ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

ФН-12. Магистры - 3 семестр

Лекция 8. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОСТОЯНИЯ. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ.

8.1. Случайные процессы

И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова **Случайные процессы**
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999г.

Классификация моделей объектов управления в зависимости от наличия или отсутствия неопределенностей в виде случайных величин или процессов:

- неопределенности отсутствуют – модели детерминированные;
- неопределенности присутствуют – модели стохастические.

Неопределенности описывают статистическими методами (законами распределений, числовыми характеристики СВ или СП).

Определение 8.1. **Случайной функцией** $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, называют *измеримое отображение* $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *пространства элементарных событий* Ω в $\mathbb{R}^n$, зависящее от параметра t.

Если параметр t интерпретируют как время, $T = [a, b]$ – отрезок числовой оси, то вместо термина „случайная функция“ используют термин „**случайный процесс**“ (СП).

При $n = 1$ случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, называют **скалярным СП**, при $n \geq 2$ его называют **векторным СП** (**n -мерным СП**).

Запишем векторный (n -мерный) СП $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, в виде
$\xi(t,\omega) = (\xi_1(t,\omega) \quad \ldots \quad \xi_n(t,\omega))^{\mathbb{T}}$.

Скалярные СП $\xi_i(t,\omega)$, $t \in T$, называют его **координатными СП**.

Сечением СП называется *случайный вектор* $\xi(\omega)\Big|_{t=t^*}$, при $t^* \in T$ (фиксируем время t).

Траекторией (реализацией) СП называется (неслучайная) функция параметра t $\xi(t,\omega)\Big|_{\omega=\omega^*}$, при $\omega^* \in \Omega$ (фиксируем элементарное событие ω).

Закон распределения вероятностей *случайного вектора* $\xi(\omega)\Big|_{t=t^*}$, $t^* \in T$ (сечения СП) называют **одномерным законом распределения СП** $\xi(t,\omega)$, $t \in T$.

ФРВ случайного вектора $\xi(t,\omega)$

$$F_\xi(x|t) \triangleq \mathbf{P}[\xi(t,\omega) < x] = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(y|t)\,dy,$$

где

$$x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\int_{-\infty}^{x} f_\xi(y|t)\,dy \;\triangleq \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_\xi(y_1,\dots,y_n|t)\,dy_1 \dots dy_n,$$

называют **одномерной ФР СП** $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, функцию $f_\xi(x|t)$ – называют **одномерной ФПРВ СП** $\xi(t,\omega)$, $t \in T$ (может быть обобщенной).

Обобщенная плотность распределения вероятностей вводится для дискретного случайного вектора $\xi(\omega)$ с множеством возможных значений $\{x_{(k)}\}_{k=1}^{N} \subset \mathbb{R}^n$, $N \leq \infty$ и имеет вид

$$f_\xi(x) = \sum_{k=1}^{N\leq\infty} \mathbf{P}[\xi(\omega) = x_{(k)}]\delta(x - x_{(k)}),$$

где $\delta(x) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_n)$ – δ *-функция Дирака.*

Конечномерной (N -мерной) ФРВ СП $\xi(t,\omega)$, $t \in T$ называется ФРВ совокупности из N случайных n -мерных векторов $\{\xi(t_k,\omega)\}_{k=1}^{N}$, где t_k фиксированные значения параметра $t \in T$, $k = \overline{1,\ N}$

$$F_\xi(x_{(1)},\ldots,x_{(N)}|t_1,\ldots,t_N) \triangleq \mathbf{P}[\xi(t_k,\omega) < x_{(k)},\ k = \overline{1,\ N}\,] = \\ = \int_{-\infty}^{x(1)} \ldots \int_{-\infty}^{x(N)} f_\xi(y_{(1)},\ldots,y_{(N)}|t_1,\ldots,t_N)\,dy_{(1)}\ldots dy_{(N)}, \tag{8.1}$$

Здесь $f_\xi(x_{(1)},\ldots,x_{(N)}|t_1,\ldots,t_N)$ — **конечномерная (N -мерная) функция плотности вероятностей случайного процесса** $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, (возможно обобщенная).

Функции

$$f_\xi(x_{(1)},\ldots,x_{(N)}|t_1,\ldots,t_N), \quad F_\xi(x_{(1)},\ldots,x_{(N)}|t_1,\ldots,t_N)\,,$$

задают **конечномерный (N -мерный) закон распределения случайного процесса** $\xi(t,\omega)$, $t \in T$.

СП $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, можно рассматривать как совокупность всех его возможных сечений.

В общем случае СП $\xi(t,\omega)$, $t \in T$ представим несчетной совокупностью своих сечений и не может быть полностью определенным (построить совместный закон распределения всех его сечений невозможно).

Определение 8.2. Случайные процессы $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, и $\eta(t,\omega)$, $t \in T$, определенные на одном и том же множестве T, в одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ и принимающие значения в одном и том же измеримом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B})$, называют **стохастически эквивалентными**, если $\mathbf{P}[\xi(t,\omega) \neq \eta(t,\omega)] = 0$ для любого $t \in T$.

Определение 8.3. **Математическим ожиданием** векторного **случайного процесса** $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, называют неслучайную вектор-функцию $m_\xi(t)$, значение которой при каждом фиксированном $t \in T$ равно *математическому ожиданию случайного вектора* $\xi(t,\omega)$, являющегося сечением исходного случайного процесса, соответствующего рассматриваемому значению t.

$$\mathbf{M}[\xi(t,\omega)] = \mathbf{M}\left[\begin{pmatrix} \xi_1(t,\omega) \\ \vdots \\ \xi_n(t,\omega) \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathbf{M}[\xi_1(t,\omega)] \\ \vdots \\ \mathbf{M}[\xi_n(t,\omega)] \end{pmatrix} \quad t \in T.$$

Здесь

$$m_k(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x_k f_\xi(x|t)\,dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_k \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_\xi(x_1,\ldots,x_n|t) \prod_{m=1 \wedge m\neq k}^{n} dx_m \right\} dx_k = \mathbf{M}[\xi_k(t,\omega)].$$

Математическое ожидание $m_\xi(t)$ случайного процесса $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, можно интерпретировать как его усредненную траекторию.

Определение 8.4. **Ковариационной матрицей (матрицей ковариаций)** n-мерного **случайного процесса** $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, называют неслучайную матричную функцию $\Sigma_\xi(t)$ типа $n \times n$, которая при каждом фиксированном $t \in T$ представляет собой *ковариационную матрицу случайного вектора* $\xi(t,\omega)$, являющегося сечением исходного случайного процесса, соответствующего рассматриваемому значению t.

Если $f_\xi(x|t)$ — одномерная функция плотности вероятностей n-мерного случайного процесса $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, то

$$\begin{aligned} &\Sigma_\xi(t) \triangleq \mathbf{M}[(\xi(t,\omega) - m_\xi(t))(\xi(t,\omega) - m_\xi(t))^{\mathbb{T}}] \equiv \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^n} (x - m_\xi(t))(x - m_\xi(t))^{\mathbb{T}} f_\xi(x|t)\,dx, \end{aligned} \tag{8.2}$$

где

$$\xi(t,\omega) \triangleq \begin{pmatrix} \xi_1(t,\omega) \\ \vdots \\ \xi_n(t,\omega) \end{pmatrix}, \quad m_\xi(t) \triangleq \begin{pmatrix} m_1(t) \\ \vdots \\ m_n(t) \end{pmatrix}, \quad x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{8.3}$$

$$\Sigma_\xi(t) = (\Sigma_{ij}(t)) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),$$

$$\Sigma_{ij}(t) = \mathbf{M}[(\xi_i(t,\omega) - m_i(t))(\xi_j(t,\omega) - m_j(t))] = \Sigma_{ji}(t),$$

Ковариационная матрица n -мерного случайного процесса $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, является симметрической. Ее диагональные элементы имеют вид

$$\Sigma_{kk}(t) = \mathbf{M}[(\xi_k(t,\omega) - m_k(t))^2] = \mathbf{D}[\xi_k(t,\omega)] = \sigma^2_{\xi_k}(t), \quad k = \overline{1,\ N}.$$

При каждом фиксированном $t \in T$ значение $\Sigma_{kk}(t)$ равно *дисперсии скалярной случайной величины*, являющейся k -й компонентой сечения исходного случайного процесса, соответствующего рассматриваемому значению t .

Определение 8.5. Дисперсия $\sigma^2_\xi(t)$ n -мерного СП $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, равна следу $\mathrm{Sp}\Sigma_\xi(t)$ ковариационной матрицы векторного СП:

$$\sigma^2_\xi(t) = \mathbf{D}[\xi(t,\omega)] \triangleq \sum_{k=1}^{n} \sigma^2_{\xi_k}(t),$$

$$\sigma^2_\xi(t) \equiv \mathbf{M}[(\xi(t,\omega) - m_\xi(t))^{\mathbb{T}}(\xi(t,\omega) - m_\xi(t))].$$

Определение 8.6. **Ковариационной функцией** n-мерного СП $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, называют матричную функцию $K_\xi(t_1,t_2)$ типа $n \times n$ двух скалярных переменных t_1 и t_2, значение которой при фиксированных $t_1, t_2 \in T$ равно **ковариации двух случайных векторов** $\xi(t_1,\omega)$ и $\xi(t_2,\omega)$, определяемой следующим образом:

$$K_\xi(t_1,t_2) \triangleq \mathbf{M}[(\xi(t_1,\omega) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2,\omega) - m_\xi(t_2))^{\mathbb{T}}] =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (x_{(1)} - m_\xi(t_1))(x_{(2)} - m_\xi(t_2))^{\mathbb{T}} f_\xi(x_{(1)}, x_{(2)} | t_1, t_2)\, dx_{(1)} dx_{(2)},$$

где $x_{(k)} = \begin{pmatrix} x_{1(k)} & \ldots & x_{n(k)} \end{pmatrix}^{\mathbb{T}} \in \mathbb{R}^n$ и $f_\xi(x_{(1)}, x_{(2)} | t_1, t_2)$ – двумерная ФПРВ (возможно обобщенная) исходного СП.

На пересечении i-й строки и j-го столбца ковариационной функции $K_\xi(t_1,t_2)$ n-мерного СП $\xi(t,\omega)$, $t\in T$, находится скалярная функция

$$K_{\xi_i\xi_j}(t_1,t_2)\equiv \mathbf{M}[(\xi_i(t_1,\omega)-m_i(t_1))(\xi_j(t_2,\omega)-m_j(t_2))]$$

двух скалярных переменных t_1 и t_2.
При фиксированных t_1, $t_2\in T$ значение $K_{\xi_i\xi_j}(t_1,t_2)$ равно *ковариации двух скалярных случайных величин* $\xi_i(t_1,\omega)$ и $\xi_j(t_2,\omega)$, обладающих математическими ожиданиями $m_i(t_1)$, $m_j(t_2)$ и являющихся i-й и j-й компонентами n-мерных случайных векторов $\xi(t_1,\omega)$ и $\xi(t_2,\omega)$ соответственно,

$$K_{\xi_i\xi_j}(t_1,t_2)=\mathbf{cov}[\xi_i(t_1,\omega),\xi_j(t_2,\omega)].$$

Пример 8.1. Пусть $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ — скалярные СВ с числовыми характеристиками: $\mathbf{M}[\alpha(\omega)] = m_\alpha$; $\mathbf{M}[\beta(\omega)] = m_\beta$; $\mathbf{D}[\alpha(\omega)] = \sigma_\alpha^2$; $\mathbf{D}[\beta(\omega)] = \sigma_\beta^2$; $\mathbf{cov}[\alpha(\omega), \beta(\omega)] = \kappa$.

Определить **математическое ожидание** и **ковариационную функцию** скалярного СП $\xi(t,\omega) \triangleq \alpha(\omega)\cos(\varphi t) + \beta(\omega)\sin(\varphi t), \quad t \in T = [0, \infty)$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ – постоянная.

Решение.

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}[\alpha(\omega)\cos(\varphi t) + \beta(\omega)\sin(\varphi t)] =$$

$$= \mathbf{M}[\alpha(\omega)]\cos(\varphi t) + \mathbf{M}[\beta(\omega)]\sin(\varphi t) = m_\alpha\cos(\varphi t) + m_\beta\sin(\varphi t).$$

Введем **центрированный случайный процесс**

$$\overset{\circ}{\alpha}(\omega) \triangleq \alpha(\omega) - m_\alpha; \quad \overset{\circ}{\beta}(\omega) \triangleq \beta(\omega) - m_\beta .$$

Тогда $\overset{\circ}{\xi}(t,\omega) = \xi(t,\omega) - m_\xi(t) = \overset{\circ}{\alpha}(\omega)\cos(\varphi t) + \overset{\circ}{\beta}(\omega)\sin(\varphi t)$.

$$K_\xi(t_1,t_2) = \mathbf{M}[\overset{\circ}{\xi}(t_1,\omega)\,\overset{\circ}{\xi}(t_2,\omega)] = \mathbf{M}[(\overset{\circ}{\alpha}(\omega))^2]\cos(\varphi t_1)\cos(\varphi t_2) +$$

$$+\mathbf{M}[\overset{\circ}{\alpha}(\omega)\,\overset{\circ}{\beta}(\omega)]\{\cos(\varphi t_1)\sin(\varphi t_2) + \sin(\varphi t_1)\cos(\varphi t_2)\} +$$

$$+\mathbf{M}[(\overset{\circ}{\beta}(\omega))^2]\sin(\varphi t_1)\sin(\varphi t_2) = \sigma_\alpha^2\cos(\varphi t_1)\cos(\varphi t_2) +$$

$$+\kappa\sin[\varphi(t_1+t_2)] + \sigma_\beta^2\sin(\varphi t_1)\sin(\varphi t_2).$$

Если СВ $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ являются *некоррелированными* $(\kappa = 0)$, $\sigma_\alpha^2 = \sigma^2 = \sigma_\beta^2$, то $K_\xi(t_1,t_2) = \sigma^2\cos[\varphi(t_2 - t_1)]$.

Теорема 1. Пусть $\xi(t,\omega)$, $t \in T$,– n -мерный СП, для которого существует ковариационная функция $K_\xi(t_1,t_2)$. Тогда

1) $K_\xi^{\mathbb{T}}(t_1,t_2) = K_\xi(t_2,t_1)$;

2) $K_\xi(t,t) = \Sigma_\xi(t)$;

3) *евклидова норма* ковариационной функции удовлетворяет неравенству Коши – Буняковского $\|K_\xi(t_1,t_2)\| \leq \sqrt{\sigma_\xi^2(t_1)\,\sigma_\xi^2(t_2)}$;

4) если $\varphi(t)$ – неслучайная n -мерная вектор-функция скалярного аргумента $t \in T$, $A(t)$ – матричная неслучайная функция типа $n \times n$, определенная на T , и $\eta(t,\omega) \triangleq A(t)\xi(t,\omega) + \varphi(t)$, $t \in T$, то $K_\eta(t_1,t_2) = A(t_1)\,K_\xi(t_1,t_2)\,A^{\mathbb{T}}(t_2)$;

5) если ковариационная функция $K_\xi(t_1,t_2)$ непрерывна в точках диагонали $t_1 = t_2$ квадрата $T \times T$, то она непрерывна в любой другой точке этого квадрата;

6) для любого $m \geq 1$ и для любого множества $\{t_k\}_{k=1}^m \in T$ точек отсчета квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Z_{(i)}^{\mathbb{T}} K_\xi(t_i,t_j) Z_{(j)}, Z_{(k)} = \begin{pmatrix} z_{1k} & \ldots & z_{nk} \end{pmatrix}^{\mathbb{T}} \in \mathbb{R}^n, \quad k = \overline{1,\, m},$$

(nm) переменных z_{ik} , $i = \overline{1,\, n}$, $k = \overline{1,\, m}$, является неотрицательно определенной.

Детерминированная математическая модель состояния описывает эволюцию объекта на отрезке времени $T=[0,\ t_*]$.

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = A(X,\alpha,t), \quad 0 \le t \le t_*, \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{8.4}$$

где $X(t)$ – вектор состояния, n-мерная вектор-функция; $\alpha \in \mathbb{R}^m$ – вектор параметров, не зависит от t; A – n-мерная векторная функция $n+m+1$ переменного, удовлетворяющая условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши (5.4); X_0 – начальное значение вектора состояния $X(t)$.

Основное свойство математической модели (5.4): скорость изменения состояния в любой момент времени $t \ge 0$ **определяется текущим** состоянием в этот момент времени и вектором параметров α, и **не зависит** от его предыстории.

В правую часть (5.4) добавим **случайные возмущения** в виде n-мерного СП $\eta(t,\omega)$, линейного относительно некоторого n-мерного СП $\xi(t,\omega)$, $t \in T$:

$\eta(X,\alpha,t,\omega) = B_*(X,\alpha,t)\xi(t,\omega), \quad t \in T = [0,\ t_*]$,

где B_* — *матричная функция* $n+m+1$ переменного типа $n \times n$.

Добавив $\eta(X, \alpha, t, \omega)$ в правую часть нормальной системы ОДУ (5.4), получим вектор состояния в виде n -мерного СП $X(t, \omega)$, $t \in T$.
Считаем начальное состояние n -мерным *случайным вектором* $X_0(\omega)$.
Если начальное состояние изучаемой системы задано ($X(0, \omega) \equiv X_0$), то $X(0, \omega)$ можно рассматривать как n -мерный случайный вектор, принимающий значение $X_0 \in \mathbb{R}^n$ с вероятностью 1 .

Стохастическая модель состояния

$$\begin{cases} \dot{X}(t, \omega) = A(X, \alpha, t) + B_*(X, \alpha, t)\xi(t, \omega), \quad 0 < t \leq t_*, \\ X(0, \omega) = X_0(\omega), \end{cases} \tag{8.5}$$

где $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [0, t_*]$ – n -мерный СП.

Справка.

Сходимость в смысле среднего квадратичного (СК-сходимость)

Определение 8.7. **Пределом** n-мерного СП $\xi(t,\omega) \triangleq (\xi_1(t,\omega) \ \ldots \ \xi_n(t,\omega))^{\mathbb{T}}$, $t \in T \subset \mathbb{R}$, при $t \to t_0 \in T$ в смысле СК-сходимости называют *случайный вектор* $\eta(\omega) \triangleq (\eta_1(\omega) \ \ldots \ \eta_n(\omega))^{\mathbb{T}}$ и обозначают $\lim\limits_{t\to t_0} \xi(t,\omega) = \eta(\omega)$, если существует предел

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{M}[||\xi(t,\omega) - \eta(\omega)||^2] = 0,$$

где $||\xi(t,\omega) - \eta(\omega)|| \triangleq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} [\xi_k(t,\omega) - \eta_k(\omega)]^2}$ — **евклидова норма** n-мерного СП $\xi(t,\omega) - \eta(\omega)$, $t \in T$.

Норма для анализа СП:

$$||\xi(t,\omega)||_{ck} \triangleq \sqrt{\mathbf{M}[||\xi(t,\omega)||^2]} \equiv \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} x^{\mathbb{T}} x f_\xi(x \mid t)\, dx}.$$

Рассматривать будем только СП, для которых **СК-норма** является конечной. СП, удовлетворяющие этому условию, называют **СП второго порядка**.

Определение 8.8. Скалярный СП второго порядка $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, называют **непрерывным в точке** $\tau \in T$, если существует предел $\lim\limits_{t \to \tau} \mathbf{M}[|\xi(t,\omega) - \xi(\tau,\omega)|^2] = 0$,
или $\lim\limits_{t \to \tau} \|\xi(t,\omega) - \xi(\tau,\omega)\|^2_{ck} = 0$.

Определение 8.9. Если скалярный СП второго порядка $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, является непрерывным в каждой точке $t \in T$, то его называют **непрерывным на множестве** T .

Теорема 2. Скалярный *СП второго порядка* $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, **непрерывен** на T тогда и только тогда, когда на T непрерывно его *математическое ожидание* $m_\xi(t)$, а на $T \times T$ непрерывна его *ковариационная функция* $K_\xi(t,\tau)$. $\sharp$

Определение 8.10. *Скалярный СП второго порядка* $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, называют **дифференцируемым в точке** $t_0 \in T$, если существует случайная величина $\dot\xi(t_0,\omega)$, для которой

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{M}\Big[\Big|\frac{\xi(t,\omega)-\xi(t_0,\omega)}{t-t_0} - \dot\xi(t_0,\omega)\Big|^2\Big] = 0. \qquad (8.6)$$

Определение 8.11. Если скалярный СП второго порядка $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, является дифференцируемым в точке $t_0 \in T$, то СВ $\dot\xi(t_0,\omega)$ называют его **производной в** этой **точке**.

Определение 8.12. Если скалярный СП второго порядка $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, является дифференцируемым в каждой точке открытого множества $T_0 \subset T$, то его называют **дифференцируемым на множестве** T_0, а случайный процесс $\dot\xi(t,\omega)$, $t \in T_0$, — **производной случайного процесса** $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, **на множестве** T_0.

СП задающий возмущения должен удовлетворять следующим условиям:

Теорема 3. Пусть n -мерный случайный процесс $\xi(t,\omega)$, $t \in T = [0,\, t_*]$, удовлетворяет условиям:
1) $\mathbf{M}[\xi(t,\omega)] = 0$, $t \in T$;
2) для любых различных $t_1,\, t_2 \in T$ *сечения* $\xi(t_1,\omega)$ и $\xi(t_2,\omega)$ являются независимыми случайными векторами;
3) $\mathbf{M}[\xi^{\mathbb{T}}(t,\omega)\xi(t,\omega)] < C < \infty$, $t \in T$.
Тогда

$$\mathbf{M}[\xi^{\mathbb{T}}(t,\omega)\xi(t,\omega)] = 0, \quad t \in T. \sharp$$

1. $\mathbf{M}[\xi(t,\omega)] = 0, \quad t \in T$. Если $m(t) = \mathbf{M}[\xi(t,\omega)] \neq 0$ на T , то введем *центрированный случайный процесс* $\overset{\circ}{\xi}(t,\omega) \triangleq \xi(t,\omega) - m(t)$, $t \in T$, с нулевым математическим ожиданием, преобразуем (5.5) к виду

$$\begin{cases} \dot{X}(t,\omega) = A_*(X,\alpha,t) + B_*(X,\alpha,t)\overset{\circ}{\xi}(t,\omega), \quad 0 < t \le t_*, \\ X(0,\omega) = X_0(\omega), \\ A_*(X,\alpha,t) \equiv A(X,\alpha,t) + B_*(X,\alpha,t)m(t). \end{cases}$$

2. Два любые **сечения** процесса случайных возмущений должны быть **независимы**, т.е. для любых различных $t_1, t_2 \in T$ случайные векторы $\xi(t_1, \omega)$ и $\xi(t_2, \omega)$ должны быть *независимы*. Сохранение *основного свойства* исходной математической модели (5.4)

3. Процесс случайных возмущений $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ должен быть непрерывным. Сохранение непрерывности **производной СП** $X(t, \omega)$, $t \in T$. Требование означает, что должна существовать ограниченная *дисперсия*: $\mathbf{M}[\xi^{\mathbb{T}}(t, \omega)\xi(t, \omega)] < C < \infty$, $t \in T$ (предполагаем, что СП $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, центрирован).

В результате слишком жестких требований, предъявляемых к процессу случайных возмущений, стохастическая модель (5.5) не дает никакой новой информации по сравнению с исходной детерминированной моделью (5.4).

Не существует ненулевых случайных процессов с независимыми сечениями и ограниченной дисперсией. Случайная величина с нулевой дисперсией является детерминированной.

Основополагающим при построении стохастических моделей состояния является *отказ от требования ограниченности дисперсии* процесса случайных возмущений.

Ковариационная функция СП $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, имеет следующий вид (в силу независимости сечений СП):

$$K_\xi(t_1,t_2) = 2\pi\Gamma\delta(t_2 - t_1), \quad t_1,\, t_2 \in T, \tag{8.7}$$

где $\delta(t)$ – δ*-функция Дирака*, а $\Gamma \in M_n(\mathbb{R})$ – постоянная матрица. Следовательно, СП $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, с независимыми сечениями является *белым шумом*, с постоянной и не зависящей от частоты ν *спектральной плотностью* $s_\xi(\nu) \equiv \Gamma$.

Матрицу Γ называют **матрицей спектральных интенсивностей** СП $\xi(t,\omega)$, $t \in T$. Матрица Γ – положительно-определенная и симметричная матрица. Существует квадратная невырожденная матрица $\beta \in M_n(\mathbb{R})$, такая, что $\Gamma = \beta\beta^{\mathbb{T}}$.

Пусть относительно процесса случайных возмущений $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, приняты самые общие допущения, но полоса спектра каждой его компоненты $\xi_k(t,\omega)$, $t \in T$, содержит весь спектр частот компоненты $x_k(t)$ вектора состояния $X(t)$. Для каждого $k = \overline{1,\, n}$ спектр СП $\xi_k(t,\omega)$, $t \in T$, считаем постоянным в пределах ограниченного спектра k-й компоненты вектора состояния.

Процесс случайных возмущений для вектора состояния $X(t)$ детерминированной модели состояния (5.4) есть белый шум.

СП $\xi(t,\omega)$ имеет $\mathbf{M}[\xi^{\mathbb{T}}(t,\omega)\xi(t,\omega)] = 0, \quad t \in T$, и ковариационную функцию (5.7).
Рассмотрим n-мерный СП, являющийся белым шумом:
$\varepsilon(t,\omega) \triangleq \beta^{-1}\xi(t,\omega), \quad t \in T$.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}[\varepsilon(t,\omega)] = \beta^{-1}\mathbf{M}[\xi(t,\omega)] = \mathbf{O}, \quad \mathbf{t} \in \mathbf{T}, \\
&K_{\varepsilon}(t_1,t_2) = \mathbf{M}[\beta^{-1}\xi(t,\omega)(\beta^{-1}\xi(t,\omega))^{\mathbb{T}}] = \beta^{-1}K_{\xi}(t_1,t_2)(\beta^{-1})^{\mathbb{T}} = \\
&= 2\pi\delta(t_2-t_1)\beta^{-1}\Gamma(\beta^{-1})^{\mathbb{T}} = 2\pi\delta(t_2-t_1)I_n, \quad t_1,\ t_2 \in T.
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Положим $t_* = \infty$ ($T = [0,\infty)$), СП $\varepsilon(t,\omega)$, будем рассматривать как производную n-мерного *винеровского процесса* $w(t,\omega)$, $t \in T$, с *коэффициентом диффузии* $\sigma^2 = 1$.

$$\xi(t,\omega) = \beta\frac{dw(t,\omega)}{dt}, \quad t \in T = [0,\infty).$$

Полагая в (5.5), что $B(X,\alpha,t) = B_*(X,\alpha,t)\beta$, запишем стохастическую модель состояния:

$$\begin{cases}
\dfrac{dX(t,\omega)}{dt} = A(X,\alpha,t) + B(X,\alpha,t)\dfrac{dw(t,\omega)}{dt}, \\
X(0,\omega) = X_0(\omega).
\end{cases} \tag{8.9}$$

Определение 8.13. *n-мерный СП $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [0, \infty)$, называют* **винеровским процессом (процессом броуновского движения)** *выходящим из* $\mathbf{O}$, *если выполнены три условия:*
1) $\xi(0, \omega) \equiv \mathbf{O}$;
2) $\forall N > 1,\ t_k \in T,\ k = \overline{1, N}\ l|\ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N$, *случайные векторы* $\xi(t_1, \omega)$, $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega), \ldots, \xi(t_N, \omega) - \xi(t_{N-1}, \omega)$ *являются независимыми;*
3) $\forall t_1, t_2 \in T,\ 0 \le t_1 < t_2$, *СВ* $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega) \to N(0, \Sigma)$, *где* $\Sigma = (t_2 - t_1)\sigma^2 I_n$ *– ковариационная матрица,* $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ *– единичная матрица.*

Винеровский процесс не является *дифференцируемым* в смысле сходимости в среднем квадратичном, имеет непрерывные *траектории* в смысле среднего квадратичного.

Дифференциал СП – главная линейная часть его приращения в смысле среднего квадратичного.

Стохастическую модель состояния можно записать (5.9) в виде

$$\begin{cases} dX(t, \omega) = A(X, \alpha, t)\, dt + B(X, \alpha, t)\, dw(t, \omega), \\ X(0, \omega) = X_0(\omega), \end{cases} \tag{8.10}$$

8.2. Оценивание параметров

Задача оценивания неизвестных параметров, входящих в **стохастическую модель состояния**, по дискретным значениям его **выборочных реализаций**. Реально наблюдаемые изменения состояния рассматриваемого объекта должны удовлетворять стохастической модели состояния (СМС).

Запишем модель (5.9) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t,\omega)}{dt} = F(X, \alpha + \Pi\xi(t,\omega)), \\ X(0,\omega) \equiv X_0, \end{cases} \tag{8.11}$$

где $\xi(t,\omega)$, $t \in T = [0,\infty)$, – m -мерный *белый шум* с единичной *матрицей спектральных интенсивностей*, $\Pi \in M_{Lm}(\mathbb{R})$ – в общем случае неизвестная матрица, L – размерность вектора параметров.

Детерминированная модель состояния (ДМС)

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X, \alpha), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{8.12}$$

устойчива к возмущениям $\Pi\xi(t, \omega)$, $t \in T = [0, \infty)$, вектора параметров α, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists t_* \in T \mid \|X(t, \omega) - X(t)\|_{ck} < \varepsilon$ при $t \geq t_*$, где случайный процесс $X(t, \omega)$, $t \in T$, задан стохастической моделью состояния (5.11).

Введение в ДМС изучаемого объекта случайных возмущений в виде белого шума может привести к нарушению ее устойчивости. ДМС, не обладающие устойчивостью к возмущениям входящих в нее параметров, не рассматриваем.

Ограничимся ДМС (5.12), обладающей устойчивостью к „малым“ возмущениям вектора параметров α. В стохастической модели состояния (СМС), (в „механизм“ случайных возмущений) исходной ДМС (5.12) введем „малый параметр“ (масштабирующий коэффициент).

Стохастическая модель состояния имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t,\omega)}{dt} = F(X, \alpha + \varepsilon \Pi \xi(t,\omega)), \\ X(0,\omega) \equiv X_0, \end{cases}$$

где $\xi(t,\omega)$, $t \in T = [0, \infty)$, — m-мерный белый шум с единичной матрицей спектральных интенсивностей, $\Pi \in M_{Lm}(\mathbb{R})$ – неизвестная матрица, L – размерность вектора параметров, ε – малый положительный параметр.

Пусть ДТМ (5.12) соответствует СМС вида

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t,\omega)}{dt} = F(X,\alpha) + \varepsilon\sigma(X,\alpha)\,\Gamma\,\dfrac{dw(t,\omega)}{dt}, \\ X(0,\omega) \equiv X_0, \end{cases} \tag{8.13}$$

где $w(t,\omega)$, $t \in T$, — m-мерный винеровский процесс с коэффициентом диффузии $\sigma^2 = 1$, ε — малый положительный параметр, $\Gamma \in M_{rm}(\mathbb{R})$ — неизвестная матрица.

Теорема 4. Пусть $F(X,\alpha) = (F_1(X,\alpha) \ \ldots \ F_n(X,\alpha))^{\mathbb{T}}$ и $\sigma(X,\alpha) = (\sigma_{ij}(X,\alpha)) \in M_{nr}(\mathbb{R})$. Если для любых $i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,r}$ скалярные функции $F_i(X,\alpha)$ и $\sigma_{ij}(X,\alpha)$ в некоторой окрестности точки $(X,\alpha) \in \mathbb{R}^{n+L}$ имеют ограниченные частные производные до второго порядка включительно по всем компонентам вектора $X = (x_1 \ \ldots \ x_n)^{\mathbb{T}}$, то решение *стохастической задачи Коши* (5.13) может быть представлено в виде

$$X(t,\omega) = X_0(t) + \varepsilon X_1(t,\omega) + R(t,\omega), \quad t \geq 0.$$

Здесь
$\sup_{t\in T}\sqrt{\mathbf{M}[\|R(t,\omega)\|^2]} \leq C\varepsilon^2 \quad (0 < C < \infty)$,
вектор-функция $X_0(t)$ определена исходной ДМС (5.12):

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) = F(X_0,\alpha), \\ X_0(0) = X_0, \end{cases}$$

n-мерный случайный процесс $X_1(t,\omega)$, $t \geq 0$, является решением стохастической задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dX_1(t,\omega)}{dt} = B(X_0(t),\alpha)X_1(t,\omega) + \sigma(X_0(t),\alpha)\Gamma\dfrac{dw(t,\omega)}{dt}, \\ X_1(0,\omega) \equiv \mathbf{O}, \end{cases}$$

где $B(X,\alpha) \triangleq (\partial F_i(X,\alpha)/\partial x_j)$. $\sharp$

Если $X(t,\omega)$, $t \in T$, – решение стохастической задачи Коши (5.13), а $X_0(t)$ удовлетворяет исходной ДМС (5.12), то в соответствии с теоремой 4 **процесс случайных отклонений**

$$\delta X(t,\omega) \triangleq X(t,\omega) - X_0(t), \quad t \in T, \tag{8.14}$$

с точностью до величин порядка ε^2 должен удовлетворять СМС

$$\begin{cases} d\delta X(t,\omega) = B(X_0(t),\alpha)\,\delta X(t,\omega)dt + \\ \qquad\qquad + \sigma(X_0(t),\alpha)Qdw(t,\omega), \quad t > 0, \\ \delta X(0,w) \equiv \mathbf{O}, \end{cases} \tag{8.15}$$

где $Q = \varepsilon\Gamma$.

Для описания отклонений реальных значений исследуемого процесса от решения уравнений исходной ДМС будем использовать линейную СМС.

В (5.15)

$$\mathbf{M}[\delta X(t,\omega)] \equiv \mathbf{O}, \tag{8.16}$$

т.к., согласно свойствам винеровского процесса и математического ожидания:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{M}[\delta X(t,\omega)]}{dt} = B(X_0(t),\alpha)\mathbf{M}[\delta X(t,\omega)], \\ \mathbf{M}[\delta X(0,\omega)] = \mathbf{O}. \end{cases}$$

Следовательно, с точностью до величин порядка ε^2 имеет место равенство $\mathbf{M}[X(t,\omega)] = X_0(t), \quad t \in T.$

Ковариационная матрица СМС (5.15) $\Sigma(t\,|\,\alpha, G)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Sigma(t\,|\,\alpha, G)}{dt} = B(X_0(t),\alpha)\,\Sigma(t\,|\,\alpha, G) + \Sigma(t\,|\,\alpha, G)\,B^{\mathbb{T}}(X_0(t),\alpha) + \\ \qquad\qquad + \sigma(X_0(t),\alpha)G\sigma^{\mathbb{T}}(X_0(t),\alpha), \quad t > 0, \\ \Sigma(0\,|\,\alpha, G) = \Theta, \end{cases} \tag{8.17}$$

где $G \triangleq QQ^{\mathbb{T}}$.

Процесс случайных отклонений $\delta X(t,\omega)$, $t \in T$, с точностью ε^2, является *гауссовским марковским процессом*, зависит от L-мерного неизвестного вектора параметров α и неизвестной матрицы $G \triangleq QQ^{\mathbb{T}} = \varepsilon^2\Gamma\Gamma^{\mathbb{T}}$.

Для оценивания α и G располагаем данными наблюдений.

8.3. Единственность решения задачи параметрической идентификации стохастической модели состояния

СМС (5.15) определяет n-мерный процесс (*гауссовский и марковский*) случайных отклонений $\delta X(t,\omega)$, $t \in T = [0,\infty)$, с N-мерной *ФПРВ*:

$$\begin{aligned} & f_N(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(N)} \,|\, t_1, t_2, \ldots, t_N, \alpha, G) = \\ & = f_1(X_{(1)} \,|\, t_1, \alpha, G) \prod_{i=2}^{N} f(X_{(i)} \,|\, X_{(i-1)}, \alpha, G), \end{aligned} \tag{8.18}$$

где *условная ФПРВ* равна

$$\begin{aligned} & f(X_{(i)} \,|\, X_{(i-1)}, \alpha, G) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma(t_i \,|\, t_{i-1}, \alpha, G)}} \times \\ & \times \exp\Big(-\tfrac{1}{2}(X_{(i)} - m(t_i \,|\, t_{i-1}, \alpha) + X_0(t_{i-1}))^{\mathbb{T}} \times \\ & \times \Sigma^{-1}(t_i \,|\, t_{i-1}, \alpha, G)\, (X_{(i)} - m(t_i \,|\, t_{i-1}, \alpha) + X_0(t_{i-1}))\Big). \end{aligned} \tag{8.19}$$

Условное математическое ожидание, согласно (5.14)-(5.17) имеет вид: $m(t_i \,|\, t_{i-1}, \alpha) \triangleq \mathbf{M}[\delta X(t_i,\omega) \,|\, \delta X(t_{i-1},\omega) = X_{(i-1)} - X_0(t_{i-1})]$

Условное МО $m(t_i \,|\, t_{i-1}, \alpha)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dm(t \,|\, t_{i-1}, \alpha)}{dt} = B(X_0(t), \alpha)\, m(t \,|\, t_{i-1}, \alpha), \quad t_{i-1} < t \le t_i, \\ m(t_{i-1} \,|\, t_{i-1}, \alpha) = X_{(i)} - X_0(t_{i-1}). \end{cases}$$

Условная *ковариационная матрица*

$$\Sigma(t_i \,|\, t_{i-1}, \alpha, G) \triangleq \mathbf{cov}[\delta X(t_i, \omega) \,|\, \delta X(t_{i-1}, \omega) = X_{(i-1)} - X_0(t_{(i-1)})]$$

является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d\Sigma(t \,|\, t_{i-1}, \alpha, G)}{dt} = B(X_0(t), \alpha)\, \Sigma(t \,|\, t_{i-1}, \alpha, G) + \\ \qquad + \Sigma(t \,|\, t_{i-1}, \alpha, G)\, B^{\mathbb{T}}(X_0(t), \alpha) + \\ \qquad + \sigma(X_0(t), \alpha)\, G\, \sigma^{\mathbb{T}}(X_0(t), \alpha), \quad t_{i-1} < t \le t_i, \\ \Sigma(t_{i-1} \,|\, t_{i-1}, \alpha, G) = \Theta. \end{cases} \tag{8.20}$$

Обозначим

$$\Sigma(t_i \,|\, t_{i-1}, \alpha, G) = \Sigma_i(\alpha, G). \tag{8.21}$$

Ковариационные матрицы $\{\Sigma(t_i \,|\, t_{i-1}, \alpha, G)\}$ не зависят от $\{X_{(j)}\}$, представление N-мерной ФПРВ в виде (5.18), (5.19) означает, что n-мерные *случайные векторы* $\{X(t_i, \omega) - m(t_i | t_{i-1}, \alpha)\}$ являются *независимыми* и $\mathbf{M}[X(t_i, \omega) - m(t_i \,|\, t_{i-1}, \alpha)] = X_0(t_i), \quad i = \overline{1, N}$.

Единственность решения задачи оценивания неизвестного вектора параметров $\beta \in B$.

Определение 8.14. Функции $m(t \,|\, \alpha)$ **и** $\Sigma(t \,|\, \alpha)$ **разделяют точки множества** B на множестве $T_{(N)} = \{t_j\}_{j=1}^{N} \subset T$, если для любых $\alpha, \gamma \in B$, $\alpha \neq \gamma$, существует хотя бы одно значение $t_{\alpha\gamma} \in T_{(N)}$, такое, что $m(t_{\alpha\gamma} \,|\, \alpha) \neq m(t_{\alpha\gamma} \,|\, \gamma), \quad \Sigma(t_{\alpha\gamma} \,|\, \alpha) \neq \Sigma(t_{\alpha\gamma} \,|\, \gamma)$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \widetilde{l}(\alpha) &\triangleq \textstyle\sum_{j=1}^{N} \mathbf{M}[\ln f_n(\xi(t_j, \omega) \,|\, m(t_j \,|\, \alpha), \Sigma(t_j \,|\, \alpha))] = \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{N} \int_{G_j} (\ln f_n(x \,|\, m(t_j \,|\, \alpha), \Sigma(t_j \,|\, \alpha)))\, f_\xi(x \,|\, t_j; \beta)\, dx. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Здесь f_n –ФПРВ нормального СП:

$$\begin{aligned} f_n(x \,|\, m(t \,|\, \alpha), \Sigma(t \,|\, \alpha)) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma(t|\alpha)}} \times \\ &\times \exp\Big(-\frac{1}{2}(x - m(t \,|\, \alpha))^{\mathbb{T}} \Sigma^{-1}(t \,|\, \alpha)\,(x - m(t \,|\, \alpha))\Big), \end{aligned} \tag{8.23}$$

$f_\xi(x \,|\, t; \beta)$ – неизвестная истинная одномерная ФПРВ СП.

Теорема 5. Пусть МО $m(t\,|\,\alpha)$ и ковариационная матрица $\Sigma(t|\alpha)$ n-мерного СП $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, зависящего от L-мерного вектора неизвестных параметров $\beta \in B$, разделяют точки множества B на множестве $T_{(N)} \subset T$. Тогда задача оценивания неизвестного вектора параметров $\beta \in B$ имеет единственное решение, определяемое условием $\max_{\alpha\in B}\widetilde{l}(\alpha) = \widetilde{l}(\beta)$,
где определена $l(\alpha)$ определена в (5.22). ♯

Из теоремы 5 следует, что для единственности решения задачи оценивания неизвестного L-мерного вектора параметров n-мерного СП $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, должны выполняться два условия:
1. МО $m(t\,|\,\alpha)$ разделяет точки множества B на множестве $T_{(N)} \subset T$.
2. Ковариационная матрица $\Sigma(t|\alpha)$ разделяет точки множества B на множестве $T_{(N)} \subset T$

Пусть изучаемый СП $X(t,\omega) \triangleq X_0(t) + \delta X(t,\omega)$, $t \in T = [0, \infty)$, удовлетворяет исходной *ДМС* (5.12).

N-мерная ФПРВ (5.18), (5.19) разделяет точки области изменения параметров СП на множестве $T_{(N)} = \{t_i\}_{i=1}^{N} \subset T$ при выполнении следующих условий.

1. МО $X_0(t)$ СП зависит от вектора параметров α и имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_0(t)}{dt} = F(X_0(t), \alpha), \\ X_0(0) = X_0. \end{cases}$$

Пусть модель является линейной по параметрам, т.е.

$$F(X_0(t), \alpha) \equiv \Phi(X_0(t))\alpha, \tag{8.24}$$

где $\Phi(X_0(t))$ – матричная функция, принимающая значения в $M_{nL}(\mathbb{R})$.
Согласно (5.12) и (5.24) используем следующую ДМС:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_0(t)}{dt} = \Phi(X_0(t))\alpha, \\ X_0(0) = X_0. \end{cases} \tag{8.25}$$

Согласно определению 5.14, *функция* $X_0(t) = X_0(t, \alpha)$, $t \in T$, *разделяет точки множества* $D = \mathbb{R}^L$ возможных значений вектора параметров на множестве $T_{(N)} \subset T$, если
$\forall \alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in D \quad \exists t = t_{\alpha\beta} \in T_{(N)} \mid X_0(t_{\alpha\beta}, \alpha) \neq X_0(t_{\alpha\beta}, \beta)$.

Необходимые условия существования $t_{\alpha\beta}$.

Теорема 6. Пусть $\forall\alpha \in D$ и $\forall t \in T = [0,\ \infty)$ $\dfrac{dX_0(t)}{dt} = \Phi(X_0(t))\alpha \neq \mathbf{O}$ и существует хотя бы один момент времени $s \in T$, в который матрица

$$B(X_0(s), \alpha) \triangleq \frac{\partial\Phi(X)\alpha}{\partial X}\Big|_{X=X_0(s)}$$

является невырожденной для любых $\alpha \in \mathbb{R}^L \setminus \{\mathbf{O}\}$. Тогда равенство $X_0(t,\alpha) = X_0(t,\beta)$ выполнено для всех $t \in T$ только в том случае, когда $\alpha = \beta$. $\sharp$

При $\alpha \neq \beta$ всегда существует окрестность $S \subset T$, такая, что для любых $\tau \in S$ имеет место неравенство $X_0(\tau,\alpha) \neq X_0(\tau,\beta)$.
Множество $T_{(N)} = \{t_i\}_{i=1}^N \subset T$ можно выбрать так, что МО $X_0(t)$ СП (решение задачи Коши (5.25)), будет разделять точки множества D возможных значений вектора параметров на множестве $T_{(N)}$, достаточно выбрать $N \geq L$.
СП не должен быть стационарным.

2. Ковариационные матрицы $\Sigma_i(\alpha, G)$, $i = \overline{1,\ N}$.
Выберем два набора неизвестных параметров: $\{\alpha_1; G_1\}$ и $\{\alpha_2; G_2\}$. Пусть $\alpha \triangleq \alpha_1 = \alpha_2$, $G_1 \neq G_2$ и
$\Delta\Sigma_i(\alpha, G_1, G_2) \triangleq \Sigma_i(\alpha, G_1) - \Sigma_i(\alpha, G_2)$.
Матричная функция (учитывая (5.20) и (5.21))
$\Delta\Sigma(t\,|\,\alpha, G_1, G_2) \triangleq \Sigma(t\,|\,t_{i-1}, \alpha, G_1) - \Sigma(t\,|\,t_{i-1}, \alpha, G_2)$
является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta\Sigma(t\,|\,\alpha, G_1, G_2)}{dt} = B(X_0(t), \alpha)\,\Delta\,\Sigma(t\,|\,\alpha, G_1, G_2) + \\ \qquad + \Delta\,\Sigma(t|\alpha, G_1, G_2)\,B^{\mathbb{T}}(X_0(t), \alpha) + \\ \qquad + \sigma(X_0(t), \alpha)\,(G_1 - G_2)\,\sigma^{\mathbb{T}}(X_0(t), \alpha), \quad t_{i-1} < t \leq t_i, \\ \Delta\Sigma(t_{i-1}\,|\,\alpha, G_1, G_2) = \Theta. \end{cases} \tag{8.26}$$

Задача (5.26) имеет нулевое решение тогда и только тогда, когда является однородной – в рассматриваемом случае при $G_1 = G_2$.
Две N -мерные ФПРВ (5.18), (5.19) равны тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2$ и $G_1 = G_2$.
При $\alpha_1 = \alpha_2$ и $G_1 \neq G_2$ случайные векторы $X(t_i, \omega) - m(t_i|t_{i-1}, \alpha)$ имеют одинаковые МО, но различные ковариационные матрицы, при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ всегда найдутся два СВ с различными МО.

Условия единственности решения задачи параметрической идентификации

1. Условия (1) выполняется, если число наблюдений превышает размерность вектора параметров ($N \geq L$).
2. Условия (2) выполняется, если $\alpha_1 = \alpha_2$ и $G_1 = G_2$.

Поэтому при выполнении условий единственности решения задачи параметрической идентификации линейной модели мы можем оценить все параметры исходной нелинейной СМС.
Сделанный вывод касается только условий единственности решения задачи параметрической идентификации, но не качества получаемых оценок (оценки будут смещенными, смещение будет стремиться к нулю при увеличении числа наблюдений, если $\varepsilon \to 0$).

8.4. Выбор наблюдаемых переменных

В процессе наблюдений за изменениями состояния изучаемого объекта могут быть измерены значения **не всех компонент** его вектора состояния.

Определение 8.15. Наблюдаемым переменным состояния называют фиксированную компоненту вектора состояния, если в результате наблюдений за изменениями состояния изучаемого объекта, значения компоненты могут быть измерены. В противном случае компоненту вектора состояния называют **ненаблюдаемым переменным состояния**.

Пример 8.2. Двумерный СП $X(t,\omega)$, $t \in T = [0, \infty)$, задан СМС (5.13), соответствующая ДМС (5.12) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 x_2 - \alpha_2 x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\alpha_3 x_2, \\ x_1(0) = C_1, \quad x_2(0) = C_2, \quad C_1 > 0,\ C_2 > 0 \end{cases} \tag{8.27}$$

где C_1 и C_2 – известные константы, характеризующие начальное состояние объекта, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – положительные неизвестные параметры. #

Решение задачи Коши (5.27) в линейном приближении представляет собой *МО СП* $X(t,\omega)$, $t \in T = [0, \infty)$. Пусть $N = 3$, $T_{(N)} = \{t_1, t_2, t_3\}$, условия теоремы 4 выполнены.
Измерения проведены для **второй** компоненты вектора состояния, известны математические ожидания $\mathbf{M}[x_2(t_j,\omega)]$, $j = \overline{1, 3}$.
Решаем задачу Коши (5.27), получаем

$$x_1(t) = C_1 \exp(-\alpha_2 t - \alpha_1 \alpha_3^{-1} C_2 (e^{-\alpha_3 t} - 1)), \qquad x_2(t) = C_2 e^{-\alpha_3 t}.$$

Оценку α_{03} параметра α_3 найдем, как решение системы уравнений

$$\mathbf{M}[x_2(t_j,\omega)] = C_2 \exp(-\alpha_{03} t_j), \quad j = \overline{1, 3}.$$

Данных для нахождения оценок α_{01} и α_{02} параметров α_1 и α_1 нет.
Задача оценивания вектора неизвестных параметров α имеет бесчисленное множество решений.

Если известны $\mathbf{M}[x_1(t_j,\omega)]$, $j = \overline{1,3}$, то можно определить оценки $\alpha_0 = (\alpha_{01}\ \ \alpha_{02}\ \ \alpha_{03})^{\mathbb{T}}$ вектора неизвестных параметров α.
Найти оценки всех неизвестных параметров, как решение системы уравнений (5.28) возможно, если система совместна и $j \geq 3$.

$$\mathbf{M}[x_1(t_j,\omega)] = C_1 \exp(-\alpha_{02}t_j + \alpha_{01}\alpha_{03}^{-1}C_2(1 - e^{-\alpha_{03}t_j})), \quad j = \overline{1,3}. \tag{8.28}$$

Для решения задачи параметрической идентификации детерминированной модели состояния (5.27):
1) в качестве наблюдаемого переменного состояния выбрать $x_1(t)$;
2)число измерений значений переменного состояния $x_1(t)$ должно быть, как минимум, три.

В общем случае решение вопроса о выборе наблюдаемых переменных состояния связано с анализом частных производных компонент вектора состояния (**функций чувствительности**).

Функции чувствительности представляют собой частные производные компонент вектора состояния $X(t) = X(t,\alpha) = (x_1(t,\alpha) \ \ \ldots \ \ x_n(t,\alpha))^{\mathbb{T}}$ исходной детерминированной модели (5.12) по параметрам α_1, α_2, ..., α_L, которые являются компонентами вектора $\alpha \in D \subset \mathbb{R}^L$.

Матричная функция чувствительности $S(t) \triangleq \dfrac{\partial X(t,\alpha)}{\partial \alpha} \in M_{nL}(\mathbb{R})$ детерминированной модели состояния (5.12).

Матрица $S(t)$ при выполнении дополнительных условий является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = B(X(t),\alpha)\, S(t) + F_\alpha(X(t),\alpha), \\ S(0) = \Theta, \end{cases}$$

где $B(X,\alpha) = \dfrac{\partial F(X,\alpha)}{\partial X}$, $\qquad F_\alpha(X,\alpha) = \dfrac{\partial F(X,\alpha)}{\partial \alpha}$ – матрицы Якоби.

Обозначим s_k – строка матрицы $S(t)$ с номером k.
Если $(\exists k) \mid \forall j \;\; s_{kj} \neq 0, \;\; \forall t \geq 0, \forall \alpha \in D$, то задача параметрической идентификации ДСМ (5.12) имеет решение.
Для решения задачи достаточно иметь последовательность измерений $\{x_k(t_j)\}$ значений k -й компоненты вектора состояния $X(t)$ в дискретные моменты времени t_j, $j = \overline{1, N}$, где $N \geq L$.
Если $\neg(\exists k) \mid \forall j \;\; s_{kj} \neq 0, \;\; \forall t \geq 0, \forall \alpha \in D$, то формируем матрицу $S_*(t)$ из строк матрицы $S(t)$, каждый столбец $S_*(t)$ содержит хотя бы один $s_{kj} \neq 0, \;\forall t \geq 0, \forall \alpha \in D$.
Номера строк матрицы $S(t)$, составляющих матрицу $S_*(t)$, являются номерами тех компонент вектора состояния, значения которых следует измерять в дискретные моменты времени t_j, $j = \overline{1, N}$, чтобы обеспечить выполнение необходимого условия единственности решения рассматриваемой задачи.
Если матрица $S_*(t)$ совпадает со всей матрицей $S(t)$, то следует измерять все компоненты вектора состояния.
Если из матрицы $S(t)$ можно выделить несколько матриц $S_*(t)$, то есть несколько вариантов для набора наблюдаемых переменных и можно использовать любой из них.
Конкретный выбор диктуется возможностью измерения входящих в нее переменных.

Определим N – число моментов времени для измерения значений наблюдаемых компонент вектора состояния.

Пусть $\Sigma(t)$ – ковариационная матрица n-мерного вектора состояния $X(t, \omega)$, $t > 0$, СМС(5.13).

Наблюдаем k компонент вектора состояния. Считаем известными $(k+1)k/2$ элементов матрицы $\Sigma(t)$.

Приравняем соответствующие элементы матрицы $\Sigma(t \,|\, \alpha, G)$ (определена согласно (5.21)), элементам матрицы $\Sigma(t)$ в каждый момент времени t_j, $j = \overline{1, N}$, получим $k(k+1)/2$ уравнений, содержащих $r(r+1)/2$ неизвестных.

Число оцениваемых параметров не должно быть больше числа уравнений связи $\dfrac{Nk(k+1)}{2} \geq \dfrac{r(r+1)}{2}$.

Учтем ограничение $N \geq L$ (полученное при исследовании задачи оценивания).

Имеем:

$$N \geq \max\left\{L;\ \frac{r(r+1)}{k(k+1)}\right\}, \tag{8.29}$$

где k – число наблюдаемых компонент n-мерного вектора состояния, r – порядок симметрической матрицы G, а L – размерность вектора параметров α.

Если наблюдают все компоненты вектора состояния ($k = n$), число оцениваемых параметров равно размеру вектора состояния ($L = n$), то полученное условие принимает вид $N \geq n$.

При выполнении условия (5.29) изучаемый случайный процесс $X(t,\omega)$, $t \in T = [0,\ \infty)$, однозначно определен на множестве $T_{(N)} = \{t_j\}_{j=1}^{N}$ своей N-мерной *функцией плотности вероятностей* (5.18), (5.19).

8.5. Специфика задачи оценивания при наличии ошибок измерений

Данные наблюдений при наличии ошибок измерений могут быть представлены в виде

$$Y(t,\omega) = CX(t,\omega) + \eta(t,\omega), \quad t \in T_{(N)} \subset T, \tag{8.30}$$

где $T_{(N)} = \{t_j\}_{j=1}^{N}$; $X(t,\omega)$, $t \in T_{(N)}$, — ненаблюдаемое значение n-мерного вектора состояния; $Y(t,\omega)$, $t \in T_{(N)}$, — наблюдаемое значение указанной функции вектора состояния; $C \in M_{kn}(\mathbb{R})$ — известная матрица ранга k, причем $1 \le k \le n$; $\eta(t_j,\omega)$, $j = \overline{1,N}$ — *независимые* как по отношению друг к другу, так и по отношению к *вектору состояния*, *случайные векторы*, распределенные по k-мерному нормальному закону с нулевым *математическим ожиданием* и *ковариационной матрицей* Σ_η.
Интерпретация: $X(t,\omega)$, $t \in T_{(N)}$ – **сигнал**, задачи Коши (5.12), (5.15) – **модель сигнала**, *гауссовский белый шум*, $\eta(t,\omega)$ $t \in T_{(N)}$, с дискретным временем, имитирующий ошибки измерений, – **помеха**, уравнение (5.30) – **модель канала связи**.

Задача формулируется как задача оценивания параметров сигнала.
Имеем модель канала связи (5.30) и модель сигнала (5.12), (5.15).
Существуют два основных типа моделей канала связи, различающихся по характеру измерений сигналов.

1. **Прямые измерения** значений наблюдаемых компонент вектора состояния, данные наблюдений содержат сумму помехи и истинного значения соответствующей компоненты вектора состояния сигнала, любая строка матрицы C, входящей в модель канала связи (5.30), состоит из одной единицы и нулей.

2. **Косвенные измерения:** данные наблюдений содержат сумму помехи и линейной комбинации истинных значений компонент вектора состояния сигнала, матрица может иметь любую структуру, но должна иметь максимальный ранг: $RGC = k$.

Конкретный вид матрицы C определяется специфическими особенностями СП и возможностями эксперимента.

Рассмотрим случай 1. Предположим, что расположение единиц в матрице C обеспечивает выбор наблюдаемых переменных состояния в соответствии с исследованием *функции чувствительности*.
Измерения производят в дискретные моменты времени $t \in T_{(N)}$, решение *стохастической задачи Коши* (5.15) (линейной по отношению к *процессу случайных отклонений*) запишем в виде

$$\delta X(t_i,\omega) = R(t_i,t_{i-1})\,\delta X(t_{i-1},\omega) + \\ + \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t_i,s)\,\sigma(X_0(s),\alpha)\,Q\,dw(s,\omega), \quad (8.31)$$

где $R(t,s)$ – *является решением задачи Коши* .

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(t,s)}{\partial t} = B(X_0(t),\alpha)\,R(t,s), \quad t_{i-1} \le s < t \le t_i, \\ R(s,s) = I_n. \end{cases}$$

Обозначим $W_i(\omega) \triangleq \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t_i,s)\,\sigma(X_0(s),\alpha)\,Q\,dw(s,\omega)$

n-мерные случайные векторы $W_i(\omega)$, $i = \overline{1,n}$, являются независимыми и имеют нулевые математические ожидания.

Модель примет вид

$$\begin{cases} Y(t_i,\omega) = CX_0(t_i) + C\delta X(t_i,\omega) + \eta(t_i,\omega), & i = \overline{1,\ N}, \\ \delta X(t_i,\omega) = R(t_i,t_{i-1})\,\delta X(t_{i-1},\omega) + W_i(\omega), & i = \overline{1,\ N}, \end{cases} \tag{8.32}$$

где $\eta(t_i,\omega)$, $i = \overline{1,\ N}$, – k-мерные случайные векторы, независимые по отношению друг к другу и по отношению к $W_i(\omega)$, $i = \overline{1,\ N}$, $\eta(t_i,\omega) \to N(0,\Sigma_\eta)$, Σ_η – ковариационная матрица; $X_0(t)$ — решение задачи Коши (5.12).

Для решения задачи оценивания неизвестных параметров изучаемого СП, запишем ФПРВ $f(Y\,|\,\alpha,G,\Sigma_\eta)$ блочного случайного вектора $\left(Y^{\mathbb{T}}(t_1,\omega);Y^{\mathbb{T}}(t_2,\omega);\ldots;Y^{\mathbb{T}}(t_N,\omega)^{\mathbb{T}}\right)$

$$f(Y\,|\,\alpha,G,\Sigma_\eta) = f_N(Y_{(1)},Y_{(2)},\ldots,Y_{(N)}).$$

Согласно (5.32), для всех $i = \overline{1,\ N}$

$$\eta(t_i,\omega) = Y(t_i,\omega) - CX_0(t_i) - C\delta X(t_i,\omega),$$

$$W_i(\omega) = \delta X(t_i,\omega) - R(t_i,t_{i-1})\,\delta X(t_{i-1},\omega),$$

где $\delta X(t,\omega)$, $t \in T = [0,\ \infty)$, – наблюдаемый процесс случайных отклонений.

ФПРВ $f(Y \mid \alpha, G, \Sigma_\eta)$ зависит от ненаблюдаемой переменной и не может быть использована для решения задачи оценивания параметров изучаемого СП.
Запишем ФПРВ $f(Y \mid \alpha, G, \Sigma_\eta)$ в виде (5.18):
$f_N(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(N)}) = f_1(Y_{(1)}) \prod_{i=2}^{N} f(Y_{(i)} \mid Y_{(1)}, \ldots, Y_{(i-1)})$.
Сомножители в правой части – ФПРВ нормального закона распределения, k -мерные случайные векторы

$$\begin{cases} Z_1(\omega) = Y(t_1, \omega), \\ Z_2(\omega) = Y(t_2, \omega) - \mathbf{M}[Y(t_2, \omega) \mid Y_{(1)}], \\ Z_3(\omega) = Y(t_3, \omega) - \mathbf{M}[Y(t_3, \omega) \mid Y_{(1)}, Y_{(2)}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_N(\omega) = Y(t_N, \omega) - \mathbf{M}[Y(t_N, \omega) \mid Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(N-1)}], \end{cases} \tag{8.33}$$

независимы, имеют нулевые математические ожидания и ковариационные матрицы V_i , $k = \overline{1,\ N}$.
Для решения задачи оценивания неизвестных параметров СП необходимо определить величины
$\mathbf{M}[Y(t_i, \omega) | Y_{(1)}, \ldots, Y_{(i-1)}], \quad i = \overline{2,\ N}, \qquad$ и $\qquad V_i, \quad i = \overline{1,\ N}.$

Найдем условное МО

$$\mathbf{M}[Y(t_i,\omega)\,|\,Y_{(1)},\ldots,Y_{(i-1)}] = \mathbf{M}[CX_0(t_i) + C\delta X(t_i,\omega) + \\ + \eta(t_i,\omega)\,|\,Y_{(1)},\ldots,Y_{(i-1)}] = CX_0(t_i) + C\delta\widehat{X}_{(i)}, \qquad i=\overline{2,\ N} \quad (8.34)$$

где $\delta\widehat{X}_{(i)} = \mathbf{M}[\delta X(t_i,\omega)\,|\,Y_{(1)},\ldots,Y_{(i-1)}]$ – оценка сигнала для момента времени $t = t_1$ по наблюдаемым значениям $Y_{(1)}$, $Y_{(2)}$, . . . , $Y_{(i-1)}$.

При наличии ошибок измерений приходим к необходимости оценивания ненаблюдаемого состояния системы $X(t_i,\omega) = X_0(t_i) + \delta X(t_i,\omega)$ по данным наблюдений $Y_{(1)}$, $Y_{(2)}$, . . . , $Y_{(i-1)}$, содержащим линейные комбинации компонент неизвестного вектора состояния и ошибки измерения.

Этой задаче посвящен раздел теории случайных процессов – **теория фильтрации и упреждения**.

8.6. Фильтр Калмана

Рассмотрим задачу оценивания вектора состояния объекта по данным наблюдений, содержащим случайные ошибки измерений:

$$\begin{cases} X(t_{i+1},\omega) = \Phi X(t_i,\omega) + \varepsilon_i(\omega), & i = \overline{1,\ N}, \\ Y(t_i,\omega) = QX(t_i,\omega) + \eta_i(\omega), & i = \overline{1,\ N}, \end{cases} \tag{8.35}$$

где $X(t,\omega)$, $t \in T_{(N)} = \{t_i\}_{i=1}^{N}$ – n-мерный вектор состояния объекта;
$Y(t,\omega)$, $t \in T_{(N)}$ – p-мерный вектор набл. переменных состояния;
$\Phi \in M_n(\mathbb{R})$ и $Q \in M_{pn}(\mathbb{R})$ – известные матрицы;
$\varepsilon_i(t,\omega)$, $i = \overline{1,\ N}$ – n-мерные независимые случайные векторы, $\varepsilon_i(t,\omega) \to N(0,\Sigma_\varepsilon)$;
$\eta_i(t,\omega)$, $i = \overline{1,\ N}$ – n-мерные независимые СВ, $\eta_i(t,\omega) \to N(0,\Sigma_\eta)$;
Σ_ε, Σ_η – положительно определенные ковариационные матрицы.
Пусть СВ $\varepsilon_i(t,\omega)$, $i = \overline{1,\ N}$, и $\eta_i(t,\omega)$, $i = \overline{1,\ N}$, независимы, X_0 – начальное состояние объекта, независимый по отношению к $\varepsilon_i(t,\omega)$, $\eta_i(t,\omega)$ n-мерный случайный вектор, $X_0 \to N(m_0,\Sigma_0)$, Σ_0 – ковариационная матрица.
В общем случае матрицы Φ, Q, Σ_ε, Σ_η могут зависеть от времени t.

Теорема 7. Пусть случайный вектор $\alpha_i(\omega)$, $i = 1, 2$, имеет размерность $n(i)$, МО m_i и ков. матрицу Σ_i. Если $\beta(\omega) = \left(\alpha_1^{\mathbb{T}}(\omega)\ \alpha_2^{\mathbb{T}}(\omega)^{\mathbb{T}}\right)$ – СВ размерностью $n = n(1)+n(2)$ $\beta(\omega) \to N((m_1^{\mathbb{T}}; m_2^{\mathbb{T}})^{\mathbb{T}}, \Sigma)$, где $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_2 \end{pmatrix}$ – ков. матрица, то случайные векторы $\left(\alpha_1(\omega) - \mathbf{M}[\alpha_1(\omega) \,|\, \alpha_2(\omega) = Y_2]\right)$ и $\alpha_2(\omega)$ являются независимыми. $\sharp$

Если выполнены условия теоремы 7, то

$$M[\alpha_1(\omega) \,|\, \alpha_2(\omega) = Y_2] = m_1 + \Sigma_{12}\Sigma_2^{-1}(Y_2 - m_2). \qquad (8.36)$$

Теорема 8. Если закон распределения блочного случайного вектора $(\alpha^{\mathbb{T}}(\omega)\ \beta^{\mathbb{T}}(\omega)\ \gamma^{\mathbb{T}}(\omega))^{\mathbb{T}}$ нормальный и $\beta(\omega)$, $\gamma(\omega)$ независимы, то

$$\mathbf{M}[\alpha(\omega) \,|\, \beta(\omega) = Y, \gamma(\omega) = Z] =$$

$$= \mathbf{M}[\alpha(\omega) \,|\, \beta(\omega) = Y] + \mathbf{M}[\alpha(\omega) \,|\, \gamma(\omega) = Z] - \mathbf{M}[\alpha(\omega)]. \qquad (8.37)$$

$\sharp$

Пусть в математической модели (5.35) вектор наблюдаемых переменных состояния и оценка вектора состояния объекта представлены в виде:

$$\begin{cases} Y_i(\omega) \triangleq (Y(t_1,\omega),\ Y(t_2,\omega),\ \ldots,\ Y(t_i,\omega)), \\ \widehat{X}(i+1\,|\,i) \triangleq \mathbf{M}[X(t_{i+1},\omega)\,|\,Y_i(\omega)]. \end{cases} \qquad (8.38)$$

Назовем величину $\widetilde{Y}_i(\omega)$ **невязкой оценивания**.

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_i(\omega) &\triangleq Y(t_i,\omega) - \mathbf{M}[Y(t_i,\omega)\,|\,Y_{i-1}(\omega)] = \\ &= Y(t_i,\omega) - \mathbf{M}[QX(t_i,\omega)+\eta_i(\omega)\,|\,Y_{i-1}(\omega)] = Y(t_i,\omega) - \\ &- Q\widehat{X}(i\,|\,i{-}1) = Q(X(t_i,\omega) - \widehat{X}(i\,|\,i{-}1)) + \eta_i(\omega), \end{aligned} \qquad (8.39)$$

$$\widetilde{Y}_i(\omega) = Q\widetilde{X}_i(\omega) + \eta_i(\omega), \quad \widetilde{X}_i(\omega) \triangleq X(t_i,\omega) - \widehat{X}(i\,|\,i{-}1). \qquad (8.40)$$

Из теоремы 7 следует, что $Y_{i-1}(\omega)$ и $\widetilde{Y}_i(\omega)$ независимы.

Случайные векторы $X(t_{i+1},\omega)$, $Y(t_{i-1},\omega)$, $\widetilde{Y}_i(\omega)$ имеют нормальные законы распределения.
Согласно (5.38) $\widehat{X}(i{+}1\,|\,i) = \mathbf{M}[X(t_{i+1},\omega)\,|\,Y_{i-1}(\omega),\ Y(t_i,\omega)]$.
Согласно (5.39) $Y(t_i,\omega) = \widetilde{Y}_i(\omega) + \mathbf{M}[Y(t_i,\omega)\,|\,Y_{i-1}(\omega)]$.

$$\widehat{X}(i{+}1\,|\,i) = \mathbf{M}[X(t_{i+1},\omega)\,|\,Y_{i-1},(\omega)] + \\ + \mathbf{M}[X(t_{i+1},\omega)\,|\,\widetilde{Y}_i,(\omega)] - \mathbf{M}[X(t_{i+1},\omega)]. \quad (8.41)$$

Согласно (5.35), (5.38), получаем

$$\mathbf{M}[X(t_{i+1},\omega)\,|\,Y_{i-1}(\omega)] = \mathbf{M}[\Phi X(t_i,\omega){+}\varepsilon_i(\omega)\,|\,Y_{i-1}(\omega)] = \\ = \Phi\,\mathbf{M}[X(t_i,\omega)\,|\,Y_{i-1}(\omega)] = \Phi\widehat{X}(i\,|\,i-1). \quad (8.42)$$

Условное МО вектора $X(t_{i+1},\omega)|\widetilde{Y}_i(\omega)$, имеет вид (теор. 7 и (5.36)):

$$\mathbf{M}[X(t_{i+1},\omega)\,|\,\widetilde{Y}_i(\omega)] = \mathbf{M}[X(t_{i+1},\omega)] + \\ + \Sigma_{X\widetilde{Y}}\,\Sigma_{\widetilde{Y}}^{-1}(Y(t_i,\omega) - \mathbf{M}[Y(t_i,\omega)\,|\,Y_{i-1}(\omega)]) = \\ = \mathbf{M}[X(t_{i+1},\omega)] + \Sigma_{X\widetilde{Y}}\,\Sigma_{\widetilde{Y}}^{-1}\,\widetilde{Y}_i(\omega), \quad (8.43)$$

Согласно (5.35), (5.39), (5.40) и учитывая независимость векторов $\widehat{X}(i\,|\,i{-}1)$ и $\widetilde{X}_i(\omega)$ и векторов $\eta_i(\omega)$ и $\widetilde{X}_i(\omega)$ ков. матрицы $\Sigma_{X\widetilde{Y}}$ и $\Sigma_{\widetilde{Y}}$ имеют вид:

$$\Sigma_{X\widetilde{Y}} \triangleq \mathbf{cov}[X(t_{i+1},\omega);\widetilde{Y}_i(\omega)] = \\ = \mathbf{M}[(\Phi X(t_i,\omega) + \varepsilon_i(\omega) - \Phi\mathbf{M}[X(t_i,\omega)])\,(Q\widetilde{X}_i(\omega) + \eta_i(\omega))^{\mathbb{T}}] = \\ = \mathbf{M}[(\Phi(\widehat{X}(i\,|\,i{-}1) + \widetilde{X}_i(\omega)) + \varepsilon_i(\omega) - \Phi\mathbf{M}[X(t_i,\omega)])\,\times \\ \times\,(Q\widetilde{X}_i(\omega) + \eta_i(\omega))^{\mathbb{T}}] = \Phi\mathbf{M}[\widetilde{X}_i(\omega)\,\widetilde{X}_i^{\mathbb{T}}(\omega)]\,Q^{\mathbb{T}}, \quad (8.44)$$

$$\Sigma_{\widetilde{Y}} \triangleq \mathbf{cov}[\widetilde{Y}_i(\omega);\widetilde{Y}_i(\omega)] = \mathbf{M}[(Q\widetilde{X}_i(\omega) + \eta_i(\omega))\,\times \\ \times\,(Q\widetilde{X}_i(\omega) + \eta_i(\omega))^{\mathbb{T}}] = Q\,\mathbf{M}[\widetilde{X}_i(\omega)\,\widetilde{X}_i^{\mathbb{T}}(\omega)]\,Q^{\mathbb{T}} + \Sigma_\eta. \quad (8.45)$$

Обозначив

$$\begin{cases} P(i) \triangleq \mathbf{M}[\widetilde{X}_i(\omega)\,\widetilde{X}_i^{\mathbb{T}}(\omega)], \\ K(i) \triangleq \Sigma_{X\widetilde{Y}}\,\Sigma_{\widetilde{Y}}^{-1} = \Phi\,P(i)\,Q^{\mathbb{T}}(Q\,P(i)\,Q^{\mathbb{T}} + \Sigma_{\eta})^{-1}, \end{cases} \tag{8.46}$$

Подставив (5.42)–(5.46) в (5.41), получим рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} \widehat{X}(i{+}1\,|\,i) = \Phi\,\widehat{X}(i\,|\,i{-}1) + K(i)\,\widetilde{Y}_i(\omega), \\ \widetilde{Y}_i(\omega) = Y(t_i,\omega) - Q\,\widehat{X}(i\,|\,i{-}1), \end{cases} \tag{8.47}$$

с начальным условием $\widehat{X}(i\,|\,i{-}1)\Big|_{i=1} = m_0$.

Для завершения процедуры оценивания нужно найти матрицу $K(i)$, определенную через ковариационную матрицу $P(i)$.
Из первого уравнения (5.35) вычтем первое уравнение (5.47) и с учетом (5.40) получим
$\widetilde{X}_{i+1}(\omega) = \Phi\,\widetilde{X}_i(\omega) + \varepsilon_i(\omega) - K(i)\,\widetilde{Y}_i(\omega)$.
Подставив $\widetilde{Y}_i(\omega) = Q\,\widetilde{X}_i(\omega) + \eta_i(\omega)$ (Согласно (5.40)), имеем:
$\widetilde{X}_{i+1}(\omega) = (\Phi - K(i)Q)\,\widetilde{X}_i(\omega) + \varepsilon_i(\omega) - K(i)\eta_i(\omega)$.
Для ковариационной матрицы $P(i)$ находим (согласно (5.46))

$$
\begin{aligned}
P(i+1) = \mathbf{M}[((\Phi - K(i)Q)\,\widetilde{X}_i(\omega) + \varepsilon_i(\omega) - K(i)\eta_i(\omega))\times \\
\times\,((\Phi - K(i)Q)\,\widetilde{X}_i(\omega) + \varepsilon_i(\omega) - K(i)\eta_i(\omega))^{\mathbb{T}}] = \\
= (\Phi - K(i)Q)\,P(i)(\Phi - K(i)Q)^{\mathbb{T}} + \Sigma_\varepsilon + K(i)\Sigma_\eta K^{\mathbb{T}}(i), \quad (8.48)
\end{aligned}
$$

где $K(i)$ определено равенством (5.46) и $P(1) = \Sigma_0$.

Если Y_j, $j = \overline{1, N}$, – измеренные значения состояния p -мерного *случайного процесса с дискретным временем* $Y(t, \omega)$, $t \in T_{(N)} = \{t_j\}_{j=1}^N$, то для оценки состояния

$$\widehat{X}(i{+}1 \,|\, i) \triangleq \mathbf{M}[X(t_{i+1}, \omega) \,|\, Y(t_j, \omega) = Y_j,\, j = \overline{1,\, i}\,]$$

окончательно получаем для $i = \overline{1, N}$

$$\begin{cases} \widehat{X}(i{+}1 \,|\, i) = \Phi \widehat{X}(i \,|\, i{-}1) + K(i)(Y_i - Q\widehat{X}(i|i{-}1)), \\ \widehat{X}(1|0) = m_0, \\ K(i) = \Phi P(i)\, Q^{\mathbb{T}} \,(QP(i)Q^{\mathbb{T}} + \Sigma_\eta)^{-1}, \\ P(i+1) = (\Phi - K(i)Q)\, P(i)\, (\Phi - K(i)Q)^{\mathbb{T}} + \\ \qquad\qquad + \Sigma_\varepsilon + K(i)\Sigma_\eta K^{\mathbb{T}}(i), \\ P(1) = \Sigma_0. \end{cases} \tag{8.49}$$

Совокупность рекуррентных соотношений (5.49) для оценки состояния объекта по данным наблюдений, содержащим случайные ошибки измерений, известны в литературе как **теорема Калмана** или **фильтр Калмана**

Пример 8.3. Пусть в задаче оценивания (5.35)

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad m_0 = \begin{pmatrix} m_{10} \\ m_{20} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{10}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{20}^2 \end{pmatrix},$$

$Q = (1,\, 0)\,,\ \Sigma_\eta = 1\,,\ \{Y_i\}_{i=1}^N$ — экспериментальные данные.

Полагая $i = 1$ в фильтре Калмана (5.49), вычисляем

$$K(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{10}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{20}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left[1 + (1 \;\; 0) \begin{pmatrix} \sigma_{10}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{20}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_{10}^2}{1 + \sigma_{10}^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.50)$$

и находим оценку

$$\widehat{X}(2|1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{10} \\ m_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_{10}^2}{1 + \sigma_{10}^2} \\ 0 \end{pmatrix} \left[Y_1 - (1 \;\; 0) \begin{pmatrix} m_{10} \\ m_{20} \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} m_{10} + m20 + \frac{(Y_1 - m_{10})\sigma_{10}^2}{1 + \sigma_{10}^2} \\ m_{20} \end{pmatrix}. \quad (8.51)$$

Полагая $i = 2$ в фильтре Калмана (5.49), вычисляем

$$P(2) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_{10}^2}{1+\sigma_{10}^2} \\ 0 \end{pmatrix} (1 \;\; 0)\right] \begin{pmatrix} \sigma_{10}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{20}^2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_{10}^2}{1+\sigma_{10}^2} \\ 0 \end{pmatrix} (1 \;\; 0)\right]^{\mathbb{T}} + \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_{10}^2}{1+\sigma_{10}^2} \\ 0 \end{pmatrix} \left(\dfrac{\sigma_{10}^2}{1+\sigma_{10}^2} \;\; 0 \right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_1^2+\sigma_{10}^2}{1+\sigma_{10}^2} & 0 \\ \dfrac{\sigma_{20}^2+\sigma_{10}^2}{1+\sigma_{10}^2} & \sigma_{20}^2+\sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$K(2) = \Phi\, P(2)\, Q^{\mathbb{T}} (Q\, P(2)\, Q^{\mathbb{T}} + \Sigma_\eta)^{-1} =$$

$$= \frac{\sigma_{10}^2 + \sigma_1^2(1+\sigma_{10}^2)}{\sigma_{10}^2 + (1+\sigma_{10}^2)(1+\sigma_1^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (8.52)$$

и находим оценку $\widehat{X}(3|2) = \Phi\, \widehat{X}(2|1) + K(2)\,(Y_2 - Q\,\widehat{X}(2|1)) = \ldots \quad \#$

8.7. Оценивание параметров при наличии ошибок измерений (продолжение)

В математической модели (5.32), неизвестные параметры представлены вектором $\alpha \in D \subset \mathbb{R}^L$, матрицей $G \in M_{LL}(\mathbb{R})$ и ковариационной матрицей $\Sigma_\eta \in M_{kk}(\mathbb{R})$, где k – число наблюдаемых переменных состояния $X(t,\omega)$, $t \in T_{(N)} = \{t_i\}_{i=1}^N$ (размерность вектора $Y(t,\omega)$, $t \in T_{(N)}$).
Рассмотрим математическую модель

$$\begin{cases} Y(t_i,\omega) = CX_0(t_i) + C\delta X(t_i,\omega) + \eta(t_i,\omega), & i = \overline{1,\ N}, \\ \delta X(t_i,\omega) = R(t_i,t_{i-1})\,\delta X(t_{i-1},\omega) + W_i(\omega), & i = \overline{1,\ N}, \end{cases} \tag{8.53}$$

где $X_0(t)$ — n -мерная вектор-функция, удовлетворяющая исходной *детерминированной модели состояния* (5.12); $C \in M_{kn}(\mathbb{R})$ — известная матрица ранга k, причем $1 \le k \le n$; $R(t,s)$ — *резольвента* линейной задачи Коши (5.15); $\{\eta(t_i,\omega)\}_{i=1}^N$ — *независимые случайные векторы*, распределенные по k -мерному нормальному закону с нулевым *математическим ожиданием* и *ковариационной матрицей* Σ_η;
$W_i(\omega) \triangleq \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t_i,s)\,\sigma(X_0(s),\alpha)\,Q\,dw(s,\omega)$.

Пусть n -мерные случайные векторы $W_i(\omega)$, $i = \overline{1,\ N}$, независимы, имеют нулевые математические ожидания, а их ковариационные матрицы определены непосредственно с использованием свойств *винеровского процесса*: $\Sigma(t_i, t_{i-1}, G, \alpha) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t_i, t)\,\sigma(X_0(t), \alpha)\,G\,\sigma^{\mathbb{T}}(X_0(t), \alpha)\,R^{\mathbb{T}}(t_i, t)\,dt$, где $G \triangleq QQ^{\mathbb{T}}$.

Случайные векторы $Z_i(\omega)$, $i = \overline{1,\ N}$, (5.33) являются независимыми и распределены по нормальному закону, и могут быть представлены в виде $Z_i(\omega) = Y(t_i, \omega) - CX_0(t_i) - C\delta\widehat{X}_{(i)}$, $i = \overline{1,\ N}$, ФПРВ имеет вид $f(Y \,|\, \alpha, G, \Sigma_\eta) = \prod_{i=1}^{N} f_H(Z_{(i)} \,|\, \alpha, G, \Sigma_\eta)$, где

$$f_H(Z_{(i)} \,|\, \alpha, G, \Sigma_\eta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det \Sigma(t_i, t_{i-1}, G, \alpha)}} \times$$
$$\times \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(Y_{(i)} - CX_0(t_i) - C\delta\widehat{X}_{(i)}\Big)^{\mathbb{T}} \Big(\Sigma(t_i, t_{i-1}, G, \alpha)\Big)^{-1} \times$$
$$\times \Big(Y_{(i)} - CX_0(t_i) - C\delta\widehat{X}_{(i)}\Big)\Big). \quad (8.54)$$

Матрицы $\Sigma(t_i, t_{i-1}, G, \alpha)$ и $\delta\widehat{X}_{(i)}$ вычисляют с использованием фильтра Калмана

$$\begin{cases} \delta\widehat{X}_{(i+1)} = R(t_{i+1}, t_i)\,\delta X_{(i)} + K(i)(Y_i - CX_o(t_i) - C\delta X_{(i)}), \\ X_0(0) = X_0, \quad \delta X_{(0)} = \Theta, \\ K(i) = R(t_{i+1}, t_i)\,P(i)\,C^{\mathbb{T}}\,(C\,P(i)\,C^{\mathbb{T}} + \Sigma_\eta)^{-1}, \\ P(i{+}1) = (R(t_{i+1}, t_i) - K(i)C)\,P(i)\,R^{\mathbb{T}}(t_{i+1}, t_i) + \Sigma(t_{i+1}, t_i, G\alpha), \\ P(0) = \Sigma_0, \\ \Sigma(t_{i+1}, t_i, G, \alpha) = C\,P(i)\,C^{\mathbb{T}} + \Sigma_\eta. \end{cases}$$

В соответствии с *методом максимального правдоподобия* оценки $\widehat{\alpha}$, $\widehat{G}$, $\widehat{\Sigma}_\eta$ неизвестных параметров, представленные вектором α и матрицами G , Σ_η , находят из условия

$$\max_{\alpha, G, \Sigma_\eta} \ln f(Y \,|\, \alpha, G, \Sigma_\eta) = \ln f(Y \,|\, \widehat{\alpha}, \widehat{G}, \Sigma_\eta).$$

Задача оценивания параметров изучаемого *случайного процесса* имеет единственное решение, если выполнены условия, сформулированные ранее.