^{m-1/2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0$, запишем (6.67) в виде

$$I_m = \frac{2m-2}{q^2(2m-1)} I_{m-1}\,,$$

где $I_{m-1} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{db}{(q^2+b^2)^{m-1/2}}$.

Понизим степень подинтегрального выражения до $m = 1$, что соответствует $N = 3$. Получим

$$
\begin{aligned}
I_m &= \\
&= \frac{1}{(q^2)^{m-1}} \prod_{i=0}^{m-2} \frac{2(m-i)-2}{2(m-i)-1} \left(\left. \frac{b}{q^2\sqrt{(q^2+b^2)}} \right|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{db}{(q^2+b^2)^{3/2}} \right) = \\
&= \frac{1}{(q^2)^{m-1}} \prod_{i=0}^{m-2} \frac{2(m-i)-2}{2(m-i)-1} \left(\frac{2}{q^2} + \left. \frac{b}{q^2\sqrt{(q^2+b^2)}} \right|_{-\infty}^{\infty} \right) = \\
&= \frac{1}{(q^2)^m} K,
\end{aligned}
\tag{6.68}
$$

где

$$
m = \frac{N-1}{2} \quad \text{и} \quad K = 4 \prod_{i=0}^{m-2} \frac{2(m-i)-2}{2(m-i)-1}
$$

.

В случае 1 и в случае 2 результирующее выражение получается одинаковым, точностью до константы K .
Имеем:

$$f(a^1|Y_ч, Z) \sim \{S^2 + (a^1 - \hat{a}^1)^2 F_a\}^{-\frac{N-1}{2}}. \tag{6.69}$$

Подставим в (6.69) значения F_a и Z .

Маргинальная апостериорная ФПРВ параметра a^1

$$\begin{aligned} f(a^1|Y_ч, Y_{нч}, X_{нч}) &\sim \\ \sim \{S^2 + (\delta_a)^2 (Y_{нч}{Y_{нч}}^{\mathbb{T}} - Y_{нч}{X_{нч}}^{\mathbb{T}}(X_{нч}{X_{нч}}^{\mathbb{T}})^{-1}X_{нч}{Y_{нч}}^{\mathbb{T}})\}^{-\frac{N-1}{2}}&, \end{aligned} \tag{6.70}$$

где $(\delta_a) = (a^1 - \hat{a}^1)$.
Маргинальная апостериорная ФПРВ параметра a^1 является обобщенной ФПРВ Стьюдента.

Маргинальная апостериорная ФПРВ параметра b^1

Выделяем полный квадрат относительно $(a^1 - \hat{a}^1)$ в выражении (6.60):

$$S^2 + (a^1 - \hat{a}^1)^2 Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}} + 2(a^1 - \hat{a}^1)(b^1 - \hat{b}^1) X_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}} + (b^1 - \hat{b}^1)^2 X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} =$$
$$= ((a^1 - \hat{a}^1) + (b^1 - \hat{b}^1) Y_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} (Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}})^{-1})^2 Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}} +$$
$$+ (b^1 - \hat{b}^1)^2 (X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} - Y_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} (Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}})^{-1} X_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}}).$$

Запишем функционал (6.58) в виде

$$S^2 + (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1) Z Z^{\mathbb{T}} (a^1 - \hat{a}^1, b^1 - \hat{b}^1)^{\mathbb{T}} =$$
$$= S^2 + (b^1 - \hat{b}^1)^2 F_b + (a^1 - \Delta_b)^2 Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}},$$

где

$$F_b = X_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} - Y_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} (Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}})^{-1} X_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}},$$
$$\Delta_b = \hat{a}^1 - (b^1 - \hat{b}^1) Y_{нч} X_{нч}^{\mathbb{T}} (Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}})^{-1}. \tag{6.71}$$

Совместная апостериорная ФПРВ параметров a^1 и b^1 ММ (6.13):

$$f(a^1, b^1 | Y_ч, Z) \sim$$
$$\sim \{S^2 + (b^1 - \hat{b}^1)^2 F_b + (a^1 - \Delta_b)^2 Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}}\}^{-\frac{N}{2}}. \tag{6.72}$$

Маргинальная апостериорная ФПРВ параметра b^1 :

$$f(b^1|Y_ч, Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\{S^2 + (b^1 - \hat{b}^1)^2 F_b + (a^1 - \Delta_b)^2 Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}}\}^{-\frac{N}{2}} da^1 =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\{S^2 + (b^1 - \hat{b}^1)^2 F_b + (a^1 - \Delta_b)^2 Y_{нч} Y_{нч}^{\mathbb{T}}\}^{-\frac{N}{2}} da^1$$
$$\sim \{S^2 + (b^1 - \hat{b}^1)^2 F_b\}^{-\frac{N-1}{2}}. \tag{6.73}$$

При вычислении интеграла (6.73) возможны два случая.
Маргинальная апостериорная ФПРВ параметра b^1 :

$$f(b^1|Y_ч, Y_{нч}, X_{нч}) \sim$$
$$\sim \{S^2 + (\delta_b)^2 (X_{нч} X_{нч}{}^{\mathbb{T}} - X_{нч} Y_{нч}{}^{\mathbb{T}} (Y_{нч} Y_{нч}{}^{\mathbb{T}})^{-1} Y_{нч} X_{нч}{}^{\mathbb{T}})\}^{-\frac{N-1}{2}}, \tag{6.74}$$

где $(\delta_b) = (b^1 - \hat{b}^1)$, $\quad S^2 \triangleq (Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)(Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1)Z)^{\mathbb{T}} \equiv \hat{\eta}\hat{\eta}^{\mathbb{T}}$.
Маргинальная апостериорная ФПРВ параметра b^1 является обобщенной функцией плотности распределения вероятностей Стьюдента.

Построение доверительных интервалов для параметров модели

ФПРВ параметра a^0 **.**

$f(a^0|X_ч, X_{нч}) \sim \{S^2 + (X_{нч}X_{нч}{}^{\mathbb{T}})(a^0 - \hat{a}^0)^2\}^{-\frac{N}{2}}$,

$S^2 \triangleq (X_ч - \hat{a}^0 X_{нч})(X_ч - \hat{a}^0 X_{нч})^{\mathbb{T}} \equiv \hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}^{\mathbb{T}}$,

где $X_ч$, $X_{нч}$ – матрицы экспериментальных данных; $\hat{a}^0$ – оценка параметра a^0 ;

Число степеней свободы величины $a^0 - \hat{a}^0$ равно

$$\nu_a = N - 1. \qquad (6.75)$$

С уровнем значимости α **полуразмах** $l(a^0)$ **симметричного доверительного интервала** $(\hat{a}^0 - l(a^0) \quad \hat{a}^0 + l(a^0))$ для параметра a^0 :

$$l(a^0) \equiv l(a^0, X_ч, X_{нч}, \nu_a, \alpha) = \sqrt{\frac{S_a^2}{N(X_{нч}X_{нч}^t)}} h^t_{1-\alpha/2}(\nu_a),$$

где ν_a определена равенством (6.75), $h^t_{1-\alpha/2}(\nu_a)$ – квантиль распределения Сьюдента с числом степеней свободы ν_a уровня $1 - \alpha/2$.

Маргинальные ФПРВ параметров модели a^1 **и** b^1 **.**

$$f(a^1|Y_ч, Y_{нч}, X_{нч}) \sim$$
$$\sim \{S^2 + (\delta_a)^2 (Y_{нч} Y_{нч}{}^{\mathbb{T}} - Y_{нч} X_{нч}{}^{\mathbb{T}} (X_{нч} X_{нч}{}^{\mathbb{T}})^{-1} X_{нч} Y_{нч}{}^{\mathbb{T}})\}^{-\frac{N-1}{2}},$$
$$f(b^1|Y_ч, Y_{нч}, X_{нч}) \sim$$
$$\sim \{S^2 + (\delta_b)^2 (X_{нч} X_{нч}{}^{\mathbb{T}} - X_{нч} Y_{нч}{}^{\mathbb{T}} (Y_{нч} Y_{нч}{}^{\mathbb{T}})^{-1} Y_{нч} X_{нч}{}^{\mathbb{T}})\}^{-\frac{N-1}{2}},$$

где

$$\delta_a = a^1 - \hat{a}^1, \quad \delta_b = b^1 - \hat{b}^1,$$
$$S^2 \triangleq (Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1) Z)(Y_ч - (\hat{a}^1, \hat{b}^1) Z)^{\mathbb{T}} \equiv \hat{\eta}\hat{\eta}^{\mathbb{T}}.$$

$X_ч$, $X_{нч}$ – матрицы экспериментальных данных; $(\hat{a}^1, \hat{b}^1)$ –оценки параметров a^1 , b^1 ;

Число степеней свободы величин $a^1 - \hat{a}^1$ и $b^1 - \hat{b}^1$ в распределении Стьюдента, задаваемых выражениями (6.70) и (6.74), равно

$$\nu = N - 2. \tag{6.76}$$

С уровнем значимости α **полуразмахи** $l(a^1)$ **и** $l(b^1)$ **симметричных доверительных интервалов** для параметров a^1 и b^1 :

$$l(a^1) \equiv l(a^1, Y_ч, Z, \nu, \alpha) = \sqrt{\frac{S^2}{NF_a}} h^t_{1-\alpha/2}(\nu),$$
$$l(b^1) \equiv l(b^1, Y_ч, Z, \nu, \alpha) = \sqrt{\frac{S^2}{NF_b}} h^t_{1-\alpha/2}(\nu),$$

где F_a и F_b определяются равенствами (6.62) и (6.71) соответственно, $h^t_{1-\alpha/2}(\nu)$ — квантиль распределения Сьюдента уровня $1-\alpha/2$ с числом степеней свободы ν , определенным равенством (6.76).

6.5. Определение вероятностей реализаций возможных сценариев поведения ДС на основе полученных оценок параметров

Определение вероятностей реализации возможных сценарием поведения ДС с использованием данных наблюдений за их состояниями проводилось путем
(а) K -кратной имитации значений $\{a_j^0, a_j^1\}_{j=1}^K$ параметров a^0 и a^1 с использованием байесовских апостериорных законов распределения (6.37)—(6.76);
(б) определения соответствующего сценария изменения численностей изучаемых популяций для каждой пары значений a_j^0, a_j^1 с использованием информации, представленной на рис. 1-4;
(в) использования комбинаторного определения вероятности (определения Лапласа).
Имитация значений $\{a_j^0, a_j^1\}_{j=1}^K$ проводилась в два этапа.

Этап 1. Имитация реализации $\{y_j^0, y_j^1\}_{j=1}^K$ для двух независимых равномерно распределенных на отрезке $(0,1)$ случайных величин с использованием машинного генератора псевдослучайных чисел.

Этап 2. Определение имитируемых реализаций $\{a_j^0, a_j^1\}_{j=1}^K$ по стандартной схеме с использованием байесовской апостериорнрй ФПРВ a^0 и байесовской апостериорнрй маргинальной ФПРВ a^1 и реализаций $\{y_j^0, y_j^1\}_{j=1}^K$.

Схема приведена в книге "Таха Х. Введение в исследование операций: в 2 т. М.: Мир, 1985."

Вычислительный эксперимент проводился при следующих значениях. параметров ДС (6.13): $a^0 = 1{,}100$, $a^1 = 0{,}900$, $b^1 = 0{,}250$. Число шаблонов $N = 8$.

Для нахождение точечных оценок $\hat{a}^0$, $\hat{a}^1$, $\hat{b}^1$ параметров a^0, a^1, b^1 на первом этапе моделирования с использованием модели (6.13) были получены два набора измерений нормированных численностей популяций нормальных и аномальных клеток $x(k)$, $y(k)$, $k = 1, \dots, 20$.

При моделировании измерений к детерминированным значениям $x(k)$, $y(k)$ были добавлены случайные возмущения.

Вектор случайных возмущении был получен из нормально распределенной генеральной совокупности случайных чисел с математическим ожиданием, равным нулю и с о средним квадратичным отклонением, равным 0.2, реализованной с помощью генератора случайных чисел системы Matlab.

Далее с использованием генератора случайных чисел были получены случайные реализации параметров a^0 и a^1, распределенные по закону Стьюдента. Параметры распределений заданы соотношениями (6.37) и (6.70).

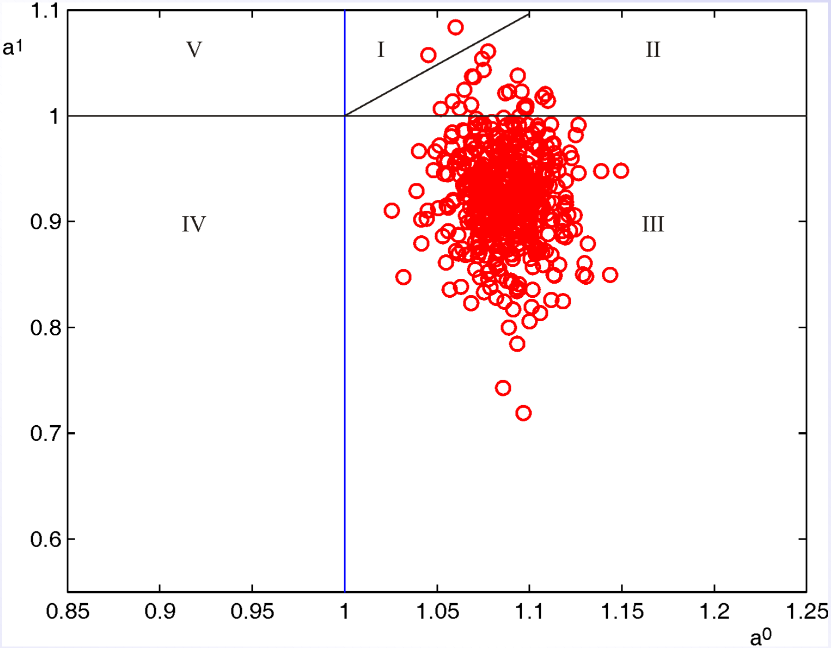

Рис. 1. Случайные реализации параметров a^0 и a^1

С использованием (6.21) и (6.23) были получены точечные оценки параметров a^0, a^1, b^1: $\hat{a}^0 = 1{,}088$, $\hat{a}^1 = 0,925$, $\hat{b}^1 = 0{,}260$.

Результаты моделирования частично представлены на рисунке и по ним получены следующие оценки вероятностей реализации сценариев: для первой области — $p_1 = 0,016$, для второй области — $p_2 = 0,04$, а для третьей области — $p_3 = 0,944$, $p_4 = p_5 = 0$.

Комментарии к оценке вероятностей реализации сценариев
Модель динамики

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{q}_{00}x,$$
$$\frac{dy}{dt} = \tilde{q}_{10}x + \tilde{q}_{11}y, \qquad (6.77)$$

где $x = X/X_0$, $y = Y/X_0$, $\mu = \dfrac{\tau^0}{\tau^1}$,
t – модельное время,

$\tilde{q}_{00} = (1 - A^0)(1 + M^0 - 2M^0\gamma^0) - 1$,

$\tilde{q}_{10} = 2(1 - A^0)M^0\gamma^0$,

$\tilde{q}_{11} = \mu(-A^1 + M^1 - A^1M^1)$,

$-1 < \tilde{q}_{00} < 1$, $\quad 0 < \tilde{q}_{10} < 2$, $\quad -\mu < \tilde{q}_{11} < \mu$.
$a^0 = q_{00}\Delta t + 1$, $\quad a^1 = q_{11}\Delta t + 1$, $\quad b^1 = q_{10}\Delta t$,

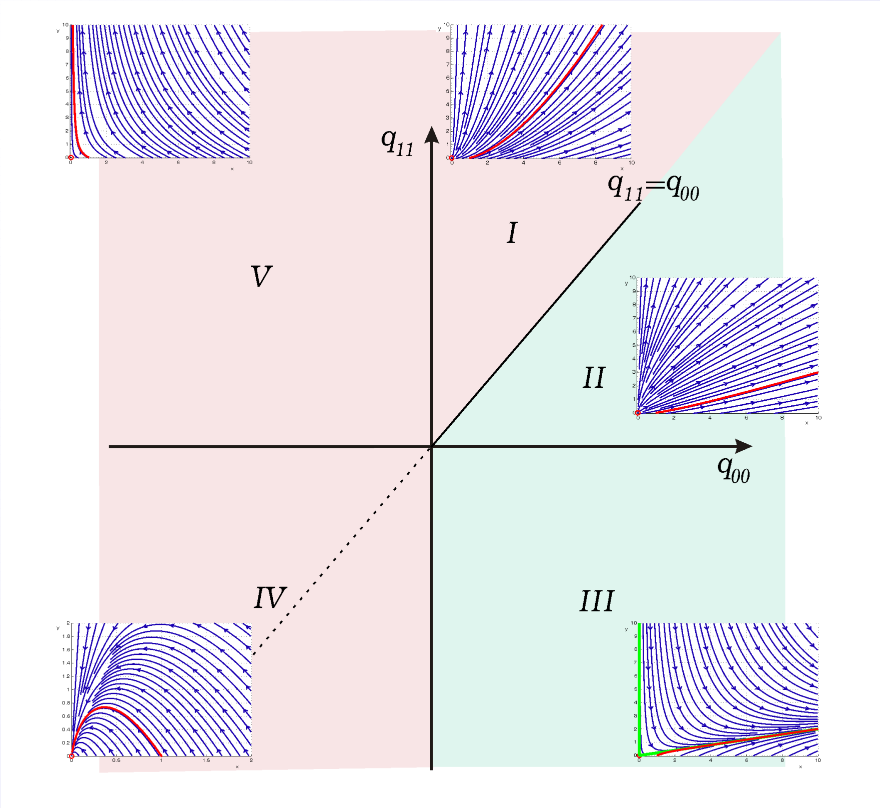

Рис. 2. Анализ различных сценариев развития

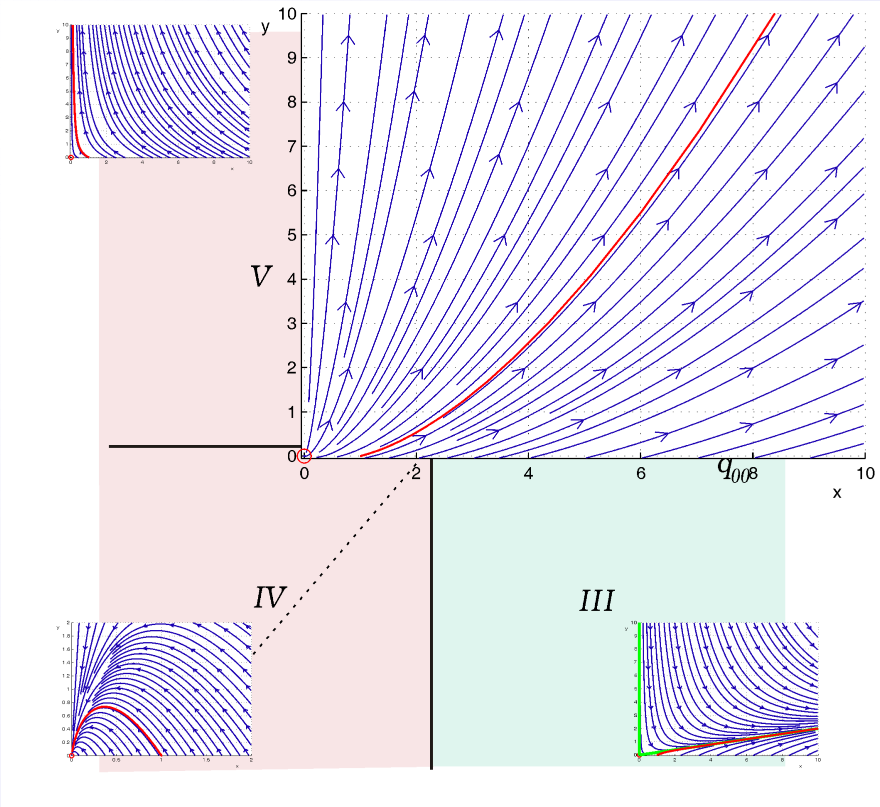

Рис. 3. Доминирование популяции аномальных клеток

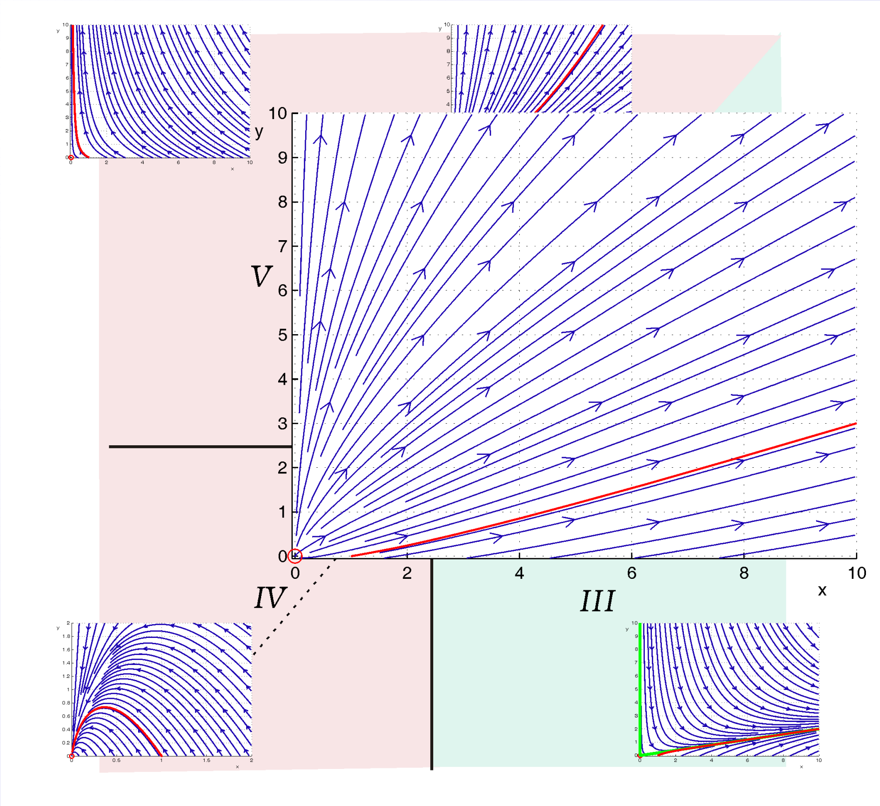

Рис. 4. Доминирование популяции нормальных клеток

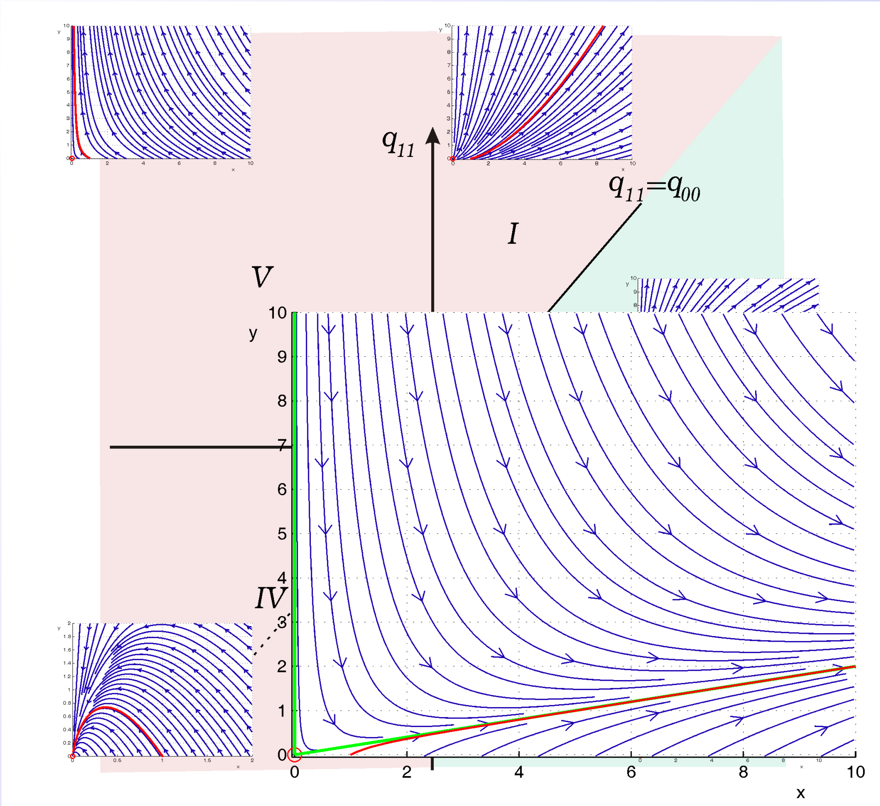

Рис. 5. Доминирование популяции нормальных клеток

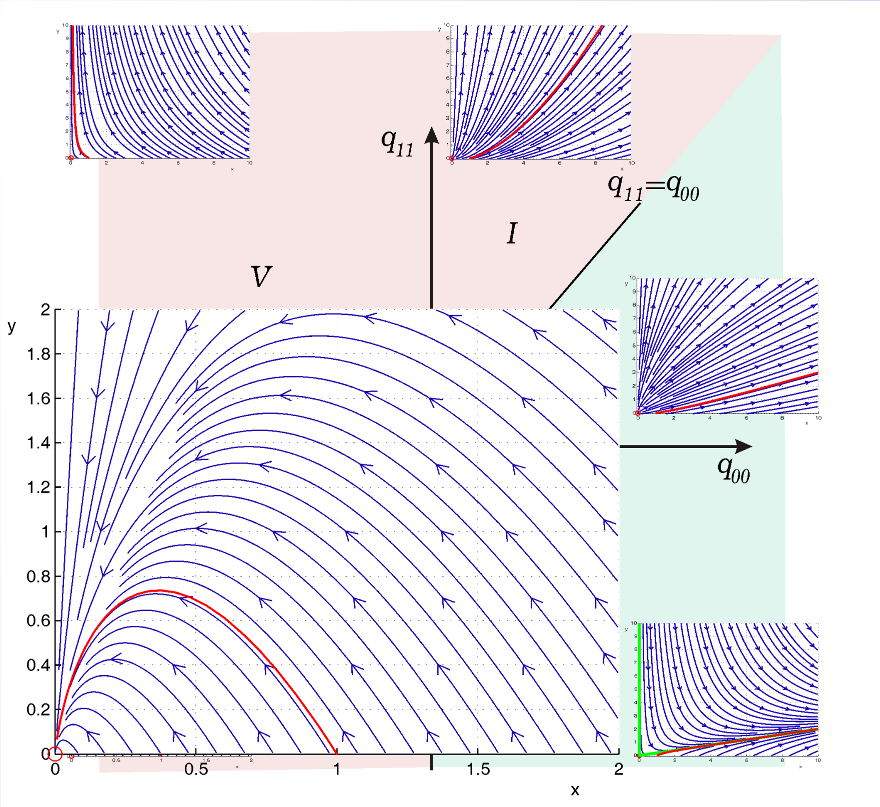

Рис. 6. Гибель популяционной системы

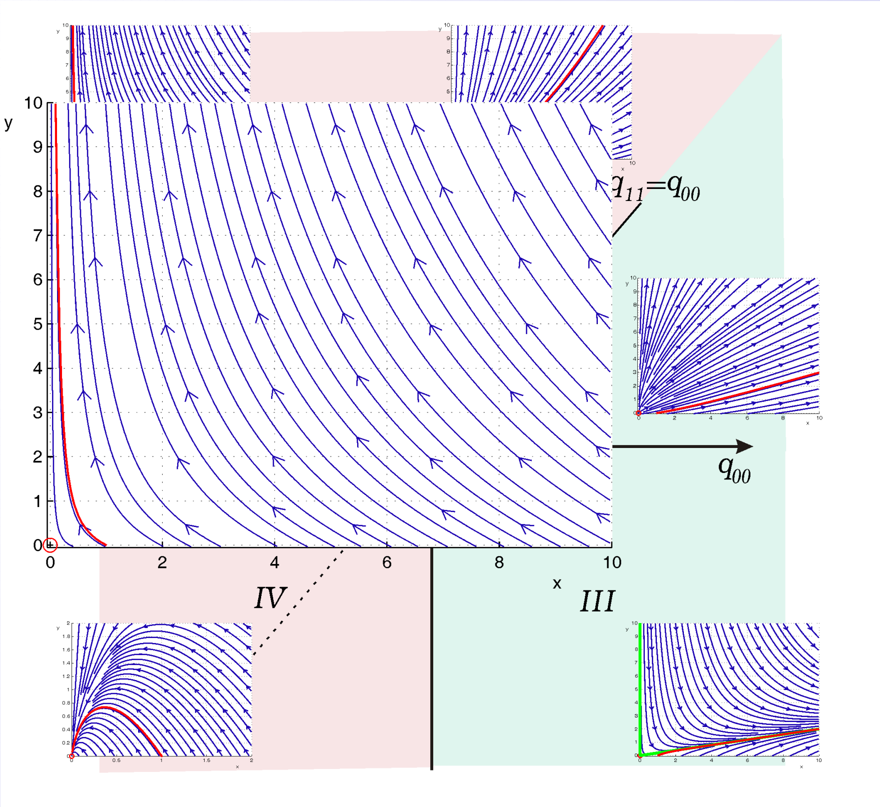

Рис. 7. Доминирование популяции аномальных клеток