

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

ФН-12. Магистры - 3 семестр

Лекция 8. ФИЛЬТР КАЛМАНА

Цель фильтра Калмана (ФК) — оценка состояния динамической системы. ФК часто называют моделью наблюдателя или оценщиком состояния.

ФК — рекурсивный фильтр, применяющийся для стохастической оценки вектора состояния динамической системы, используя ряд неполных и зашумленных измерений. Алгоритм разработан Рудольфом Калманом в 1958- 1959 гг. (опубликовант и 1960 г.). Калман подошел к решению задачи фильтрации на основе пространства состояний.

ФК представляет собой набор математических уравнений, реализующих оценку типа предиктор (предсказатель)-корректор, оптимальную в том смысле, что она минимизирует ковариацию расчетной ошибкикогда выполняются некоторые предполагаемые условия.

В качестве объектов практического приложения ФК первоначально выступали воздушные и космические летательные аппараты, а в последующем самые различные технические объекты.

Самое известное раннее использование ФК было на навигационном компьютере Apollo (проект Аполло, полет на Луну).

ФК используют в спутниковых навигационных устройствах, в интерактивной компьютерной графике.

Основная задача: оценка вектора состояний линейной системы при наличии доступа к выходам системы и возможно к управляющим входам.

Основной источник информации: зашумленные результаты измерений выходных переменных системы, полученные от датчиков. Решение задачи оценки вектора состояний — стохастическими методами .

Подходы решению к этой задаче основаны на модели пространства состояний системы.

Источники шума в измерениях: неполное соответствие объекта измерений принятой его модели, неполное знание о измеряемой величине, влияние параметров окружающей среды и их несовершенное измерение, разрешающая способность и порог чувствительности датчика.

Например, каждый тип датчика имеет фундаментальные ограничения, связанные с соответствующей физическим процессом, при значениях сигналов близких к ограничениям (порогу чувствительности), точность измерения падает.

Аналитические модели измерений обычно включают понятие случайного шума или неопределенности измерений.

Фактическая модель изменений вектора состояния системы полностью неизвестна. Модели процессов обычно включают неопределенности.

При работе алгоритма используется априорная информация о модели объекта, модели шума.

Классический алгоритм ФК был получен с позиций теории пространства состояний динамических объектов, линейные модели которых имеют форму систем однородных дифференциальных уравнений, для определения оптимальных оценок их векторов состояний.

Фильтр Калмана основан на предположении, что выходные данные системы могут быть смоделированы как случайный процесс Z , который является линейной функцией состояния и независимый, нормально распределенный процесс белого шума V с нулевым средним: $\vec{y} = H\vec{x} + \vec{v}$, здесь $X \sim N(\vec{x}, Q)$, $V \sim N(O, R)$, $M(X, V) = 0$, где Q , R — положительно определенные ковариационные матрицы шума процесса и измерений.

Измерение ковариации шума (погрешности) измерения R обычно возможно. Должна быть предусмотрена возможность провести автономные выборочные измерения для определения дисперсию шума измерения. При реализации фильтра ковариация измеряемого шума обычно измеряется до начала работы фильтра.

Определение ковариации шума процесса Q достаточно сложная задача. Как правило значения задаем априорно, в процессе работы алгоритма — корректируем.

Алгоритм ФК работает в два этапа: прогноз (экстраполяция, предсказание) и корректировка.

1) Этап прогнозирования(экстраполяция, предсказание) .

По математической модели строится предсказание состояния системы на один шаг вперед. По состоянию системы в данный момент времени t_k прогнозируется состояние системы в следующий момент t_{k+1} (экстраполяция значения переменных состояния и их "неопределенностей") x_{k+1} .

2) Этап коррекции.

В момент времени t_{k+1} есть две разные величины, представляющие состояние динамического процесса.

Экстраполированное значение динамической системы x_{k+1} , рассчитанное на первом этапе, и фактически измеренное значение.

По фактическим зашумленным значениям наблюдаемых величин z_{k+1} в момент времени t_{k+1} нужно восстановить значения всех параметров системы. На этапе коррекции по данным измерения (полученного с некоторой погрешностью) результат экстраполяции уточняется.

погрешность измерений — воздействие шумов на динамическую систему.

Вычисляется вектор ошибки, отклонение наблюдения от ожидаемого состояния, осуществляется коррекция оценки вектора состояния

ФК характеризуется двумя матрицами:

1. матрица наблюдаемости, связывающая вектор состояния и вектор измерений;
2. фундаментальная матрица, описывающая движение связанной с объектом системы координат (СК) (в проекциях на оси инерциальной СК) относительно инерциальной СК на заданном интервале времени.

Рассмотрим ФК на примере применения его в навигационных системах.

Автономное транспортное средство оснащено датчиками для распознавания окружающей среды, устройствами (системами) обработки информации, принятия решений, основанных на полученной информации, выработки и отработки управляющих воздействий.



Рис. 1. Обобщенный пример гипотетической структуры подсистем для автономного транспортного средства

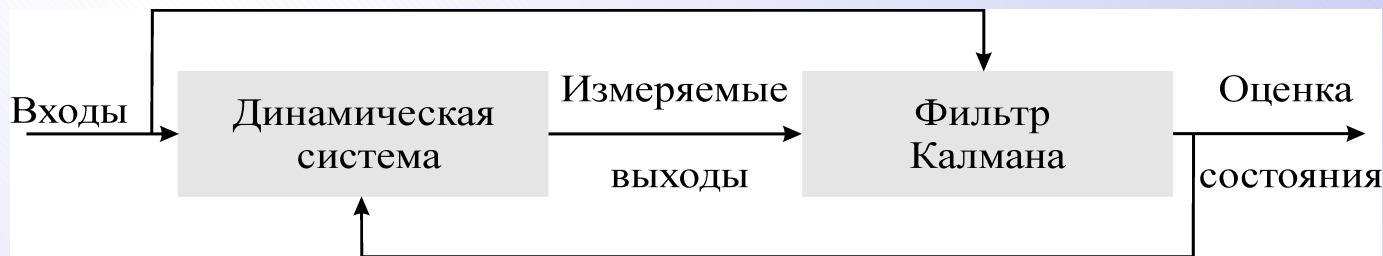


Рис. 2. Принцип работы фильтра Калмана

На рис. 2 показана основная взаимосвязь между динамической системой с измеряемыми выходами и известными входными сигналами и фильтром Калмана. На выходе фильтра Калмана формируется оценка состояния.

Существует динамическая система, состояния которой измеряется датчиками, и на к вход динамической системы подается известный управляющий сигнал.

С помощью входов, выходов и оценки модели динамики системы можно получить оценку переменных состояния и, таким образом, построить обратную связь по оценке вектора полного состояния для управления.

Динамическая система представлена моделью (оценочной) динамики реального мира.

Шумы и помехи

ФК являются линейно-квадратичными оценщиками и дают оптимальную ковариацию ошибки оценки при условии, что шум процесса и измерений – гауссовский белый шум.

Оценка ковариация — оптимальна, если случайные данные во времени и в пространстве некоррелированные.

Если шумы системы и измерений являются некоррелированными гауссовскими случайными величинами, то фильтр Калмана дает наилучшую линейную несмещенную оценку состояния, эта оценка наилучшая и в классе всех возможных оценок.

Замечание. Редко шум является явно белым.

Динамическая система

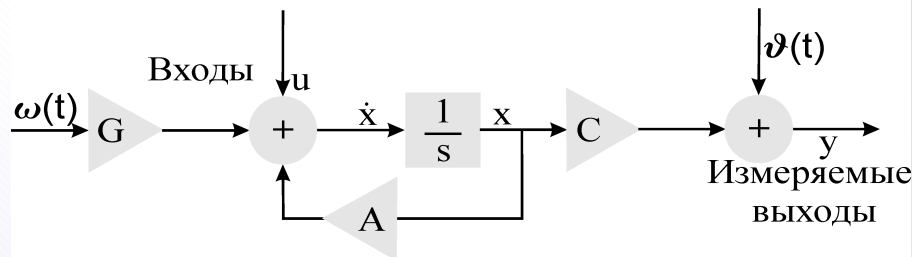


Рис. 3. Общий вид динамической системы

Модель динамической системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + G\omega(t) \quad (8.1)$$

где x - $n \times 1$ вектор состояния, $A \in R^{n \times n}$ — матрица коэффициентов ДС, G - матрица распределения шума процесса, и $\omega(t) = N(0, \sigma^2)$ — шум процесса, вызван возмущениями в окружающей среде.

Модель измерений

$$y(t) = Cx(t) + \nu(t) \quad (8.2)$$

где $y(t) \in R^p$ — вектор измерений (измеряемый выход); $C \in R^{p \times n}$ — матрица измерения; $\nu = N(0, \sigma^2) \in R^p$ — вектор шума измерения.

Требования. Шум процесса $\omega(t)$ и шум измерения $\nu(t)$ являются не коррелированными гауссовыми случайными величинами.

Свойства белого шума.

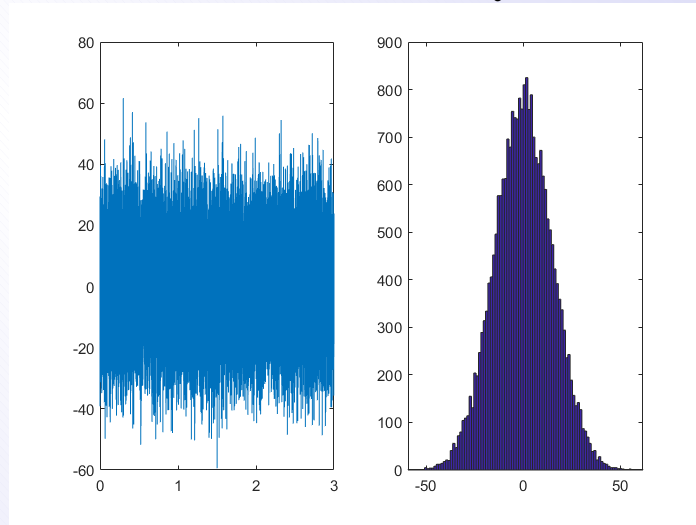


Рис. 4. Белый шум. Спектр. Распределение

Белый шум — гауссова случайная величина $y = wgn(1, length(t), 3, 75, 'linear', 'real')$, спектр СВ: $x = fft(y)$ Для белого шума характерна равномерная спектральная плотность. В этом случае энергия сигнала будет одинакова в любой заданной полосе частот.

Спектр сигнала — совокупность гармонических колебаний, из которых состоит сигнал. Спектральная плотность характеризует суммарную амплитуду колебаний единичной области частот спектра сигнала.

Математически белым шумом называют сигнал, автокорреляционная функция которого является дельта-функцией Дирака $R_{x,x}(\tau) = A\delta(\tau)$. Это статистическое свойство является основным для сигналов такого типа.

Белый шум некоррелирован по времени.

Некоррелированный гауссовский процесс можно рассматривать как приближение к белому шуму.

Математическое ожидание процесса $E\{x\} = 0 = const$, среднеквадратическое отклонение σ . Если σ стремится к бесконечности, то такой гауссовский процесс стремится к белому шуму.

$$E\{x, y\} = E\{x\}E\{y\}; p(x, y) = p(x)p(y); E\{x y\} = 0 \quad (8.3)$$

где x, y — случайные переменные,

$$E\{x, y\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y p(x)p(y) dx dy$$

— ожидаемое значение, $p(x)$ — ФПРВ.

Автокорреляционная функция $R(\tau)$ – статистическая взаимосвязь между случайными величинами из одного ряда, взятых со сдвигом, например, для случайного процесса – со сдвигом по времени на величину τ .

$$R_{x,x}(t, \tau) = E\{x(t) x(t - \tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int^T f(t) f(t - \tau) dt.$$

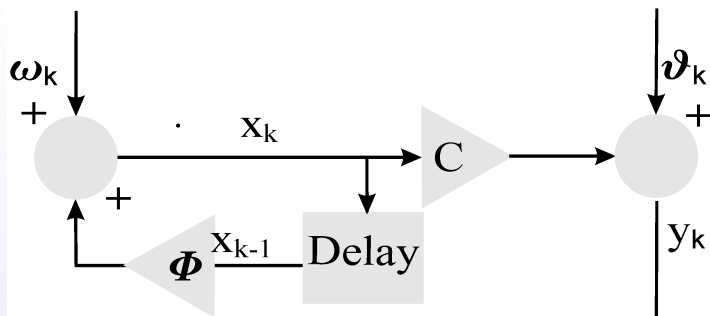
В реальных условиях существуют источники шума, которые не обязательно будут иметь те же идеальные свойства, что и белый шум.

Например, экспоненциально коррелированный шум, гармонически связанный шум, случайные блуждания, случайная постоянная (смещение), ограниченный по полосе шум и многие другие. В реальных ситуациях это может ухудшить оптимальность решения фильтра Калмана.

В сам фильтр Калмана могут быть добавлены формирующие фильтры (SF), которые являются одним из методов обработки небелого шума.

ФИЛЬТР КАЛМАНА ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Модель динамической системы



Модель фильтра Калмана

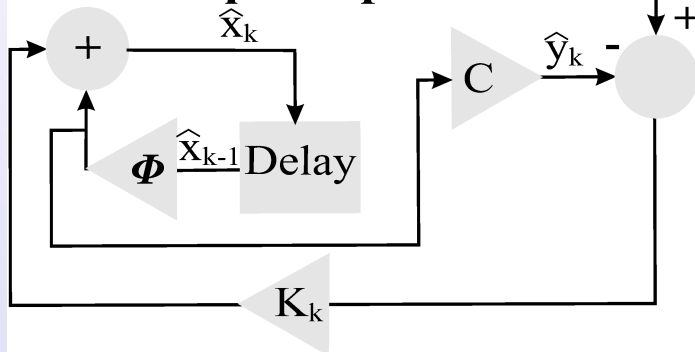


Рис. 5. схема динамической системы с ДФК

Дискретный фильтр Калмана предполагает использование марковской последовательности и проведения линейных измерений в дискретные моменты времени.

Вектор состояния дискретной линейной динамической системы

$$x_k = \Phi x_{k-1} + \omega_k \quad (8.4)$$

Вектор наблюдаемых переменных состояния (выход) $y_k \in R^p$

$$y_k = C x_k + \nu_k, \quad (8.5)$$

где $x_k \in R^n$ является истинным вектором состояния динамической системы в момент k , $\Phi = e^{At} \in R^{n \times n}$ — переходная матрица системы в момент времени t , где A — матрица состояния непрерывной системы $\dot{x} = Ax + Bu + \omega$, ω_k — дискретный случайный процесс (шум процесса), $C \in R^{p \times n}$ — матрица измерения, ν_k — шум измерения, $y_k \in R^p$ измеренный выход.

Оцениваемое состояние и выходные данные задаются как оцениваемый вектор состояния,

$$\hat{x}_k = \Phi \hat{x}_{k-1} + K \varepsilon, \quad (8.6)$$

оценка выхода

$$\hat{y}_k = C \Phi \hat{x}_{k-1}, \quad (8.7)$$

где $\hat{x}_k \in R^{n \times 1}$ — оценка вектора состояния в момент времени k , $K \in R^{n \times p}$ — усиление ошибки или коэффициент усиления Калмана, \hat{y}_k — оценка выхода в момент времени k .

Выходная ошибка (невязка оценивания) ε определяется как разность между наблюдаемыми и предсказанными значениями:

$$\varepsilon = y_k - \hat{y}_k \quad (8.8)$$

Погрешность оценки во момент времени k определяется как,

$$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k \quad (8.9)$$

Подстановка уравнений (8.4) и (8.6) в уравнение (8.9) дает:

$$\tilde{x}_k = \Phi x_k + \omega - (\Phi \hat{x}_{k-1} + K\varepsilon) \quad (8.10)$$

где \tilde{x}_k — погрешность оценки в момент времени k .

Ошибка оценивания.

Подставим в (8.10) значения y_k , определенным в (8.5), где x_k задано (8.4), и \hat{y}_k определенным в (8.7). Получим

$$\varepsilon = y_k - \hat{y}_k = Cx_k + \nu_k - C\Phi\hat{x}_{k-1} = C(\Phi x_{k-1} + \omega_k) + \nu_k - C\Phi\hat{x}_{k-1}.$$

Подставим полученное выражение в (8.10).

$$\tilde{x}_k = (I - KC)\Phi\tilde{x}_{k-1} + (I - KC)\omega - K\nu_k \quad (8.11)$$

Корреляционная матрица ошибок (оценочная дисперсия):

$$P_k = E(\tilde{x}_k\tilde{x}_k^T) \quad (8.12)$$

Тождества (8.13) основаны на предположении о Гауссовом шуме и некоррелированности измерений и шума:

$$\begin{aligned} E(\nu_k \nu_k^T) &= R_K, & E(\omega_k \omega_k^T) &= Q_K, \\ E(\omega_k \nu_k^T) &= E(\tilde{x}_k \nu_k^T) = E(\tilde{x}_k \omega_k^T) &= 0 \end{aligned} \quad (8.13)$$

Q_K — симметрическая неотрицательно-определенная матрица интенсивности белого шума ω дискретного временного процесса.

R_K — симметрическая неотрицательно-определенная матрица интенсивности белого шума измерений ν .

$$Q_k = \frac{Q}{\Delta t}, \quad Q = \int_{\delta t}^0 \Phi(\tau) Q \Phi^T(\tau) d\tau \quad (8.14)$$

где δt — модельное время.

Корреляционная матрица ошибок P_k определенная в (8.12), с учетом(8.11) примет вид

$$P_k = (I - KC)M_k(I - KC)^T + KR_kK^T, \quad (8.15)$$

где $M_k = \Phi P_{k-1}\Phi^T + Q_k$, часто называют предсказанной (априорной) корреляционной матрицы ошибок (априорной ковариацией) для нового шага $k + 1$ вычислений.

Значения коэффициентов фильтра K определяются путем решения уравнения:

$$\frac{\partial[\text{tr}(P_k)]}{\partial K} = 0 \quad (8.16)$$

для K , где $\text{tr}(P_k)$ — след матрицы P_k .

Решение:

$$K = M_k C (C M_k C^T + R_k)^{-1}. \quad (8.17)$$

Обновленная корреляционная матрица (ковариация):

$$P_k = (I - KC)M_k \quad (8.18)$$

Алгоритм использования линейного однородного фильтра Калмана

1. $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$, $P(0) = P_0$ — инициализация оценки состояния и ковариации.
2. $\hat{x}_k^- = \Phi \hat{x}_{k-1}^+$ — вычислить (спрогнозировать) следующую оценку состояния (априорная оценка).
3. $M_k = \Phi P_{k-1} \Phi^T + Q_{k-1}$ — вычислить (предсказать) ковариацию.
4. $K_k = M_k C (C M_k C^T + R_k)^{-1}$ — вычислить коэффициент усиления Калмана.
5. $P_k = (I - K_k C) M_k$ — обновить ковариацию на основе коэффициента усиления Калмана.
6. $\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- - K_k (y_k - C \hat{x}_k^-)$ — найти новую оценку состояния по заданному измерению y_k (Апостериорная оценка)

Начальная матрица P_k обычно содержит диагональные элементы, соответствующие начальным дисперсиям ошибок соответствующих переменных состояния.

Ошибка обновления (инновации) или прогнозируемая разность — разность между фактическим измерением и предсказанным значением измерения

$$\varepsilon_k = y_k - C\Phi\hat{x}_{k-1}. \quad (8.19)$$

Показатель производительности фильтра:

$$R_e = CM_kC^T + R_k \quad (8.20)$$

Сравнивая R_e с фактической ковариацией ошибок инноваций, которую можно найти с помощью автокорреляционной функции. Насколько близки эти два значения, показывает, насколько хорошо предполагаемые статистические свойства отражают фактическим, которые можно определить во время работы фильтра.

ФИЛЬТР КАЛМАНА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Большинство физических систем имеют модель непрерывного времени для эволюции состояния системы, и модель дискретных измерений для уточнения состояния.

Вектор состояния непрерывной линейной динамической системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t), \quad w(t) \sim N(0, Q(t)) \quad (8.21)$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния динамической системы, $u \in R^r$ — вектор управления, $A \in R^{n \times n}$ — матрица состояния непрерывной системы, $w \in R^n$ — вектор случайных воздействий (случайный процесс, шум), $B \in R^{n \times r}$ — матрица управления, Возможности измерять полный вектор состояния системы, как правило, нет.

Измеряемая информация:

$$y_k = C_k x_k + v_k, \quad v_k \sim N(0, R_k), \quad (8.22)$$

где $y_k \in R^p$ — вектор измерения (выход), $C \in R^{p \times n}$ — матрица измерения, $v_k \in R^p$ — шум измерения, $x_k = x(t_k)$.

Воздействия ω и помехи ν_k считать гауссовскими случайными процессами типа белого шума:

$$\begin{aligned} E\{\omega(t)\} &= 0, \quad E\{\nu(t)\} = 0 \\ E\{\omega(t)\omega^T(t)\} &= Q(t)\delta(t - \tau), \\ E\{\nu(t)\nu^T(t)\} &= R(t)\delta(t - \tau), \end{aligned} \tag{8.23}$$

где

$Q(t) \in R^{n \times n}$ — симметрическая неотрицательно-определенная матрица интенсивности белого шума $\omega(t)$, связанная с шумами управляющих входов.

$R(t) \in R^{p \times p}$ — симметрическая положительно-определенная матрица интенсивности белого шума $\nu(t)$,

$\delta(t)$ — дельта - функция Дирака.

Начальное состояние системы $x(t_0)$:

$E\{x(t_0)\} = \bar{x}_{0|0}$ — известное математическое ожидание,

$P_{0|0} = P(t_0, t_0) = E\{[x(t_0) - \bar{x}_0][x(t_0) - \bar{x}_0]^T\}$ — ковариационная матрица,
Начальное состояние системы, случайные воздействия и помехи измерений
взаимно некоррелированы при всех $t \geq t_0$

Задача : обеспечить оптимальную оценку вектора состояния системы в смысле минимума дисперсии ошибки оценивания.

Прогноз вектора состояния

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t), \text{ где } \hat{x}(t_{k-1}) = \hat{x}_{k-1|k-1} \Rightarrow \hat{x}_{k|k-1} = \hat{x}(t_k)$$

Прогноз состояния и ковариации получается интегрированием дифференциальных уравнений с начальным значением, взятым из предыдущего шага коррекции.

Определение матрицы коэффициентов усиления K .

Уравнение фильтра Калмана для системы (8.21, 8.22):

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K[y - C\hat{x}]. \quad (8.24)$$

Здесь K — коэффициент усиления Калмана.

Матрица K определяется из уравнения

$$K = P^{-1} C^T R^{-1}, \quad (8.25)$$

где P — корреляционная матрица ошибок, C , R — определены в (8.23)
 P — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A(t)^T + Q(t),$$

где $P(t_{k-1}) = P_{k-1|k-1} \Rightarrow \mathbf{P}_{k|k-1} = P(t_k)$

A — определена в (8.21), C — определена в (8.22).

Начальное условие: $P_0(t) = P(t_0, t_0)$.

Коррекция

$$K_k = P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$$

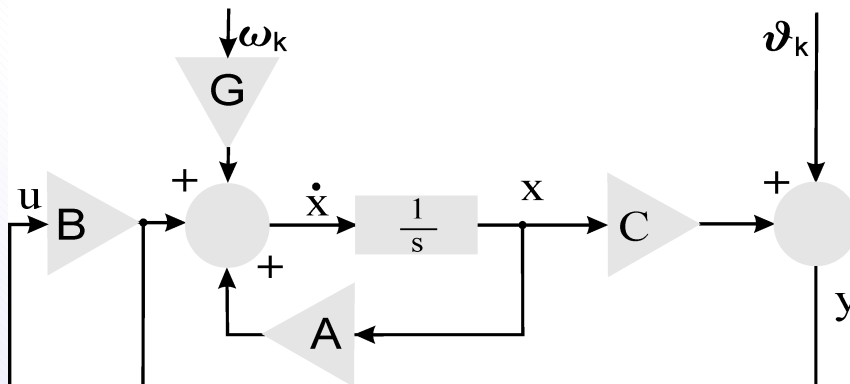
$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})$$

$$P_{k|k} = (I - K_k C_k) P_{k|k-1}$$

Для случая непрерывного времени $R(t)$ — ковариация шумов наблюдения равна ковариации ошибки предсказания $\tilde{y}(t) = z(t) - H(t)\hat{x}(t)$.

Уравнения коррекции идентичны уравнениям из дискретного ФК.

Модель динамической системы



Модель фильтра Калмана

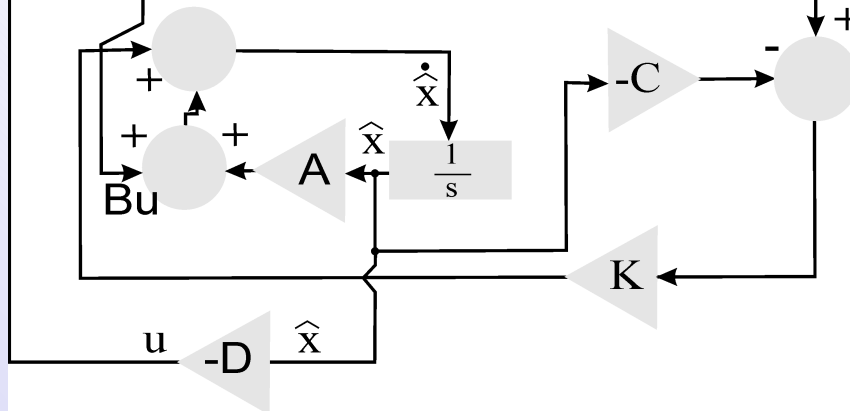


Рис. 6. Схема динамической системы с НФК

Расширенный Фильтр Калмана (Extended Kalman Filter)

Ограничение фильтра Калмана — модель системы должна быть линейной. Расширенный фильтр Калмана (РФК) был разработан для обработки случая нелинейной динамики.

Оператор модели нелинейной дискретной стохастической системы Φ линеаризуется. Используется разложение уравнения состояния в ряд Тейлора в окрестности текущей оценки x_k , члены второго и более высоких порядков отбрасываются. Аналогичные преобразования выполняются над уравнением измерений в окрестности прогноза \hat{x}_k^- .

РФК — эффективный рекурсивный вычислительный алгоритм. Ограничения применение РФК:

- 1) линеаризованное преобразование математического ожидания и ковариационной матрицы достаточно близко к заданному нелинейному,
- 2) матрица частных производных, полученная в процессе линеаризации исходной системы, должна существовать.

Однородная нелинейная система со стохастическими входами и оценка состояния

$$\dot{x} = f(x, \omega), \quad y_k = c(x_k, \nu_k), \quad (8.26)$$

$$\dot{\hat{x}}_k = f(\hat{x}_{k-1}^+), \quad y_k = c(\hat{x}_k^-), \quad (8.27)$$

где f и c — нелинейные функции, зависящие от состояния системы.

Линеаризованная динамическая систему уравнений 1-го порядка:

$$F_k \approx \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k^-}, \quad (8.28)$$

$$C_k \approx \left. \frac{\partial c(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k^-}, \quad (8.29)$$

Приближение первого порядка может быть распространено на алгоритмы более высокого порядка (приближения второго или третьего порядка). Для этого требуется оценка гессииана.

Приближение первого порядка для разложения в ряд Тейлора выражений (8.28) и (8.29), приводит к

$$\Phi_k = e^{F_k \delta t} \approx I + F_k \delta t. \quad (8.30)$$

СПРАВКА

Гессиан функции — симметрическая квадратичная форма, описывающая поведение функции во квадратичном приближении (второй порядок малости), не меняющаяся при линейных преобразованиях переменных.

Для функции f , дважды дифференцируемой в точке $x \in R^n$

$$H(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j ,$$

где $a_i = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, функция $f \in R^n$.

Точка x_0 называется критической, если градиент $f(x)$ (векторная производная) равен нулю в этой точке.

Достаточным условием существования экстремума в точке x_0 является знакоопределённость гессиана $f(x)$:

1. если гессиан положительно определён, то x_0 — точка локального минимума функции $f(x)$,
2. если гессиан отрицательно определён, то x_0 — точка локального максимума функции $f(x)$,
3. если гессиан не является знакоопределённым и невырожден ($\det H(f) \neq 0$), то x_0 седловая точка функции $f(x)$.

Алгоритм расширенного фильтра Калмана

1. $\hat{x}(0) = \hat{x}_0, P(0) = P_0$ — Инициализация оценки состояния и ковариации.
2. $\hat{x}_k^+ = f(\hat{x}_{k-1}^+)$ — Прогнозировать следующую оценку состояния (априорная оценка).
3. $\hat{x}_{k1}^- = \hat{x}_{k-1}^+ + \hat{x}_k \delta t$ — Численно Интегрировать
4. $F_k = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k^-}, C_k = \left. \frac{\partial c(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k^-}$ — Найти аппроксимации первого порядка линейризации априорной оценки состояния
5. $M_k = \Phi P_{k-1} \Phi^T + Q_{k-1}$ — Предсказать ковариацию.
6. $K_k = M_k C (C M_k C^T + R_k)^{-1}$ — Решите для коэффициент усиления Калмана.
6. $P_k = (I - K_k C) M_k$ — Обновление ковариации на основе коэффициента усиления Калмана.
7. $\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- - K_k (y_k - C \hat{x}_k^-)$ — Найти новую оценку состояния по заданному измерению y_k .

здесь априорная оценка основана на оценке непрерывной функции при оценке, найденной на предыдущем временном шаге, а затем численно интегрируется для оценки дискретного временного состояния.

Фильтра Калмана при наличии ограничений на вектор состояния (Constrained Kalman Filter Methods)

Физические или математические ограничения, наложенные на вектор состояния системы, могут учитываться при проектировании ФК.

Преимущество ограниченного фильтра Калмана:

если есть предварительные сведения о границах изменения вектора состояния, то для сохранения оценки в этих границах могут быть применены ограничения.

Фильтры Калмана с ограничениями имеют приложения в оценке ориентации космического аппарата, инерциальной навигации, отслеживании целей, робототехнике и навигации GPS/INS.

Для линейных систем ограничения равенства и неравенства состояний будут иметь следующий вид

$$Dx = d, \quad Dx \leq d, \quad (8.31)$$

где $D \in R^{l \times n}$ — матрица, состоящая из l линейных уравнений ограничений, d — граница ограничения.

Ограничения — жесткие и мягкие. Мягкие ограничения — это ограничения, когда точные условия ограничений неизвестны.

Уравнение ограничения можно отобразить в матрице измерений в виде расширенного члена.

$$\begin{bmatrix} y \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \nu \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.32)$$

Если ограничение является жестким, то шумовой член считается нулевым, что дает идеальное ограничение измерения.

Если существует вероятность нарушения ограничения, то можно присвоить шумовому члену некоторую неопределенность.

Мягкое ограничение реализуется путем рассмотрения СВ как части отношения ограничений:

$$Dx = d + \nu_d, \quad (8.33)$$

где ν_d — случайный процесс, обычно считается гауссовским шумом.

$$\begin{bmatrix} y \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \nu \\ \nu_d \end{bmatrix}. \quad (8.34)$$

Этот метод обычно используется в работе, касающейся автономных наземных транспортных средств.

Сигма-точечный фильтр Калмана Unscented Kalman Filter

Разработан для устранения ошибок усечения, вызванных линеаризацией нелинейных систем первого порядка, с помощью Unscented-преобразования. Иногда — ансцентное-преобразование (Unscented – нечуткий).

В основе алгоритма Сигма-точечный фильтр Калмана лежит **Unscented-преобразование**.

Основная идея Unscented-преобразования: аппроксимации подвергается не произвольная нелинейная функция, а распределение случайной величины.

Численный алгоритм определения нескольких начальных моментов многомерной плотности распределения вероятности (МПВ) случайной величины после нелинейного преобразования над ней. МПВ должна быть симметричной и унимодальной.

Предполагается, что проще оценить функцию распределения вероятности нелинейной функции, чем оценить саму функцию.

Для этого МПРВ до преобразования описывается детерминированным набором сигма-точек, позволяющим однозначно восстановить по нему значения необходимых начальных моментов МПВ.

УКФ может точно оценить распределение оценки до точности **второго порядка**.

Рассмотрим нелинейную систему, описываемую разностным уравнением и моделью наблюдения с аддитивным шумом.

$$\begin{aligned} X_k &= f(x_{k-1}, \omega_k), \quad \omega_k \sim (0, \Sigma_\omega), \quad k = 0, \dots \\ Y_k &= g(x_k, \nu_k), \quad \nu_k \sim (0, \Sigma_\nu), \quad k = 0, \dots \end{aligned} \quad (8.35)$$

В случае неаддитивных процесса и шума измерений, схема unscented-преобразования применяется к дополненному вектору состояний

$$x_k^{aug} = [x_k^T \quad \omega_k^T]^T \nu_k^T$$

Множество сигма-точек

X — случайный вектор, $Y = f(X)$ — нелинейное преобразование.
 $E\{X\} = \mu_x$ и ковариационной матрицей $R_X = E\{(X - \mu_x)(X - \mu_x)^T\}$.

Пусть $\{X^i\}$ — множество векторов (сигма-точек),

$$E\{X^i\} = \mu_x, R_{X^i} = R_X, i = 1 \dots K.$$

Каждой сигма-точке X^i ставим в соответствие вес W^i , $i = 1 \dots K$

$$\sum_{i=1}^K W^i = 1, \{(X^i, W^i)\}$$

Нелинейному преобразованию $Y = f(X)$ подвергается каждая сигма-точка в отдельности. Получим множество сигма-точек $\{Y^i\}$.

Выборочное среднее $\{Y^i\}$: $\hat{m}_x = \sum_{i=1}^K W^i X^i$.

Взвешенная выборочная ковариация $\{Y^i\}$: $\hat{R}_X = \sum_{i=1}^K W^i (X^i - \hat{m}_x)(X^i - \hat{m}_x)^T$.

Выборочное среднее и взвешенная выборочная ковариация являются оценкой математического ожидания и ковариации исходного вектора после нелинейного преобразования $Y = f(X)$.

Пример нахождения сигма-точек:

$$X^0 = mu_x, W^0,$$

$$X^i = mu_x + \sqrt{\frac{K}{1 - W^0}} (R_x)_i^{1/2}, W^1 = \frac{1 - W^0}{2K}, i = 1 \dots K$$

$$X^{i+K} = mu_x - \sqrt{\frac{K}{1 - W^0}} (R_x)_i^{1/2}, W^1 = \frac{1 - W^0}{2K}, i = 1 \dots K$$

где W^0 — отвечает за положение сигма-точек μ_x , $(R_x)_i^{1/2}$ — i -й столбец (строка) матрицы $(R_x)^{1/2}$.

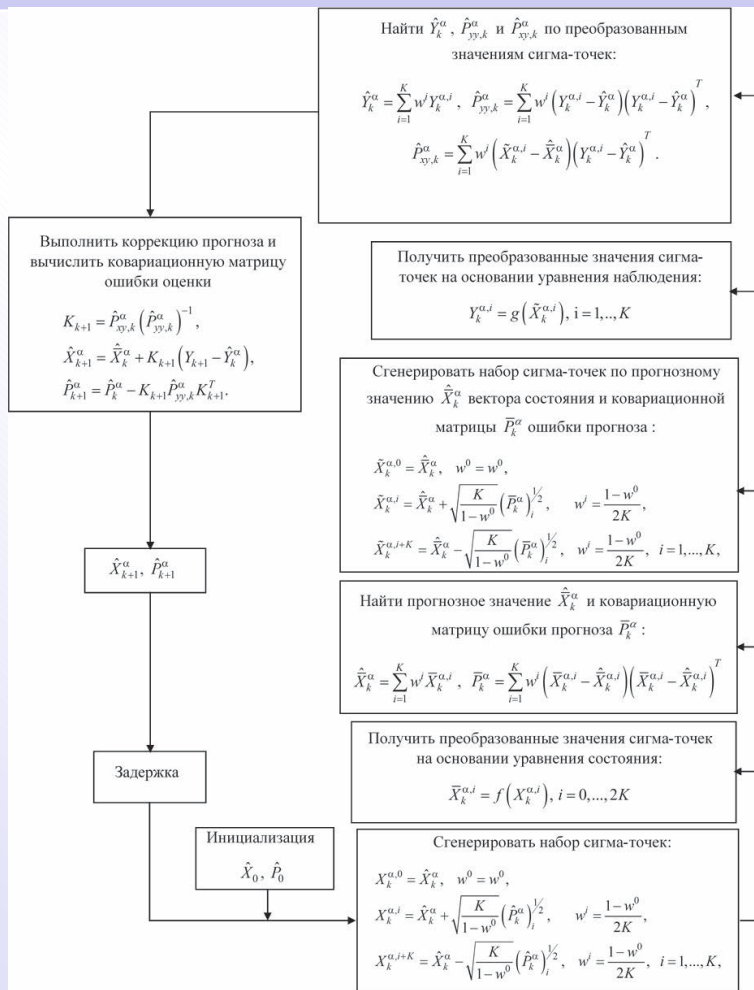


Рис. 7. Алгоритм сигма-точечного фильтра Калмана

Адаптивный Фильтр Калмана

Метод ”Уточнения ковариации”

Одним из основных недостатков фильтрации Калмана является предположение о том, что шум процесса и шум измерения считаются постоянными. Исходное предположение о ковариационной матрице может быть неверным.

Адаптивная фильтрация Калмана (АКФ) использует алгоритмы для нахождения истинных теоретических элементах ковариационных матриц на основе ошибки обновления (8.19) и данных датчиков, доступных в режиме реального времени.

Основан на следующей идее: ковариационную матрицу шума измерения R_K можно оценить по ковариационной матрице невязок

$$R_K \cong \varepsilon_k \varepsilon_k^T \quad (8.36)$$

где ошибка обновления (прогнозируемая разность): $\varepsilon_k = y_k - C\Phi\hat{x}_{k-1}$.
Для большей статистической значимости используют формулу

$$R_K \cong \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \varepsilon_k^T, \quad (8.37)$$

где N количество тактов усреднения в скользящем окне; длина скользящего окна определяет адаптивность алгоритма к изменению характеристик шумов, выбирается эмпирически (10—50 отсчетов).

Оценку ковариационной матрицы шума процесса можно записать с использованием N -выборочного среднего в виде

$$Q_K \cong \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N q_k q_k^T, \quad (8.38)$$

где $q_k = \hat{x}_k - \Phi\hat{x}_{k-1}$

Алгоритм "Уточнения ковариации"

1. Начальные условия

- a) Для оценки R : $j = 0$, $\hat{R}_0 = 0$;
- b) Для оценки Q : $j = 0$, $\hat{Q}_0 = 0$;

2. Аппроксимация шума

- a) Для оценки R : $\varepsilon_k = y_k - C\Phi\hat{x}_{k-1}$;
- b) Для оценки Q : $q_k = \hat{x}_k - \Phi\hat{x}_{k-1}$;

3. Вычисление

- a) Для оценки R : $\hat{R}_k = \frac{k-1}{k}\hat{R}_{k-1} + \frac{1}{k}\varepsilon_k\varepsilon_k^T$;
- b) Для оценки Q : $\hat{Q}_k = \frac{k-1}{k}\hat{Q}_{k-1} + \frac{1}{k}q_kq_k^T$;

4. $k < N \Rightarrow k = k + 1$. Переходим к шагу 2.

5. $k = N$

- a) Для оценки R : Подставляем \hat{R}_N в фильтр
- b) Для оценки Q : Подставляем \hat{Q}_N в фильтр